

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.com



ОТЕЧЕСТВЕННОЙ

АКАДЕМИЯ НАУК
СССР

АКАДЕМИЯ НАУК
УССР

Киев — 1970



АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВО-
ЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ

История

АКАДЕМИЯ НАУК УССР

СЕКТОР ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНА-
НИЯ И ТЕХНИКИ ИНСТИТУТА
ИСТОРИИ

В ЧЕТЫРЕХ ТОМАХ

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ:

И. З. Штокало (*ответственный ре-
дактор*), А. Н. Боголюбов (*замес-
титель ответственного редакто-
ра*), А. П. Юшкевич (*замести-
тель ответственного редактора*),
И. Г. Башмакова, Н. Н. Боголюбов,
А. О. Гельфонд, А. Т. Григорьян,
Б. Н. Делоне, Н. П. Еругин,
А. Ю. Ишлинский, И. П. Кубилюс,
Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич,
С. Н. Мергелян, Ю. А. Митропо-
льский, Н. И. Мухелишвили,
О. С. Парасюк, И. Б. Погребысский,
Е. Я. Ремез, Б. А. Розенфельд,
К. А. Рыбников, В. И. Смирнов,
Ю. Д. Соколов, Г. С. Чогошвили,
А. Б. Паплаускас (*ответственный
секретарь*), В. С. Сологуб (*ответ-
ственный секретарь*).

РЕДАКЦИЯ 4-ГО ТОМА:

И. З. Штокало (*ответственный ре-
дактор*), А. Н. Боголюбов (*замести-
тель ответственного редактора*),
А. П. Юшкевич (*заместитель от-
ветственного редактора*), Н. Н. Бо-
голюбов, Ю. А. Гастев, Ф. Д. Гахов,
В. М. Глушков, Б. В. Гнеден-
ко, Н. П. Еругин, В. И. Крылов,
Ю. А. Митропольский, Н. И. Мус-
хелишвили, О. С. Парасюк, И. Б.
Погребысский, В. И. Смирнов,
А. Б. Паплаускас (*ответственный
секретарь*), В. С. Сологуб (*ответ-
ственный секретарь*).

ОТЕЧЕСТВЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ

4

Книга 1

1917—1967

51(09C)
И90

УДК 510 (09):517:519.3

ПОЛНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

НАПРАВЛЕНИЯ

ИЗДАНИЕ 1977

1

1.1.1.1

1.1.1.1.1

2-2-1
65-60M

ПРЕДИСЛОВИЕ

Четвертый том «Истории отечественной математики» состоит из двух книг, в которых, как и в третьем томе, освещается развитие математики в нашей стране за годы Советской власти.

В первой книге тома рассматриваются исследования по теории функций комплексного переменного, дифференциальным и интегральным уравнениям, вариационному исчислению и функциональному анализу, во второй — по теории вероятностей и математической статистике, приближенным методам, математическим методам в механике и теоретической физике, вычислительной математике и кибернетике, математической логике и основаниям математики, истории математики. Во второй книге тома помещен биографический словарь советских математиков (академиков, членов-корреспондентов, докторов наук, профессоров), а также справочник по советской математической периодике.

В связи с тем что количество результатов, полученных в нашей стране за годы Советской власти во всех областях математики, очень велико, авторы не имели возможности в издании такого объема осветить с достаточной полнотой все научные результаты и все направления исследований. Пришлось остановиться на основных научных результатах, направлениях и школах, причем из них выделены те, в которых особенно ощутим вклад советских ученых в развитие математики. По этой же причине авторы вынуждены были также отказаться, за небольшим исключением, от цитирования математической литературы. В библиографию к отдельным главам включены лишь наиболее важные, по мнению авторов, математические работы, в основном крупные монографии и обзоры.

Главы первой книги четвертого тома написали следующие авторы:

Глава I — А. А. Гольдберг, А. А. Гончар, Б. Я. Левин, С. Н. Мергелян, И. В. Островский, А. А. Темляков.

Глава II — И. Н. Векуа, Л. И. Волковыский, Ф. Д. Гахов, И. И. Данилюк, А. Г. Джваршейшвили, В. А. Зморевич, Г. Д. Суворов, П. Ф. Фильчаков, Б. В. Хведелидзе.

Глава III — Н. П. Еругин, В. В. Немыцкий, А. Б. Васильева, С. Н. Шаманов, В. С. Сологуб, В. В. Стрыгин.

Глава IV — В. И. Смирнов.

Глава V — Л. Э. Эльсгольц, В. С. Сологуб.

Глава VI — Ю. М. Березанский, Ю. Л. Далецкий, Г. И. Кац, Б. И. Коренблюм, М. А. Красносельский, С. Г. Крейн, В. И. Соболев, С. В. Фомин.

Глава VII — Т. Г. Гегелиа, Г. Ф. Манджавидзе, Б. В. Хведелидзе, Ю. И. Черский.

Библиография к отдельным главам, составленная авторами, упорядочена Г. Н. Романенко и Е. И. Погребысской.

Главы второй книги написали:

Глава I — Б. В. Гнеденко, И. И. Гихман, В. С. Королюк, А. В. Скороход.

Глава II — В. И. Крылов, А. А. Самарский, В. Я. Арсенин, В. В. Бобков, Н. П. Кеда, О. А. Лисковец, П. И. Монастырский, И. П. Мысовских, Л. Я. Янович.

Глава III — А. И. Ахиезер, О. С. Парасюк, А. В. Свидзинский.

Глава IV — А. Ю. Ишлинский, Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, А. Д. Коваленко, Г. Н. Савин, А. Н. Боголюбов, С. М. Великая, В. А. Добровольский, П. П. Забрейко, О. Б. Лыкова, И. И. Ляшко, Е. М. Нестеренко, И. Б. Погребысский, Т. В. Путята, Б. Н. Фрадлин.

Глава V — В. М. Глушков, Г. Е. Пухов, А. Ф. Верлань, А. П. Ершов, А. А. Лещевский, В. С. Михалевич, В. Н. Редько, М. Р. Шура-Бура, Е. Л. Ющенко.

Глава VI — Ю. А. Гастев, З. И. Козлова, А. А. Ляпунов, Б. А. Трахтенброт.

Глава VII — А. Н. Боголюбов, Б. А. Розенфельд, А. П. Юшкевич.

Библиография к главам упорядочена Е. И. Погребысской. Краткий биографический словарь «Советские математики» составлен Э. Г. Цыганковой и Л. В. Ковальчук, справочник «Математические периодические и повременные издания» — Э. Г. Цыганковой.

Четвертый том подготовлен к печати коллективом отдела истории естествознания Сектора истории естествознания и техники Института истории АН УССР в составе академика АН УССР И. З. Штокало, члена-корреспондента АН УССР А. Н. Боголюбова и старшего научного сотрудника кандидата физико-математических наук В. С. Сологуба, под общим руководством академика АН УССР И. З. Штокало. В подготовке материалов принимали участие старшие научные сотрудники Института истории естествознания и техники АН СССР доктор физико-математических наук профессор А. П. Юшкевич и кандидат физико-математических наук А. Б. Паплаускас. Научно-вспомогательная работа выполнена сотрудниками отдела истории естествознания Сектора истории естествознания и техники Института истории АН УССР Э. Г. Цыганковой, Г. Н. Романенко, Л. В. Ковальчук, Ю. Ф. Косолаповым, К. Ф. Дербеневой, Е. И. Погребысской и З. Р. Вельяниновой.

План и содержание тома обсуждались на заседаниях Семинара по истории математических наук при Секторе истории естествознания и техники Института истории АН УССР, Научно-исследовательского семинара по истории математики и механики при Московском университете, на всесоюзных и региональных конференциях по истории физико-математических наук, а также на Международном конгрессе математиков (Москва, 1966 г.).

Редколлегия и авторский коллектив выражают глубокую благодарность всем ученым, принимавшим участие в рецензировании и обсуждении материалов четвертого тома.

ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИКИ В СССР

(ПРОДОЛЖЕНИЕ)

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ТЕОРИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Общая теория целых и мероморфных функций

Систематическое исследование вопросов теории целых и мероморфных функций было начато в нашей стране в конце 20-х — начале 30-х годов XX в. Немало тонких исследований советских математиков посвящено общим теоремам о росте и убывании целых и мероморфных функций, изучению зависимости между ростом целых функций и распределением их корней. Построена теория, в которой учитывается влияние на рост целой функции не только модулей, но и аргументов ее корней. Эта теория дополнялась и обобщалась в различных направлениях.

Вопросами распределения значений мероморфных функций в СССР начали заниматься лишь в 50-х годах, однако советским математикам удалось решить многие кардинальные задачи, остававшиеся нерешенными в течение десятков лет. В частности, полностью решена проблема о структуре множества дефектных значений для мероморфных функций и получены неожиданные сильные результаты о структуре этого множества для целых функций. Кроме того, установлены новые факты, относящиеся к распределению a -точек не только по их модулям, как это делается в общей теории распределения значений, но и по их аргументам.

1

Характеристики роста и общие теоремы о росте целых и мероморфных функций

Для изучения асимптотического поведения целых функций при $z \rightarrow \infty$ вводится величина

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

В классической теории целых функций строится следующая шкала роста. Порядком целой функции $f(z)$ называется число

$$\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r, f)}{\ln r}. \quad (1)$$

Для функций конечного порядка вводится более тонкая характеристика роста — тип σ , определяемый равенством

$$\sigma = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r, f)}{r^\rho}.$$

При этом различаются следующие случаи: $\sigma = 0$ (минимальный тип), $0 < \sigma < \infty$ (нормальный тип) и $\sigma = \infty$ (максимальный тип). Кроме того, вводится нижний порядок λ , определяемый соотношением (1) с заменой верхнего предела нижним, и нижний тип

$$\tau = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r, f)}{r^\lambda}.$$

Для мероморфных функций величина $M(r, f)$ не дает хорошей характеристики асимптотического поведения функции $f(z)$. Для классификации этих функций пользуются величинами

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi,$$

$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f) \ln r$$

($n(t, f)$ — число полюсов, с учетом кратности, функции $f(z)$ в круге $|z| \leq t$),

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

Функция $T(r, f)$ монотонно возрастает. В случае целой функции величина $T(r, f) = m(r, f)$ связана с $M(r, f)$ соотношением

$$T(r, f) \leq \ln^+ M(r, f) \leq \frac{R+r}{R-r} T(R, f), \quad 0 < r < R < \infty. \quad (2)$$

Для мероморфных функций шкала роста вводится с помощью порядка

$$\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln T(r, f)}{\ln r}$$

и типа

$$\sigma^{(1)} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, f)}{r^\rho}.$$

Аналогично вводятся нижний порядок λ и нижний тип $\tau^{(1)}$. Из соотношения (2) следует, что для целых функций это определение порядков эквивалентно данному ранее, а σ и $\sigma^{(1)}$ одновременно равны нулю, бесконечны или конечны и положительны.

Исследованию аналитических свойств функции $M(r, f)$ посвящены работы Адамара, Бибераха и Валирона. В частности, ими установлено, что функция $\ln M(r, f)$ выпуклая относительно $\ln r$ и кусочно-аналитическая. В 1955 г. Ш. И. Стрелиц установил, что $M(r, f)$ для некоторых

значений r может быть недифференцируемой и что для всякого $R > 0$ можно указать функцию $f(z)$, голоморфную в $|z| < R$, $f(z) \neq c_1 \times \exp(c_2 z)$, $|c_1| = |c_2| = 1$, такую, что $M(r, f) = M(r, e^z)$, $0 \leq r < R$. Тем самым дан ответ на один из вопросов, поставленных Бибербахом. Кроме того, Стрелиц исследовал множество тех точек z , для которых справедливо равенство $|f(z)| = M(|z|, f)$, и получил интересные результаты. В частности, он установил, что это множество не может иметь изолированных точек и его пересечение с каждым замкнутым кругом состоит из конечного числа алгеброидных дуг.

В теории целых функций естественен вопрос о том, как связаны характеристики $M(r, f)$ и $T(r, f)$. Палеем была выдвинута (1932 г.) такая гипотеза: для целых функций порядка ρ

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r, f)}{T(r, f)} \leq \begin{cases} \frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho}, & 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}, \\ \pi \rho, & \rho \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3)$$

При $\rho \leq \frac{1}{2}$ эта гипотеза доказана Валироном. При $\rho > \frac{1}{2}$ справедливость гипотезы доказана (1968 г.) Н. В. Говоровым. Его результаты усилены (1969 г.) В. П. Петренко, который показал, что они справедливы и для мероморфных функций и что в соответствующих неравенствах можно заменить порядок ρ нижним порядком λ .

Среди целых функций выделяется класс функций регулярного роста, для которых $\rho = \lambda$, т. е. существует

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r, f)}{\ln r} = \rho = \lambda,$$

и совершенно регулярного роста, если, кроме того, $\sigma = \tau$, т. е. существует

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r, f)}{r^\rho}.$$

Аналогичные понятия можно ввести, заменив $\ln M(r, f)$ величиной $T(r, f)$. Сравнивая характеристики $M(r, f)$ и $T(r, f)$, заметим, что регулярность роста по одной из них эквивалентна регулярности по другой. А. А. Гольдберг построил (1963 г.) примеры, показывающие, что из совершенной регулярности роста по одной из этих характеристик не следует совершенная регулярность по другой. Тем самым дан отрицательный ответ на один из вопросов, содержащихся в списке проблем¹, составленном на коллоквиуме по классической теории функций при Корнельском университете (США, 1961 г.).

Сопоставляя функцию $\ln M(r, f)$ с более общими функциями, можно построить более тонкую шкалу роста (Линделеф). Для сравнения Валирон ввел функции $r^\rho L(r)$, где $L(r)$ — «медленно изменяющаяся»

¹ Исследовательские проблемы. — Математика. Сб. переводов, 1963, т. 7, вып. 5, стр. 133—136.



Математический институт Академии наук СССР им. В. А. Стеклова.

функция. Обычно такие функции записываются в форме $r^\rho L(r) = r^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho \geq 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r \rho'(r) \ln r}{\rho(r)} = 0.$$

Функция $\rho(r)$, удовлетворяющая этим двум условиям, называется **уточненным порядком**. Типом целой функции $f(z)$ при данном уточненном порядке $\rho(r)$ называется величина

$$\sigma = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r, f)}{r^\rho(r)}.$$

Существенно, что для всякой целой функции конечного порядка можно подобрать уточненный порядок так, чтобы она была функцией нормального типа, т. е. чтобы $0 < \sigma < \infty$. Этот уточненный порядок называется **уточненным порядком функции $f(z)$** .

Известно, что порядок ρ и тип σ целой функции выражаются через коэффициенты c_n ее ряда Тейлора:

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{\ln \frac{1}{|c_n|}}, \quad (\sigma \rho)^{\frac{1}{\rho}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|}).$$

Тип целой функции уточненного порядка $\rho(r)$ выражается равенством

$$(\sigma \rho)^{\frac{1}{\rho}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) \sqrt[n]{|c_n|}, \quad (4)$$

где $\varphi(t)$ — функция, обратная функции $t = r^{\rho(r)}$.

Для целых функций бесконечного порядка многочисленные соотношения между ростом $\ln_k M(r, f)$ и коэффициентами Тейлора целой функции $f(z)$ получил в 1956—1966 гг. Г. А. Фридман. Представление о его результатах дают следующие равенства. Пусть $L(x)$ — медленно возрастающая функция такая, что

$$x [\ln L^{-1}(\ln_k x)]' = O(1).$$

Тогда

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln_{k+1} M(r, f)}{L(r)} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln_k n}{L(|c_n|^{-\frac{1}{n}})}, \quad k \geq 2, \quad (5)$$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r, f)}{(\ln r)^{1+\eta} L(\ln r)} \cdot \frac{(1+\eta)^{1+\eta}}{\eta^\eta} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1+\eta}}{\left(\ln \frac{1}{|c_n|}\right)^\eta L\left(n^{\frac{1}{\eta}}\right)}, \quad \eta > 0.$$

В 1967 г. М. Н. Шеремета определил «порядок» целой функции относительно двух дифференцируемых, монотонно стремящихся к бесконечности функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ с помощью формулы

$$\tilde{\rho} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\ln M(r, f))}{\beta(\ln r)}.$$

Предполагая, что для любого $c > 0$ при $x \rightarrow \infty$ выполнены условия

$$\alpha(cx) \sim \alpha(x), \quad \beta(x + o(x)) \sim \beta(x), \quad x \{\beta^{-1}[c\alpha(x)]\}' = O(1),$$

он установил справедливость формулы

$$\tilde{\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(n)}{\beta\left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|c_n|}\right)}.$$

Аналогичные результаты получены им также для обобщенного «типа» целых функций и для функций, голоморфных в круге.

В 1926 г. С. Н. Бернштейн показал, что для четных целых функций нулевого рода первого порядка сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|}$, где a_n — коэффициенты Тейлора. Для целых функций нулевого рода первого порядка, не являющихся четными, этот ряд не всегда сходится (Линделеф, 1902 г.). Бернштейну принадлежит также следующая теорема (1926 г.): сумма четных целых функций нулевого рода есть целая функция нулевого рода. Без требования четности теорема неверна (Линделеф, 1902 г.). Развивая результаты С. Н. Бернштейна, В. С. Виденский полностью исследовал (1952 г.) вопрос о том, как по тейлоровским коэффициентам четной целой функции определить, имеет ли она нулевой род. Чтобы род функции был равен нулю, необходима и достаточна одновременная сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[2n]{b_{2n}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}$, где b_{2n} — регуляризация последо-

вательности $|a_{2n}|$ с помощью многоугольника Ньютона — Адамара, а $c_{2n} = \max_{k \geq 0} |a_{2(n+k)}|^{\frac{1}{2(n+k)}}$. Виденский показал также, что целая четная функция $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$ имеет нулевой род одновременно с функцией

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{2n}| z^{2n}.$$

В различных приложениях теории целых функций, в частности в исследовании вопросов о существовании и росте целых решений дифференциальных уравнений, большую роль играют асимптотические формулы, характеризующие поведение целой функции $f(z)$ в окрестности тех точек ζ окружности $|z| = r$, где модуль $|f(z)|$ близок к $M(r, f)$. Такие формулы были впервые получены Виманом и Валироном: при $\zeta \rightarrow \infty$ вне некоторого «малого» множества и любом комплексном τ

$$f(\zeta e^{\frac{\tau}{v}}) \sim f(\zeta) e^{\tau}, \quad f^{(j)}(\zeta) \sim \left(\frac{v(r, f)}{\zeta} \right)^j f(\zeta), \quad (6)$$

где $v = v(r, f)$ — номер наибольшего по модулю члена тейлорова ряда для $f(z)$ (центральный индекс). Макинтайр придал (1938 г.) первой из формул (6) вид

$$f(\zeta e^{\frac{\tau}{K}}) \sim f(\zeta) e^{\tau},$$

где

$$K = K(r, f) = \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}$$

(величина $K(r, f)$ положительна, $K(r, f) = \frac{d}{d \ln r} \ln M(r, f)$ там, где производная существует, и $K(r, f) \sim v(r, f)$) и получил тонкие результаты.

Развивая метод Макинтайра, И. В. Островский установил в 1962 г. следующую теорему.

Пусть $f(z)$ — целая функция конечного порядка ρ , ζ — точка на окружности $|z| = r$, где $|f(\zeta)| = M(r, f)$. Положим

$$K_n = K_n(\zeta) = \left(\frac{d}{d \ln \zeta} \right)^n \ln f(\zeta).$$

Существует такая последовательность значений $r \rightarrow \infty$, что при $|\zeta| = r$, $0 < \theta \leq \theta_\rho$, $|\tau| \leq \theta \{K(r, f)\}^{-\frac{1}{2}}$, $n = 1, 2, \dots$, справедливо соотношение

$$f(\zeta e^{\tau}) = f(\zeta) \exp \{K_1 \tau + K_2 \tau^2 + \dots + K_n \tau^n\} \cdot (1 + \omega_n(\tau)),$$

где $\omega_n(\tau)$ допускает оценку

$$|\omega_n(\tau)| \leq A(n, \rho) \theta^{n+1}.$$

Здесь существенно следующее: в правой части вместо одного члена $K_1 \tau$ стоит полином $K_1 \tau + \dots + K_n \tau^n$, что дает значительно более точную асимптотику.



Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.

Используя эту теорему, Островский исследовал (1963 г.) класс целых функций, удовлетворяющих неравенству

$$|\varphi(x + iy)| \leq M(|y|, \varphi), \quad -\infty < x, \quad y < \infty. \quad (7)$$

Изучение таких функций представляет интерес, в частности, потому, что целые характеристические функции вероятностных законов относятся к этому классу. Приведем следующий результат. Пусть $F(w)$ и $f(z)$ — целые функции и $F(w) \neq \text{const.}$ Если $\varphi(z) = F(f(z))$ удовлетворяет условию (7), то либо $f(z)$ — полином степени не выше 2, либо $f(z)$ — целая функция не ниже нормального типа первого порядка. Из этой теоремы вытекает: целые характеристические функции без нулей, такие, что $\ln \ln M(r, \varphi) = o(r)$, имеют вид $\varphi(z) = e^{-\gamma z^2 + i\beta z}$, $\gamma \geq 0$, $\text{Im } \beta = 0$ (закон Гаусса). Этот результат является ответом на один из вопросов, поставленных Ю. В. Линником (1960 г.).

В различных направлениях обобщал (1962—1963 гг.) формулы Вимана — Валирона Ш. И. Стрелиц. Он исследовал целые функции в окрестности тех точек окружности $|z| = r$, где модуль $|f(z)|$ близок к $M(r, f)$ в том смысле, что $|f(z)| \geq K^{-\beta}(r, f) M(r, f)$, $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$, и получил соотношения, аналогичные соотношению (6). Стрелиц исследовал также специальный класс B_0 неоднозначных аналитических функций, имеющих однозначный модуль, ограниченный в любой конечной части плоскости. В окрестности точек ветвления a_j такая функция допускает представление

$$f(z) = (z - a_j)^{\gamma_j} \psi_j(z), \quad \psi_j(a_j) \neq 0, \quad \gamma_j > 0.$$

Предполагается, кроме того, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K(r, f) = \infty,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\ln^+ \frac{1}{\gamma_f} \right] [\ln K(|a_f|, f)]^{-1} = 0.$$

При выполнении этих условий во всех точках ζ , $|\zeta| = r$, где $|f(\zeta)| = M(r, f)$ (кроме множества значений r конечной логарифмической длины), справедливы асимптотические равенства

$$f^{(j)}(\zeta) \sim \left(\frac{K(r, f)}{\zeta} \right)^j f(\zeta).$$

Это обобщение существенно, поскольку дает возможность изучать неоднзначные решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Функция $M(r, f)$ характеризует глобальный рост целой функции. Для целых функций конечного порядка вводится более тонкая характеристика — индикатор роста

$$h(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{\rho(r)}, \quad (8)$$

где $\rho(r)$ — уточненный порядок данной целой функции $f(z)$. Индикатор описывает рост целой функции по различным направлениям; он не зависит от выбора начала координат.

Известно, что если порядок $\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r)$ целой функции $f(z)$ положителен, то ее индикатор является 2π -периодической тригонометрически ρ -выпуклой функцией. Это означает, что для любых $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3$, $\theta_3 - \theta_1 \leq \frac{\pi}{\rho}$, справедливо неравенство

$$h(\theta_2) \leq \frac{h(\theta_1) \sin \rho(\theta_3 - \theta_2) + h(\theta_3) \sin \rho(\theta_2 - \theta_1)}{\sin \rho(\theta_3 - \theta_1)}. \quad (9)$$

Отсюда при $\rho = 1$ вытекает, что $h(\theta)$ является опорной функцией некоторой выпуклой области. Эта область называется индикаторной диаграммой функции $f(z)$. Кроме того, всякая тригонометрически ρ -выпуклая функция представляется в виде

$$h(\theta) = \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \int_{\theta-2\pi}^{\theta} \cos \rho(\theta - \psi - \pi) ds(\psi), \quad (10)$$

если ρ — нецелое, и в виде

$$h(\theta) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\theta-2\pi}^{\theta} (\theta - \psi) \sin \rho(\psi - \theta) ds(\psi) + A \cos \rho\theta + B \sin \rho\theta, \quad (11)$$

если ρ — целое (здесь $s(\psi)$ — ограниченная неубывающая на отрезке $[0, 2\pi]$ функция). При $\rho = 1$ величина $s(\theta_2) - s(\theta_1)$, $\theta_2 - \theta_1 < 2\pi$, равна длине дуги границы индикаторной диаграммы между точками опоры, соответствующими направлениям θ_1 и θ_2 .

В 1956 г. Б. Я. Левин доказал, что всякая 2π -периодическая тригонометрически ρ -выпуклая функция при нецелом ρ является индикатором некоторой целой функции заданного уточненного порядка $\rho(r) \rightarrow \rho$. В случае целого ρ аналогичный результат установлен лишь при некоторых ограничениях, наложенных на $\rho(r)$. Эти результаты являются обобщениями теоремы итальянского математика В. Бернштейна, относящейся к случаю $\rho(r) \equiv \rho$. При $\rho = 0$, как показал А. А. Гольдберг (1963 г.), индикатор целой функции постоянен.

Целые функции не выше первого порядка и нормального типа называются функциями конечной степени (экспоненциального типа). Каждой такой функции

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

ставится в соответствие ее преобразование Бореля — ассоциированная функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k! z^{-k-1},$$

голоморфная при $|z| > \sigma$, где σ — тип функции $F(z)$ при $\rho(r) \equiv 1$. Одной из важнейших теорем, относящихся к этому классу функций, является теорема Поля (1929 г.), утверждающая, что наименьшая выпуклая область, содержащая все особенности ассоциированной функции (сопряженная диаграмма), является зеркальным отражением в вещественной оси ее индикаторной диаграммы.

Опираясь на свои результаты, полученные в 1916 г., М. Ф. Субботин в 1931 г. обобщил теорему Поля². Пусть $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ — целая функция порядка ρ , $0 < \rho < \infty$, и нормального типа,

$$f(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right) \zeta^{-k-1}, \quad \mu > 0,$$

функция $f(\zeta)$ голоморфна в окрестности $\zeta = \infty$. Обозначим буквой M множество ее особых точек, а $M(\theta)$, $|\theta| \leq \pi$, — пересечение множества M с замыканием угла $|\arg \zeta - \theta| < \min\left(\frac{\pi}{\rho}, \pi\right)$. Пусть

$$k(\theta) = \max_{\zeta \in M(\theta)} \operatorname{Re}(e^{-i\theta} \zeta)^\rho,$$

$k(\theta) = -\infty$, если множество $M(\theta)$ пусто;

$$h(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \ln |F(re^{i\theta})|.$$

Тогда

$$[k(\theta)]^+ = [h(-\theta)]^+, \quad |\theta| \leq \pi. \quad (12)$$

² Приводим его результат в несколько измененной, но равносильной формулировке.



И. Ф. Лохин.

Если функция

$$f_1(z) = (-\ln z)^{\frac{1}{\rho} - \mu} f[e^{i\theta} (-\ln z)^{\frac{1}{\rho}}]$$

голоморфна в точке $z = 1$, то $k(\theta) = h(-\theta)$. Очевидно, что если $\rho = 1$, $\mu = 1$ и $k(\theta)$ хотя бы в одной точке принимает отрицательное значение, то $z = 0$ является точкой голоморфности функции $f(z)$ и, следовательно, $f_1(z)$ голоморфна в $z = 1$. Таким образом, получаем для всех θ равенство $k(\theta) = h(-\theta)$, т. е. теорему Поля.

В 1933 г. В. Бернштейн доказал результат М. Ф. Субботина, относящийся к (12), другим методом и несколько обобщил его теорему. Однако к тому времени, когда в СССР начали появляться новые работы, посвященные обобщению теоремы Поля (50-е годы), статьи М. Ф. Субботина и В. Бернштейна были забыты. В 1955 г. И. Ф. Лохин снова до-

казал теорему Субботина, используя его статью 1916 г. В этом же, 1955, году А. Е. Аветисян также пришел к результату, равносильному теореме Субботина для случая $\rho \geq \frac{1}{2}$, $\mu = 1$. Метод Аветисяна, использовавшего некоторые интегральные преобразования М. М. Джрбашяна (1952 г.), близок к методу В. Бернштейна. В монографии Джрбашяна «Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области» (1966 г.) мы находим теорему Субботина (кроме последнего утверждения) для случая $0 < \rho < \infty$ и $\operatorname{Re} \mu > 0$. На самом деле М. Ф. Субботин, а также В. Бернштейн и И. Ф. Лохин ассоциировали с $F(z)$ функцию $\varphi(z) = z^{-1} f(z^{-1})$ и вместо $k(\theta)$ использовали $K(\theta) = [k(\theta)]^{-1}$. Хотя $K(\theta)$ и $k(\theta)$ связаны простым соотношением, предпочтительнее использовать функцию $k(\theta)$, которую ввели Аветисян и Джрбашян, поскольку, как показали они, $k(\theta)$ можно геометрически интерпретировать как некую ρ -опорную функцию специальным образом определенной ρ -выпуклой оболочки множества M . В такой форме теорема при $\rho = \mu = 1$ непосредственно переходит в теорему Поля.

Используя теорему Субботина, Лохин исследовал (1963 г.) целые функции, представимые степенным рядом $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ с максимальной плотностью коэффициентов

$$\Delta = \lim_{t \rightarrow 1-0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n) - A(nt)}{n - nt},$$

где $A(n)$ — число отличных от нуля коэффициентов среди $a_0, a_1, \dots, a_n$. Он показал, что для целой функции порядка ρ нормального типа σ

выполняется неравенство

$$\rho\Delta \geq \arccos\left(\frac{m}{\sigma}\right), \quad m = \min_{|\theta| \leq \pi} |h(\theta)|^+.$$

При $\rho < \frac{1}{2}$ отсюда следует

$$\frac{m}{\sigma} \geq \cos(\rho\Delta),$$

т. е. усиление известной теоремы Вимана (1915 г.).

Поведение функций, голоморфных внутри угла $\alpha < \arg z < \beta$, во многом аналогично поведению целых функций. Не нарушая общности, можем считать, что рассматриваемый угол есть полуплоскость $\Pi = (0 \leq \arg z \leq \pi)$, так как общий случай сводится к этому частному. Порядок функции, голоморфной в полуплоскости Π , определяется по-разному. Титчмарш называет порядком функции $f(z)$, голоморфной в Π , точную нижнюю грань чисел ν , для которых равномерно относительно θ , $0 < \theta < \pi$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\overline{\ln |f(re^{i\theta})|}}{r^\nu} = 0. \quad (13)$$

В 1965 г. Н. В. Говоров ввел более удобное для приложений определение порядка. Если при некотором $\mu > 0$ справедлива асимптотическая оценка

$$\sup_{\alpha < \theta < \beta} |f(re^{i\theta})| < \exp r^\mu,$$

то порядком функции $f(z)$ он называет точную нижнюю грань чисел ν , для которых выполнено равенство (13) (равномерность по θ не требуется). Говоров доказал нетривиальный факт эквивалентности этих двух определений порядка. Заметим, что введенный таким образом порядок характеризует не только рост функции $f(z)$, но и возможную быстроту ее убывания. Для целых функций этот порядок совпадает с порядком, определяемым с помощью $M(r, f)$.

Так же как и для целых функций, можно определить индикатор функции, голоморфной в Π , соотношением (8), где $\rho(r)$ — некоторый уточненный порядок. Для функций конечного порядка в Π индикатор, как и в случае целых функций, тригонометрически выпуклый. При $\rho \rightarrow 0$ соотношение (9) переходит в неравенство, определяющее обычную выпуклость. Исследуя функции нулевого порядка в Π , А. Ф. Гришин показал (1965 г.), что если индикатор $h(\theta)$ такой функции по отношению к некоторому $\rho(r) \rightarrow 0$ отличен от тождественного нуля и не обращается в бесконечность, то он является выпуклой функцией θ . Кроме того, для любой выпуклой на $[0, \pi]$ функции $h(\theta)$ можно построить функцию, голоморфную и нулевого порядка в Π , с индикатором $h(\theta)$.



К. И. Бабенко.

Для более подробной характеристики роста целой функции уточненного порядка $\rho(r)$ можно ввести величину

$$h_{f,r}(\theta) = r^{-\rho(r)} \ln |f(re^{i\theta})|.$$

Б. Я. Левин установил (1937 г.) следующую теорему, относящуюся к свойствам этой величины. Заданным положительным числам η и ε можно сопоставить такое $\delta > 0$, что при $|k| < \delta$

$$|h_{f,r}(\theta + k) - h_{f,r}(\theta)| < \varepsilon$$

для всех значений r , не принадлежащих некоторому исключительному множеству E_η , причем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \text{mes} \{E \cap (0, r)\} < \eta.$$

Эта теорема «о равностепенной непрерывности» переносится также на функции, голоморфные в Π .

Отметим также относящиеся к рассматриваемому вопросу работы И. Ф. Красичкова-Терновского (1965, 1966 гг.), в которых оценен модуль непрерывности величины $h_{f,r}(\theta)$ при условии, что точка $re^{i\theta}$ лежит «далеко» от корней функции $f(z)$.

Вопрос о связи роста целой функции во всей плоскости с быстротой ее убывания внутри угла изучал в 1966 г. Н. У. Аракелян. Им построены целые функции, не равные тождественно нулю, а также имеющие минимальный рост во всей плоскости и предельно быстрое убывание внутри заданного угла. Его результат формулируется так. Пусть функция $p(r) > 0$ ($1 \leq r < \infty$) удовлетворяет при некотором $\alpha \in (0, 2\pi)$ условиям

$$r^{-\frac{\pi}{\alpha}} p(r) \downarrow 0 \text{ при } r \uparrow \infty, K = \int_1^\infty r^{-\frac{\pi}{\alpha}-1} p(r) dr < \infty.$$

Существует целая функция $f(z)$ порядка

$$\rho = \max\left(\frac{\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{2\pi - \alpha}\right) \quad (14)$$

и нормального типа, все нули которой лежат вне угла $|\arg z| \leq \frac{\alpha}{2}$ и которая удовлетворяет неравенствам ($K_1 > K$)

$$e^{-K_1|z|\pi/\alpha} < |f(z)| < e^{-[\operatorname{Re} z \pi/\alpha + p(|z|)]}, \quad (15)$$

$$|\arg z| \leq \frac{\alpha}{2}, \quad |z| \geq 1.$$

Заметим, что всякая целая функция, удовлетворяющая правому неравенству (15) и имеющая рост не выше минимального типа порядка (14), обязательно должна тождественно равняться нулю.

И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым была поставлена (1955 г.) следующая задача. Каким условиям должна удовлетворять система чисел M_{pq} ($p, q = 0, 1, \dots$) для того, чтобы существовала нетривиальная бес-

конечно дифференцируемая функция $\varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$, удовлетворяющая системе неравенств

$$|x^q \varphi^{(p)}(x)| \leq CM_{pq} A^p B^q, \quad (16)$$

где A, B, C — некоторые положительные постоянные? Если при фиксированном q последовательность M_{pq} не очень быстро возрастает, то из системы (16) вытекает, что $\varphi(x)$ — целая функция с ограничением на рост и вопрос сводится к следующему: как быстро она может убывать вдоль вещественной оси.

К. И. Бабенко исследовал (1956 г.) случай $M_{pq} = a_p b_q$. В этом случае пространство функций, удовлетворяющих неравенствам (16), обозначается $S_{a_k}^{b_k}$. Если положить

$$L(x) = \sup_q (|x|^q / b_q),$$

то из неравенств (16) следует, что при достаточно медленно возрастающей последовательности $\{a_p\}$ функция $\varphi(x)$ целая и удовлетворяет оценке

$$|\varphi(x + iy)| \leq \frac{C}{L(x/B)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p}{p!} |y|^p A^p.$$

Таким образом, этот вопрос частично сводится к вопросу о нетривиальности соответствующего класса целых функций. Бабенко нашел при некоторых ограничениях на рост функции $L(x)$ достаточные и близкие к ним необходимые условия нетривиальности класса $S_{a_k}^{b_k}$.

Г. Е. Шилов исследовал (1955 г.) задачу в случае $a_p = p^{p\beta}$, $b_q = q^{q\alpha}$ при $0 < \alpha, \beta < 1$ (класс $S_{\alpha A}^{\beta B}$). Он показал, что в этом случае задача эквивалентна задаче о нетривиальности класса целых функций, удовлетворяющих во всей плоскости неравенству

$$|\varphi(x + iy)| \leq C \exp(-a|x|^{\frac{1}{\alpha}} + b|y|^{\frac{1}{1-\beta}}),$$

в котором a и b зависят от A, B, α, β , и что если $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ и $\alpha + \beta < 1$, то класс $S_{\alpha A}^{\beta B}$ тривиален при любых $A > 0$ и $B > 0$, а если $\alpha + \beta = 1$ — нетривиален при некоторых A и B .

Теория классов $S_{\alpha A}^{\beta B}$ подробно изложена в монографии И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова «Обобщенные функции. II. Пространства основных и обобщенных функций» (1958 г.).

М. М. Джрбашян доказал (1957 г.), что если целая функция $\varphi(z)$ удовлетворяет при $|z| < \infty$ неравенству

$$|\varphi(x + iy)| \leq C \exp[l(|y|) - m(|z|)],$$

где

$$xl'(x) \uparrow \infty, \quad xm'(x) \uparrow \infty,$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{l(R)}{R} - \frac{2}{\pi} \int_1^R \frac{m(t)}{t^2} dt \right) = -\infty,$$

то $\varphi(z) \equiv 0$.

К. И. Бабенко показал (1960 г.), что если при некотором $k > 0$

$$\int_1^R \frac{m(t)}{t^2} dt = o(R^k) \quad (17)$$

и при каком-нибудь $\theta < 1$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{l(\theta R)}{R} - \int_1^R \frac{m(t)}{t^2} dt \right) > -\infty,$$

то существует нетривиальная целая функция, удовлетворяющая неравенству

$$|\varphi(x + iy)| \leq C \exp [l(|ay|) - m(|bz|)],$$

где a и b — некоторые числа. Последние две теоремы полностью решают вопрос о нетривиальности класса $S_{a_k}^{b_k}$ при дополнительном условии (17), в котором

$$m(t) = \sup_p (|t|^p / a_p).$$

Нового рода характеристика роста мероморфных функций, нашедших важное применение в проблеме факторизации, была введена М. М. Джрбашяном в его монографии «Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области»³. Джрбашян вывел формулу, являющуюся существенным обобщением формулы Иенсена — Неванлинны и совпадающую с ней при нулевом значении соответствующего параметра. Эта формула приводит к новому, более общему понятию α -характеристической функции — $T_\alpha(r)$, которая совпадает с $T(r)$ Неванлинны при $\alpha = 0$.

Для любого α ($-1 < \alpha < +\infty$) и при любом ρ ($0 < \rho < R \leq +\infty$) с точностью до слагаемого вида $2\pi i m$

$$\begin{aligned} \log F(z) &= i \arg C_\lambda + \lambda K_\alpha + \lambda \log \frac{z}{\rho} + \\ &+ \sum_{|a_\mu| \leq \rho} \log A_\alpha \left(\frac{z}{\rho}, \frac{a_\mu}{\rho} \right) - \sum_{|b_\nu| \leq \rho} \log A_\alpha \left(\frac{z}{\rho}, \frac{b_\nu}{\rho} \right) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\alpha \left(e^{-i\theta} \frac{z}{\rho} \right) \{ \rho^{-\alpha} D^{-\alpha} \log |F(\rho e^{i\theta})| \} d\theta \quad (|z| < \rho), \end{aligned}$$

где $F(z)$ — мероморфная в области $|z| < R \leq +\infty$ функция, $\{a_\mu\}$ и $\{b_\nu\}$ — последовательности соответственно ее нулей и полюсов, отличных от $z = 0$ и пронумерованных в порядке неубывания их модулей (при условии, что каждый нуль или полюс записывается столько раз, сколько показывает его кратность), $|\lambda|$ — кратность нуля или полюса

³ Эти и некоторые другие сведения (стр. 102—104) о работах М. М. Джрбашяна принадлежат А. Н. Боголюбову.

функции $F(z)$ в точке $z = 0$, $C_\lambda = [z^{-\lambda} F(z)]_{z=0}$, $D^{-\alpha} f(\rho)$ — оператор Римана — Лиувилля при произвольном значении параметра α ($-1 < \alpha < +\infty$) для функций

$$f(\rho) \in L(0, l) \quad (0 < l \leq +\infty),$$

$$S_\alpha(z) = \Gamma(1 + \alpha) \left\{ \frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1 \right\},$$

$$K_\alpha = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)}, \quad A_\alpha(z, \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \exp\{-W_\alpha(z, \zeta)\},$$

$$W_\alpha(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\theta} z) V_\alpha(e^{i\theta}, \zeta) d\theta,$$

$$V_\alpha(\rho e^{i\theta}, \zeta) = \rho^{-\alpha} D^{-\alpha} \log \left| 1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta} \right| \quad (\zeta \neq 0).$$

Эта формула естественно приводит к обобщенному равенству

$$T_\alpha(r) = M_\alpha(r) + N_\alpha(r),$$

где слагаемые суть своеобразные аналоги неванлинновых функций $M(r)$ и $N(r)$. Класс N_α определяется как множество мероморфных в круге $|z| < 1$ функций $F(z)$, для которых при данном α ($-1 < \alpha < +\infty$) $\sup_{0 < \rho < 1} T_\alpha(\rho, F) < +\infty$. В исследованиях Джрбашяна этот

класс получил полное параметрическое представление. А именно было установлено, что класс N_α ($-1 < \alpha < +\infty$) совпадает с множеством функций, которые допускают представление вида

$$F(z) = e^{i\gamma + \lambda K_{\alpha, \lambda}} \frac{B_\alpha(z; a_\mu)}{B_\alpha(z; b_\nu)} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\theta} z) d\psi(\theta) \right\} (|z| < 1),$$

где

$$B_\alpha(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{-W_\alpha(z, z_k)}$$

представляет собой сходящееся произведение, $\psi(\theta)$ — произвольную действительную функцию на $[0, 2\pi]$ с конечным полным изменением, λ — любое целое и γ — любое действительное число. Таким образом, была решена проблема факторизации мероморфных в круге $|z| < 1$ функций для классов N_α как более узких (при $-1 < \alpha < 0$), так и существенно более широких (при $0 < \alpha < +\infty$), чем класс N Р. Неванлинны. При $\alpha = 0$ здесь содержится и известная теорема Р. Неванлинны о факторизации класса функций ограниченного вида N , лежащая в основе теории классов аналитических функций в круге $|z| < 1$.

2

Связь между распределением корней целой функции и ее ростом

Одной из важнейших проблем теории целых функций является проблема связи между ростом целой функции и распределением ее корней, к которой сводятся многие задачи в различных областях, смежных с теорией функций комплексного переменного. Эта проблема исследована в классических работах Бореля, Адамара, Линделефа и других математиков в конце XIX и начале XX в. В частности, установлена связь между ростом функции $\ln M(r, f)$ и ростом функции $n(r)$ — числом корней функции $f(z)$ в круге $|z| \leq r$.

Функция $n(r)$ характеризует распределение корней по модулям, их аргументы не учитываются. Известно, что показатель сходимости корней

$$\rho_1 = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\overline{\ln n(r)}}{\ln r}$$

целой функции не превосходит ее порядка ρ . Этот результат обобщен и в некотором смысле усилен в 1934 г. А. О. Гельфондом.

Пусть $f(z) = u(z) + iv(z)$ — целая функция. Обозначим: $Y(r)$ — число корней функции $u(z)$ на окружности $|z| = r$, $Z(r)$ — число ее перемен знака на этой окружности. Очевидно, что $Y(r) \geq Z(r)$. Из принципа аргумента следует, что $Z(r) \geq \frac{1}{2} n(r)$, поэтому

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\overline{\ln Y(r)}}{\ln r} \geq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\overline{\ln Z(r)}}{\ln r} \geq \rho_1.$$

А. О. Гельфонд доказал, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\overline{\ln Y(r)}}{\ln r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\overline{\ln Z(r)}}{\ln r} = \rho.$$

Введение индикатора целой функции дало возможность установить зависимости между ее ростом по различным направлениям и распределением ее корней по аргументам. Особенно точные зависимости установлены для специального класса — целых функций вполне регулярного роста. Теорию этих функций развили в 1937—1950 гг. одновременно Б. Я. Левин и А. Пфлюгер. Теория целых функций вполне регулярного роста и ее применения подробно изложены в монографии Б. Я. Левина «Распределение корней целых функций» (1956 г.). Приведем основные результаты этой теории.

Целая функция $f(z)$ уточненного порядка $\rho(r)$ называется функцией вполне регулярного роста (в. р. р.), если для любого θ , $0 \leq \theta < 2\pi$, существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} \quad (18)$$

при условии, что r стремится к бесконечности, принимая все положительные значения, за исключением, может быть, некоторого множества E_θ нулевой относительной меры, т. е. такого, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \text{mes} \{E_\theta \cap (0, r)\} = 0.$$

C_0 -множеством называется множество кружков c_j на комплексной плоскости, удовлетворяющее условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{r} \sum^r r_j \right\} = 0,$$

где r_j — радиус кружка c_j , а символ $\sum^r$ означает суммирование по всем кружкам, центры которых попали в круг $|z| \leq r$.

Для описания расположения корней целой функции вводится понятие угловой плотности, которое характеризует распределение не только модулей, но и аргументов корней. Множество $\mathfrak{N}$ точек комплексной плоскости имеет угловую плотность с показателем $\rho(r)$, если для всех значений ϑ и θ , $0 \leq \vartheta < \theta \leq 2\pi$, за исключением, может быть, счетного множества, существует предел

$$\Delta(\vartheta, \theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \vartheta, \theta)}{r^{\rho(r)}},$$

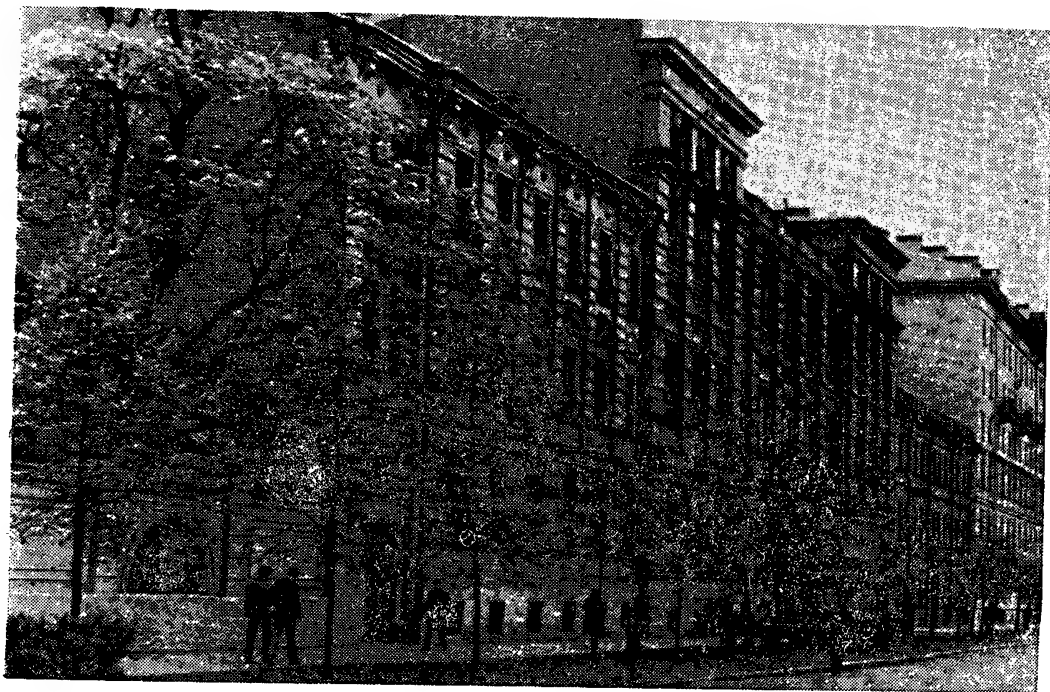
где $n(r, \vartheta, \theta)$ — число точек множества $\mathfrak{N}$ в секторе $|z| \leq r$, $\vartheta \leq \arg z \leq \theta$. Множество $\mathfrak{N}$ называется правильно распределенным при показателе $\rho(r) \rightarrow \rho$, где ρ — нецелое, если оно имеет угловую плотность. При целом ρ в определении правильно распределенного множества требуется дополнительно, чтобы при некоторой постоянной $C_{\mathfrak{N}}$ существовал предел

$$\delta_f = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{L(r)} \left\{ C_{\mathfrak{N}} + \frac{1}{\rho} \sum_{|a_n| \leq r} a_n^{-\rho} \right\} \quad (19)$$

$$(a_n \in \mathfrak{N}, \quad L(r) = r^{\rho(r)-\rho}).$$

Основным результатом теории функций в. р. р. является установление связи между полной регулярностью роста целой функции и правильностью распределения ее корней. Если целая функция уточненного порядка $\rho(r)$ имеет в. р. р., то множество ее корней правильно распределено при показателе $\rho(r)$. Верно и обратное: если множество корней целой функции уточненного порядка $\rho(r)$ правильно распределено при показателе $\rho(r)$, то эта функция имеет в. р. р. При этом в случае целого порядка нужно дополнительно предположить, что постоянная $C_{\mathfrak{N}}$ в условии (19) совпадает с постоянной α_ρ в каноническом представлении функции $f(z)$ по Адамару

$$f(z) = z^m e^{\alpha_\rho z^\rho + \alpha_{\rho-1} z^{\rho-1} + \dots + \alpha_0} \prod_n \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{\frac{z}{a_n} + \dots + \frac{z^\rho}{\rho a_n^\rho}}.$$



Математико-механический факультет Ленинградского государственного университета им. А. А. Жданова.

Справедливы следующие формулы, связывающие индикатор функции в. р. р. с угловой плотностью ее корней: при целом ρ

$$h(\theta) = \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \int_{\theta-2\pi+0}^{\theta} \cos \rho(\theta - \psi - \pi) d\Delta(\psi), \quad (20)$$

при целом ρ

$$h(\theta) = \int_{\theta-2\pi+0}^{\theta} (\theta - \psi) \sin \rho(\psi - \theta) d\Delta(\psi) + \tau_f \cos \rho(\theta - \theta_f).$$

Здесь функция $\Delta(\psi)$ определена, с точностью до аддитивной постоянной, равенством

$$\Delta(\psi_2) - \Delta(\psi_1) = \Delta(\psi_1, \psi_2), \\ 0 \leq \psi_2 - \psi_1 \leq 2\pi,$$

а

$$\tau_f e^{i\theta_f} = \delta_f,$$

где δ_f определяется соотношением (19). Из этих формул вытекает, что

$$\Delta(\psi) = s(\psi) + \text{const},$$

где $s(\psi)$ — неубывающая функция из представления индикатора формулами (10), (11).

Определение полной регулярности роста накладывает ограничение лишь на величину $\ln |f(z)|$. Оказывается, что для функций в. р. р. регулярно растет и $\arg f(z)$. Более того, вне некоторого C_0 -множества справедливо асимптотическое равенство

$$\ln f(re^{i\theta}) \sim J(\theta) r^{\rho(r)}, \quad (21)$$

в котором

$$J(\theta) = \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \int_{\theta-2\pi+0}^{\theta} e^{i\rho(\theta-\psi-\pi)} d\Delta(\psi)$$

при нецелом ρ и

$$J(\theta) = -i \int_{\theta-2\pi+0}^{\theta} e^{i\rho(\theta-\psi)} (\theta-\psi) d\Delta(\psi) + Ae^{i\rho(\theta-\theta_0)}$$

при целом ρ .

В приложениях часто используется следующий факт: индикатор произведения двух целых функций, из которых хотя бы одна имеет в. р. р., равен сумме индикаторов сомножителей. В 1966 г. В. С. Азарин доказал, что это свойство является характеристическим для целых функций в. р. р.: если целая функция $f(z)$ уточненного порядка $\rho(r)$ такова, что при ее умножении на произвольную целую функцию того же уточненного порядка индикатор произведения равен сумме индикаторов сомножителей, то $f(z)$ имеет в. р. р.

В работах В. С. Азарина (1961, 1962 гг.) теория целых функций в. р. р. обобщена на субгармонические функции в n -мерном пространстве. Порядок и тип субгармонических функций определяются естественным образом. Индикатор субгармонической функции $u(r\vec{x})$ ($\vec{x}$ — единичный вектор, $r > 0$) при уточненном порядке $\rho(r)$ определяется равенством

$$h(\vec{x}) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{u(r\vec{x})}{r^{\rho(r)}}.$$

C_0 -множество для n -мерного случая определяется аналогично плоскому случаю, как множество таких гипершаров, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^{n-1}} \sum^R r_j^{n-1} = 0.$$

Функция $u(r, \vec{x})$ называется функцией в. р. р., если равномерно по $\vec{x}$ существует

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u(r\vec{x})}{r^{\rho(r)}}$$

при условии, что конец вектора $r\vec{x}$ лежит вне некоторого C_0 -множества. Роль корней играют массы $\mu(G)$, фигурирующие в представлении функции $u(r\vec{x})$ по Риссу. Угловая плотность определяется как функция области U на единичной сфере равенством

$$\Delta(U) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\mu(K_R)}{R^{\rho(R)+n-2}},$$

где

$$K_R = \{\vec{r}x: \vec{x} \in U, \quad 0 \leq r \leq R\}.$$

При нецелом ρ массы называются правильно распределенными, если указанный предел существует для всех U , для которых $\mu(\partial U) = 0$. При целом ρ требуется дополнительно выполнение условия, аналогичного условию (19). В. С. Азарин показал, что полная регулярность роста субгармонической функции эквивалентна правильному распределению ее масс. Кроме того, он получил представление

$$\overline{\lim}_{\vec{y} \rightarrow \vec{x}} h(\vec{y}) = \tilde{h}(\vec{x}) = \int_{|\vec{\xi}|=1} \Phi(\vec{x}, \vec{\xi}) dm_{\vec{\xi}} + Y(\vec{x}), \quad (22)$$

в котором $Y(\vec{x})$ — некоторая сферическая функция (при нецелом ρ она отсутствует),

$$m_{\vec{\xi}}(U) = \frac{1}{(n-2)(\rho+n-2) \text{mes}\{|\vec{\xi}|=1\}} \Delta(U),$$

а функция $\Phi(\vec{x}, \vec{\xi})$ является фундаментальным решением уравнения

$$L\Phi + \rho(\rho+n-2)\Phi = 0,$$

где L — сферическая часть оператора Лапласа. Азарин доказал также, что «регуляризованный» индикатор $\tilde{h}(\vec{x})$ произвольной субгармонической функции представляется в форме (22), где $m_{\vec{\xi}}(U)$ — некоторое распределение масс на единичной сфере.

Определени функций в. р. р. естественным образом переносится на голоморфные конечного порядка внутри угла $\alpha < \arg z < \beta$ функции. Если предел (18) существует равномерно по θ при $\alpha \leq \theta \leq \beta$, то функция называется функцией в. р. р. в замкнутом угле. Функция называется функцией в. р. р. в открытом угле $\alpha < \arg z < \beta$, если она в. р. р. во всяком внутреннем замкнутом угле и, кроме того, асимптотически

$$\ln \sup_{\alpha < \theta < \beta} |f(re^{i\theta})| \leq Kr^\rho.$$

Не нарушая общности, можно считать, что угол $\alpha < \arg z < \beta$ совпадает с полуплоскостью $\text{Im } z > 0$. Как показали Б. Я. Левин и А. Пфлюгер, для функций в. р. р. в открытом угле множество корней имеет угловую плотность $\Delta(\vartheta, \theta)$ для всех ϑ и θ в угле, за исключением, может быть, счетного множества. Обратное утверждение в этом случае не имеет места.

Н. В. Говоров получил (1965 г.) необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция $f(z)$ конечного порядка и нормального типа в полуплоскости была функцией в. р. р. В теоремах Говорова учитывается не только распределение корней функции, но и ее поведение на границе. Точнее, учитываются не только массы, попавшие в полуплоскость $\text{Im } z > 0$ в представлении субгармонической функции $\ln|f(z)|$ с помощью потенциалов, но и массы, попавшие на границу.

Вместо функции $n(r, \vartheta, \theta)$ Говоров вводит функцию

$$c(r, \vartheta, \theta) = \sum_{\substack{1 \leq r_k \leq r \\ \vartheta \leq \theta_k \leq \theta}} \sin \theta_k,$$

где $r_k e^{i\theta_k}$ — корни функции $f(z)$. Для учета граничных значений рассматриваются функция

$$\sigma(t) = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_0^t \ln |f(x + iy)| dx$$

(которая имеет локально ограниченную вариацию) и функция

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{d\sigma(x)}{1 + |x|}.$$

Наконец, вводится функция

$$a(r, \theta) = \begin{cases} c(r, 0, \theta) - \tau(r), & 0 \leq \theta < \pi, \\ c(r, 0, \pi) - \tau(r) + \tau(-r), & \theta = \pi. \end{cases}$$

Будем говорить, что множество нулей функции $f(z)$ порядка ρ имеет аргументно-граничную плотность, если для всех θ , $0 \leq \theta \leq \pi$, исключая не более чем счетное множество, не содержащее точек 0 и π , существует предел $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{a(r, \theta)}{r^\rho}$. Н. В. Говоров доказал, что в случае нецелого ρ в. р. р. в открытой полуплоскости эквивалентен существованию аргументно-граничной плотности. Для в. р. р. в замкнутой полуплоскости необходимо и достаточно, чтобы аргументно-граничная плотность существовала и была непрерывна в точках 0 и π , а также выполнялись условия:

$$\lim_{r \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{r^\rho} \int_0^r \frac{d\varphi(x)}{1 + |x|},$$

где $\varphi(x)$ — сингулярная часть функции $\sigma(x)$, т. е.

$$\varphi(x) = \sigma(x) - \int_0^x \ln |f(t)| dt;$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\tau(r)}{r^\rho} = \frac{1}{2\pi} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(r)|}{r^\rho};$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\tau(-r)}{r^\rho} = \frac{1}{2\pi} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(-r)|}{r^\rho}.$$

Для функций целого порядка и нормального типа в полуплоскости Говоровым также получены необходимые и достаточные условия в. р. р. в открытой и замкнутой полуплоскостях. Кроме того, при произвольном ρ дано выражение индикатора функции в. р. р. через аргументно-граничную плотность.

В приложениях теории целых функций существенную роль играют целые функции, удовлетворяющие условию

$$\sum_k \left| \operatorname{Im} \frac{1}{a_k} \right| < \infty,$$



Б. Я. Левин.

где a_k — корни функции. Эти функции являются естественным обобщением целых функций, у которых все корни вещественны. Они называются целыми функциями класса A . Аналогично определяются функции класса A , голоморфные в полуплоскости $\text{Im } z > 0$. При изучении свойств целых функций экспоненциального типа, зависящих от поведения функции на вещественной оси, существенное значение имеет интеграл

$$I(R) = \int_0^R \frac{\ln |f(x)f(-x)|}{1+x^2} dx.$$

В 1948 г. Н. И. Ахиезер показал, что для целой функции экспоненциального типа ограниченность этого интеграла эквивалентна принадлежности этой функции к классу A . Пфлюгер в 1944 г. установил, что несколько более жесткие условия относительно поведения на вещественной оси целой функции $f(z)$ экспоненциального типа, а именно: а) существование интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\ln |f(x)f(-x)|}{1+x^2} dx,$$

б) равенство $h(0) + h(\pi) = 0$, эквивалентны тому, что $f(z)$ принадлежит к классу A и имеет в. р. р.

В 1950 г. Б. Я. Левин установил, что условия а) и б) достаточны для того, чтобы функция голоморфная и экспоненциального типа в полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$ принадлежала к классу A и имела в. р. р. в открытой полуплоскости. Необходимые и достаточные условия, как показал Н. В. Говоров, состоят в выполнении условия а) и существовании пределов

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_1^r \frac{\ln |f(x)|}{x} dx,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_{-1}^{-r} \frac{\ln |f(x)|}{x} dx.$$

Кроме того, Говоров доказал, что, для того чтобы функция $f(z)$ принадлежала к классу A и имела в. р. р. в замкнутой полуплоскости, необходимо и достаточно выполнение условий а) и б) Пфлюгера.

Другим достаточным условием для того, чтобы функция голоморфная и экспоненциального типа в полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$ принадле-

лежала к классу A и имела в р. р. в открытой полуплоскости, является, как показал (1950 г.) Б. Я. Левин, существование интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln |f(x)|}{1+x^2} dx. \quad (23)$$

Результат Б. Я. Левина несколько усиливает более ранний результат М. Картрайт (1934 г.) и Н. Левинсона (1940 г.), которые доказали аналогичный факт для целых функций экспоненциального типа, требуя при этом, чтобы интеграл (23) сходиллся абсолютно или, что эквивалентно, чтобы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+ |f(x)|}{1+x^2} dx < \infty.$$

Из этого утверждения следует, в частности, что если функция голоморфная и экспоненциального типа в полуплоскости ограничена на вещественной оси или принадлежит $L^p(-\infty, +\infty)$, то она принадлежит классу A и имеет в. р. р.

Следующий подкласс целых функций класса A ввел в 1947 г. М. Г. Крейн при построении теории целых операторов в гильбертовом пространстве. Он рассматривает целые функции $f(z)$, допускающие разложение вида

$$\frac{1}{f(z)} = R(z) + \sum_k \frac{1}{f'(a_k)} \left[\frac{1}{z-a_k} + \frac{1}{a_k} + \dots + \frac{z^{p-1}}{a_k^p} \right], \quad (24)$$

где $R(z)$ — некоторый многочлен и

$$\sum_k |a_k|^{-p-1} |f'(a_k)|^{-1} < \infty.$$

Крейн показал, что если целая функция класса A допускает такое разложение, то она является функцией экспоненциального типа и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln |f(x)||}{1+x^2} dx < \infty. \quad (25)$$

Он показал, что эти утверждения справедливы также, если вместо существования разложения (24) потребовать, чтобы функция $\ln^+ |f(z)|$ имела гармоническую мажоранту в каждой из полуплоскостей $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Im} z < 0$.

В связи с исследованиями по теории вполне непрерывных несамосопряженных операторов В. И. Мацаев рассматривал (1960 г.) другой класс функций с вещественными корнями и установил, что из некоторых оценок снизу модуля целой функции следует оценка ее роста. Рассмотрим некоторые из его результатов.

Если целая функция $f(z)$ допускает оценку снизу

$$|f(z)| \geq \exp(-cr^\alpha |\operatorname{cosec} \varphi|^k), \quad \alpha > 1, \quad c > 0, \\ k > 0, \quad z = re^{i\varphi},$$

то $f(z)$ имеет рост не выше нормального типа порядка α . Этот результат обобщается и на случай уточненного порядка. Если же $0 < \alpha < 1$ и всюду выполняется неравенство

$$|f(z)| \geq \exp(-c|r \cos \varphi|^\alpha),$$

то $f(z)$ — экспоненциального типа и интеграл (25) сходится. Последняя теорема является обобщением теоремы М. Г. Крейна при условии, что $f(z)$ имеет лишь вещественные корни.

Представляется важным следующий вопрос: определить условия, которым должны удовлетворять корни целой функции экспоненциального типа для того, чтобы она была ограничена в том или ином смысле на вещественной оси. К теоремам такого типа относится следующий результат В. И. Мацаева (1966 г.).

Пусть функция $f(z)$ представима произведением

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{a_k^2}\right), \quad a_k > 0,$$

и $n(t)$ — число точек a_k в интервале $(0, t)$. Если существуют число $a \geq 0$ и монотонно растущая функция $\psi(t)$ такие, что

$$|n(t) - at| \leq \psi(t), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) t^{-2} dt < \infty,$$

то $f(z)$ — функция не выше экспоненциального типа и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln |f(t)|}{1+t^2} dt < \infty.$$

В 1949 г. Б. Я. Левин доказал следующую теорему: для того чтобы целая функция экспоненциального типа $\sigma > 0$, все корни которой принадлежат полосе $|\operatorname{Im} z| < L$, удовлетворяла при некотором $a > L$ условию $|\ln f(x \pm ia)| e^{-i \frac{\pi}{\sigma} x} \leq M$, необходимо и достаточно, чтобы ее корни имели вид

$$a_k = \frac{\pi}{\sigma} k + (-1)^k \varphi(k), \quad (26)$$

где $\varphi(z)$ — целая функция экспоненциального типа не больше π , ограниченная на вещественной оси. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы целая функция с корнями в полосе $|\operatorname{Im} z| < L$ удовлетворяла при каком-нибудь $a > L$ неравенствам

$$0 < m_a \leq |f(x \pm ia)| \leq M_a < \infty,$$

выражаются слишком громоздко, и поэтому мы их не приводим.

Ряд исследований посвящен изучению целых функций, все корни которых лежат на некотором луче или вблизи луча. В 1927 г. В. Л. Гон-

чаров показал, что для любой функции $\omega(r) \uparrow \infty$, удовлетворяющей условию $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\omega(r)}{\ln r} = \infty$, можно построить целую функцию $f(z)$ с $n(r) < \omega(r)$ и положительными корнями, которая нерегулярно растет в том смысле, что для любого α , $|\alpha| < \frac{\pi}{3}$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |f(re^{i\alpha})| = 0, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} |f(re^{i\alpha})| = \infty.$$

В 1961 г. И. В. Островский получил следующий общий результат. Если корни целой функции $f(z)$ лежат на одном луче $\arg z = \alpha$ и

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^{-p} \ln M(r, f) = \infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-p - \frac{1}{2}} \ln M(r, f) = 0, \quad (27)$$

где p — целое число, то $f(z)$ не может быть ограниченной на этом луче. Условия (27) выполняются, в частности, при $p < \rho < p + \frac{1}{2}$.

Выше указывалось, что из регулярности роста целой функции следует правильность распределения ее корней. Если же известно, что корни лежат на одном луче, то иногда можно сделать заключение о правильности распределения корней на основании регулярности роста целой функции только по одному лучу. Титчмарш получил следующий результат. Если все корни целой функции конечного нецелого порядка ρ отрицательны и $\ln f(x) \sim x^\rho \pi \operatorname{cosec} \pi \rho$, то $n(r) \sim r^\rho$. Эта теорема развита (1964 г.) М. А. Субханкуловым, М. Тяном и Б. Толбаевым. С помощью специальных тауберовых теорем, установленных Субханкуловым, они доказали следующее.

Пусть корни канонического произведения нецелого порядка ρ лежат в области $|y| \leq c|x|^\gamma$, $x < 0$, $c > 0$, $0 < \gamma < 1$, и при $x \rightarrow +\infty$

$$\ln f(x) = \frac{H\pi}{\sin \pi \rho} x^\rho \{1 + O(r(x))\}.$$

Тогда, если

$$r(x) = \exp(-c_1 x^\alpha), \quad c_1 > 0, \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{2},$$

справедливо равенство

$$n(r) = Hr^\rho + l + O(r^{\rho-\alpha}).$$

Если же

$$r(x) = x^{-\omega}, \quad \omega > 0,$$

то

$$n(r) = Hr^\rho \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln r}\right) \right].$$

Если корни целой функции $f(z)$ конечного порядка расположены на одном луче, но не имеют плотности, то функция $f(z)$ не имеет в. р. р. и нельзя дать точную формулу для индикатора. Естественно возникает

задача об оценке индикатора через верхнюю плотность множества корней. Первый шаг в этом направлении сделан (1956 г.) Б. Я. Левиным, получившим точную оценку для индикатора целой функции порядка $\rho = \frac{1}{2}$ с положительными нулями и данной верхней плотностью и показавшим, что экстремальный индикатор достигается на некоторой целой функции сразу для всех направлений $0 \leq \varphi < 2\pi$. М. И. Андрашко обобщила (1960 г.) этот результат на целые функции, имеющие положительные корни и порядок $0 < \rho < 1$. Н. В. Говоров получил (1962 г.) аналогичную оценку при условии, что задана не только верхняя, но и нижняя плотность корней. А. Ф. Леонтьев получил (1956 г.) для целой функции $f(z)$ порядка $\rho = \frac{1}{2}$ с положительными нулями асимптотическую (при $\varphi \rightarrow 0$) оценку индикатора $h\left(\varphi, \frac{1}{f}\right)$ функции $\frac{1}{f(z)}$ через верхнюю плотность корней $f(z)$. И. Ф. Красичков-Терновский установил (1965 г.) необходимые и достаточные условия для того, чтобы $h\left(\varphi, \frac{1}{f}\right) = O(1)$ при $\varphi \rightarrow 0$. А. А. Гольдберг распространил (1962 г.) эти результаты на целые функции произвольного уточненного порядка с корнями на одном луче. Кроме того, он ввел понятие нижнего индикатора (который определяется так же, как индикатор, но верхний предел заменяется нижним, а из конечной плоскости предварительно исключается множество кружков нулевой линейной плотности) и получил точную оценку индикатора и нижнего индикатора через верхнюю и нижнюю плотности корней, лежащих на луче. В случае целого порядка уточненный порядок для индикатора и уточненный порядок для плотностей множества корней различны. Эти результаты были дополнены А. А. Кондратюком (1967 г.), определившим нижнюю и верхнюю плотности нулей с помощью $N\left(r, \frac{1}{f}\right)$.

А. А. Гольдберг изучил (1962—1965 гг.) общий случай целых функций конечного порядка без требования, чтобы корни лежали на одном луче. Распределение корней по их аргументам характеризуется при этом верхней и нижней угловыми плотностями. Для получения соответствующих оценок индикатора Гольдберг обобщил понятие интеграла, введя интеграл по неаддитивной мере $\{\mu_1, \mu_2\}$.

3

Распределение значений мероморфных функций

С конца 20-х годов центральное место в теории мероморфных функций заняла теория распределения значений, основы которой были заложены (1925 г.) финским математиком Р. Неванлинной. При этом основные классические результаты теории целых функций включались в неванлинновскую теорию как частный случай.

Основным объектом изучения в теории распределения значений является асимптотическое поведение a -точек мероморфной функции $f(z)$, т. е. корней уравнения $f(z) - a = 0$, а также связь между распределением a -точек и другими величинами, характеризующими асимптотическое поведение $f(z)$.

Пусть функция $f(z)$ мероморфна в конечной z -плоскости (в дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваем только функции, мероморфные при $|z| < \infty$). Обозначим: $n(r, a)$ — число (с учетом кратности) a -точек, лежащих в круге $|z| \leq r$, $n_1(r, a)$ — число лежащих в этом же круге a -точек, засчитываемых $m - 1$ раз, если точка имеет кратность m . Легко видеть, что $n(r, \infty) = n(r, f)$ (см. § 1),

$$n(r, a) = n\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \text{ при } a \neq \infty.$$

Пусть

$$N(r, \infty) = N(r, f), \quad N(r, a) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right), \quad a \neq \infty.$$

Функция $N_1(r, a)$ строится по функции $n_1(r, a)$ точно так, как $N(r, a)$ строится по функции $n(r, a)$. Числа

$$\delta(a) = \delta(a, f) = 1 - \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, a)}{T(r, f)},$$

$$\varepsilon(a) = \varepsilon(a, f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N_1(r, a)}{T(r, f)}$$

называются соответственно дефектом и индексом разветвления в точке a .

Основными результатами теории Неванлинны являются соотношения

$$0 \leq \delta(a) + \varepsilon(a) \leq 1, \quad (28)$$

$$\sum_a \{\delta(a) + \varepsilon(a)\} \leq 2, \quad (29)$$

справедливые для всех мероморфных функций, не равных тождественно постоянной. Если $\delta(a) > 0$, то a называется дефектным значением. Для пикаровских исключительных значений a , т. е. для значений, принимаемых функцией $f(z)$ не более конечного числа раз, $\delta(a) = 1$, и из (29) следует классическая теорема Пикара (1876 г.).

Советские математики относительно недавно включились в исследования по теории распределения значений. Большую роль в популяризации теории распределения значений в нашей стране сыграла переведенная Л. И. Волковыским на русский язык монография Р. Неванлинны «Однозначные аналитические функции» (1941 г.).

Из соотношения (29) следует, что множество дефектных значений не более чем счетно. В связи с этим возникает вопрос о его структуре. До 1954 г. не был, однако, известен ни один пример мероморфной функции с бесконечным множеством дефектных значений. Такой пример построил А. А. Гольдберг в 1954 г. Позднее (1959 г.) он показал, что всякое не более чем счетное множество точек расширенной комплексной

плоскости совпадает с множеством дефектных значений некоторой мероморфной функции заданного порядка ρ , $0 < \rho \leq \infty$. Вместе с теоремой Валирона (1950 г.) о том, что мероморфные функции нулевого порядка не могут иметь более одного дефектного значения, этот результат является полным решением проблемы о структуре множества дефектных значений мероморфных функций.

Используя идею построения примеров А. А. Гольдберга, У. Хейман и В. Фукс получили (1962 г.) аналогичный результат для целых функций бесконечного порядка. Они доказали, что и в этом случае любое не более чем счетное множество комплексных чисел, включающее бесконечность, может быть множеством дефектных значений. Новым методом, основанным на теории приближений целыми функциями в комплексной плоскости с касанием на бесконечности, Н. У. Аракелян в 1966 г. показал, что для любого ρ , $\frac{1}{2} < \rho < \infty$, и любого не более чем

счетного множества M комплексных чисел можно построить целую функцию порядка ρ , множество дефектных значений которой содержит M . Требование $\rho > \frac{1}{2}$ необходимо, так как известно, что целые функ-

ции порядка $\rho \leq \frac{1}{2}$ не могут иметь дефектных значений, отличных от бесконечности. Результат Аракеяна тем более неожидан, что долгое время усилия математиков были направлены на доказательство справедливости гипотезы Неванлинны о том, что целая функция порядка ρ имеет не более 2ρ конечных дефектных значений. Отметим, что в работе Н. У. Аракеяна тонкие теоремы теории приближений, по-видимому, впервые применены в теории распределения значений.

Вопрос о структуре множества дефектных значений входит как составная часть в более общую, так называемую обратную задачу теории распределения значений о построении мероморфной функции с наперед заданным распределением дефектов и индексов разветвления, удовлетворяющих соотношениям (28) и (29). Обратной задаче посвящено много работ. Все установленные до настоящего времени факты, относящиеся к этой задаче, являются частными случаями результата, полученного А. А. Гольдбергом в 1954 г. и дающего решение обратной задачи в классе функций конечного порядка при двух дополнительных предположениях: 1) число дефектных значений конечно, 2) если сумма дефектов равна 2, то все дефекты являются рациональными числами. Если не задавать наперед индексы разветвления, то получается так называемая узкая обратная задача. Для целых функций бесконечного порядка «узкая» обратная задача полностью решена В. Фуксом и У. Хейманом в 1962 г. Таким образом, для «узкой» обратной задачи результат А. А. Гольдберга уже не является самым общим из известных, хотя и не покрывается результатом Фукса и Хеймана.

Особый интерес представляет обратная задача в классе мероморфных функций конечного порядка. Оказалось, что даже «узкая» обратная задача для таких функций не всегда имеет решение. В 1958 г. В. Фукс показал, что помимо неравенств $0 \leq \delta(a) \leq 1$, $\sum_a \delta(a) \leq 2$, вытекаю-

щих из основных теорем Неванлинны, дефекты удовлетворяют еще некоторым соотношениям. Из результатов советских математиков, относящихся к этому направлению, приведем следующую оценку, принадлежащую В. П. Петренко (1966 г.).

Пусть функция $f(z)$ нижнего порядка λ имеет более одного дефектного значения. Тогда

$$\sum_a [\delta(a)]^\alpha \leq A \frac{\min(\lambda^{2\alpha}, \lambda^{1-\alpha})}{(3\alpha-1)^\alpha}, \quad \frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2},$$

$$\sum_a [\delta(a)]^{\frac{1}{3}} \left[\ln \frac{e}{\delta(a)} \right]^{-1} \leq A \lambda^{\frac{2}{3}} |\ln \lambda|^{-\frac{1}{2}},$$

где A — абсолютная постоянная. У. Хейман показал, что для функций конечного нижнего порядка этот ряд при $\alpha > \frac{1}{3}$ сходится, а при $\alpha < \frac{1}{3}$ может расходиться. Как обстоит дело при $\alpha = \frac{1}{3}$, неизвестно.

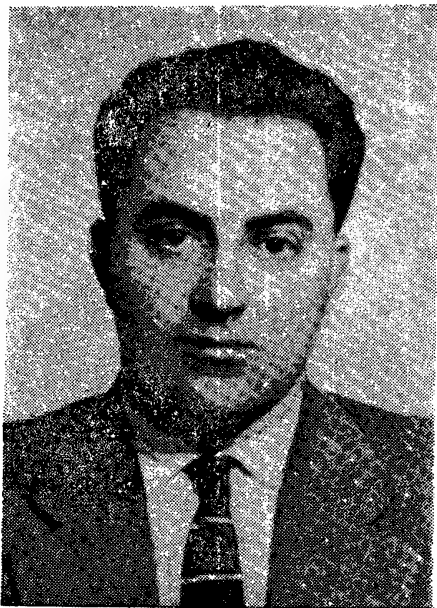
Обычно при выводе новых соотношений для дефектов, как и при доказательстве неравенства (29), используются те или иные новые оценки логарифмических производных функций $f(z)$. Многие из них представляют самостоятельный интерес. Отметим, что Ву Нгоан и И. В. Островский уточнили (1965 г.) известную лемму о логарифмической производной Неванлинны, в частности доказали, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m\left(r, \frac{f'}{f}\right)}{\ln r} \leq \max(\rho - 1, 0).$$

В этой оценке знак $\leq$ нельзя заменить знаком $<$.

Неванлинновские дефектные значения являются обобщениями пикаровских исключительных значений. Большой интерес представляет вопрос, сохраняются ли свойства функций, связанные с наличием пикаровских исключительных значений, если требовать лишь наличия дефектных значений или (более сильное требование!) наличия дефектных значений с максимальным дефектом, равным единице. Согласно классической теореме Иверсена каждое пикаровское исключительное значение a необходимо является асимптотическим, т. е. $f(z) \rightarrow a$, если $z \rightarrow \infty$ по некоторой непрерывной кривой. Дефектное же значение, как показали О. Тейхмюллер (1939 г.) и У. Хейман (1953 г.), может не быть асимптотическим. Для целых функций конечного порядка $\rho > 1$ соответствующий пример был построен А. А. Гольдбергом в 1957 г., для целых функций порядка $\rho > \frac{1}{2}$ — Н. У. Аракелян в 1966 г. Как уже

отмечалось, целые функции порядка $\rho \leq \frac{1}{2}$ не могут иметь конечных дефектных значений. В примере Н. У. Аракеяна целая функция имеет счетное множество дефектных неасимптотических значений. Это первый пример такого рода и для мероморфных функций. А. А. Гольдберг показал (1966 г.), что для мероморфных функций порядка $1 < \rho \leq \infty$



А. А. Гольдберг.

даже значение a с $\delta(a) = 1$ может не быть асимптотическим. Для $\rho \leq 1$ вопрос остается открытым. Отметим, что для целых функций конечного порядка с $\delta(a) = 1$, $a \neq \infty$, значение a необходимо является асимптотическим (А. Эдрей, В. Фукс, 1959 г.). В 1967 г. А. А. Гольдберг построил пример целой функции бесконечного порядка, у которой $\delta(0) = 1$, а нуль не является асимптотическим значением.

Если целая функция $f(z)$ имеет конечное пикаровское исключительное значение, то $\rho = \lambda$. В 1964 г. А. А. Гольдберг показал, что наличие конечного дефектного значения у целой функции конечного порядка не накладывает никаких ограничений на λ , кроме тривиального $\lambda \leq \rho$ и неравенства $\lambda > \frac{1}{2}$,

следующего из результата И. В. Островского (1963 г.). Если же у мероморфной функции сумма $\delta(a) + \delta(b)$ достаточно близка к 2 (равна 2), то λ близка к ρ ($\lambda = \rho$). Это было впервые доказано А. Эдреем и В. Фуксом в 1959 г. Самая точная из известных оценок разности $\rho - \lambda$ через ρ и $2 - \delta(a) - \delta(b)$ для мероморфных функций принадлежит И. В. Островскому.

Если мероморфная функция $f(z)$ имеет пикаровское исключительное значение, то, очевидно, и $f(z + h)$ будет иметь то же пикаровское исключительное значение. Д. Дюге показал (1947 г.), что для мероморфных функций бесконечного порядка дефекты у $f(z)$ и $f(z + h)$ могут не совпадать. А. А. Гольдберг установил, что это же обстоятельство может иметь место и для мероморфных функций конечного порядка выше экспоненциального типа (более того, может быть $\delta(a) = 1$ для $f(z)$ и $\delta(a) = 0$ для $f(z + h)$). Для функций экспоненциального типа дефекты у $f(z)$ и $f(z + h)$ всегда совпадают, но в отличие от случая функций бесконечного порядка для функций конечного порядка определение дефекта можно «исправить» таким образом, чтобы он стал инвариантным относительно сдвига начала координат и был не меньше неванлинновского дефекта, сохранив его основные свойства. Получены не поддающиеся расширению достаточные условия для того, чтобы для мероморфной функции новое определение дефекта совпадало с неванлинновским. Эти достаточные условия являются одновременно достаточными условиями для того, чтобы неванлинновский дефект не изменялся при переходе от $f(z)$ к $f(z + h)$.

Большое количество работ посвящено изучению распределения значений и асимптотического поведения более специальных классов мероморфных функций. А. А. Гольдберг и И. В. Островский получили (1961 г.) теоремы типа теорем Фрагмена — Линделефа для функций,

мероморфных в замкнутой полуплоскости. Использование дефектов позволило перенести на мероморфные функции классическую теорему Вимана (1905 г.), утверждающую, что для целой функции порядка $\rho < \frac{1}{2}$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \mu(r, f) = \infty, \quad \mu(r, f) = \min_{|z|=r} |f(z)|$$

и, более того (Ж. Валирон, 1914 г.; А. Виман, 1915 г.), при $\rho < 1$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(r, f)}{\ln M(r, f)} \geq \cos \pi \rho.$$

А. А. Гольдберг и И. В. Островский обобщили (1961, 1963 гг.) эти теоремы, изучая связь между величинами $\mu(r, f)$, $M(r, f)$ и неванлинновскими характеристиками мероморфных функций порядка $\rho < 1$ или нижнего порядка $\lambda < 1$. Приведем в качестве примера два из полученных ими неравенств: если $\lambda < \frac{1}{2}$, то

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ \mu(r, f)}{T(r, f)} \geq \frac{\pi \lambda}{\sin \pi \lambda} (\cos \pi \lambda - 1 + \delta(\infty, f)),$$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ \mu(r, f)}{\ln M(r, f)} + \pi \lambda \sin \pi \lambda \cdot \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, f)}{\ln M(r, f)} \geq \cos \pi \lambda.$$

Некоторые работы посвящены изучению мероморфных функций, представимых в виде ряда по простым дробям

$$\varphi(z) = \sum_n \frac{A_n}{z - h_n}, \quad \sum_n \left| \frac{A_n}{h_n} \right| < \infty, \quad h_n \rightarrow \infty. \quad (30)$$

К этому направлению относится работа М. Г. Крейна (1947 г.), упоминавшаяся в § 2. М. В. Келдыш показал (1954 г.), что для функции $\varphi(z)$ вида (30) справедливы следующие утверждения: 1) $m(r, \varphi) = O(1)$, 2) если $\varphi(z)$ имеет конечный порядок ρ , то $\delta(a, \varphi) = 0$, $a \neq 0$, и порядок $N(r, a)$ равен ρ ; это же справедливо и для $a = 0$, если дополнительно предположить, что $\sum_n |A_n| < \infty$, $\sum_n A_n \neq 0$. И. В. Островский уточнил (1960 г.) первое утверждение, показав, что $m(r, \varphi) = o(1)$. М. А. Евграфов (1957 г.) и В. В. Ключев (1958—1963 гг.) изучали функции вида (30) в предположении, что последовательности $\{A_n\}$ и $\{h_n\}$ могут быть проинтерполированы аналитическими функциями специального вида.

Поскольку функции $n(r, a)$ и $N(r, a)$ учитывают лишь модули a -точек, основные предложения теории Неванлинны и результаты, о которых говорилось выше, характеризуют в основном лишь модули a -точек мероморфных функций. Исследования распределения a -точек по аргументам ведут свое начало от работ Бибербаха (1919 г.) и Неванлинны (1925 г.). Полученные к настоящему времени результаты можно разбить на две группы:

1) результаты, показывающие, что из определенных ограничений, наложенных на аргументы a -точек мероморфной функции $f(z)$ или ее производных, следует оценка роста функции $f(z)$;

2) результаты, показывающие, что из определенных ограничений, наложенных на аргументы a -точек мероморфной функции $f(z)$ или ее производных, следует регулярность роста функции $f(z)$ или наличие дефектных значений.

Рассмотрим результаты первой группы. Пусть мы имеем систему лучей

$$\arg z = \alpha_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad 0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < 2\pi. \quad (31)$$

Положим

$$\gamma_j = \alpha_{j+1} - \alpha_j \quad (j = 1, 2, \dots, n, \quad \alpha_{n+1} = \alpha_1 + 2\pi), \quad \gamma = \min_{1 \leq j \leq n} \gamma_j.$$

Будем говорить, что a -точки функции $f(z)$ близки к системе лучей (31), если выполнено условие

$$\sum_{\alpha_j \leq \varphi_k \leq \alpha_{j+1}} r_k^{-\frac{\pi}{\gamma}} \sin \frac{\pi}{\gamma} (\varphi_k - \alpha_j) < \infty, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где $z_k = r_k e^{i\varphi_k}$ являются a -точками функции $f(z)$.

Заметим, что если a -точки функции $f(z)$ лежат на системе лучей (31), то они близки к ней. Если система (31) состоит из двух лучей $\arg z = 0$ и $\arg z = \pi$, то близость эквивалентна условию

$$\sum_k \left| \operatorname{Im} \frac{1}{z_k} \right| < \infty.$$

Сформулируем теперь в ослабленной форме результат, полученный в 1958 г. И. В. Островским.

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция и пусть при некотором $a \neq 0, \infty$ и некотором целом $l \geq 0$ выполняется, по крайней мере, одно из следующих трех условий:

1) нули и полюсы $f(z)$ близки к системе (31), а $\delta(a, f^{(l)}) > 0$;
2) полюсы $f(z)$ и a -точки $f^{(l)}(z)$ близки к системе (31), а $\delta(0, f) > 0$;

3) нули и полюсы $f(z)$ и a -точки $f^{(l)}(z)$ близки к системе (31), а $\delta(\infty, f) > 0$.

Тогда рост функции $f(z)$ не выше нормального типа порядка $\pi\gamma^{-1}$, где $\gamma = \min_{1 \leq j \leq n} \gamma_j$. Эта теорема обобщает и усиливает результаты Бибербаха (1919 г.), Неванлинны (1925 г.) и Эдрея (1955 г.). Из нее вытекает, что если система (31) состоит из двух лучей, $\arg z = \alpha$ и $\arg z = \beta$ ($0 \leq \gamma = \beta - \alpha < \pi$), а нули и единицы целой функции $f(z)$ лежат на этих лучах, то рост функции $f(z)$ не выше нормального типа порядка $\pi\gamma^{-1}$. Если относительно нулей и единиц предполагать лишь, что они лежат в угле $\alpha \leq \arg z \leq \beta$, то это утверждение перестает быть справед-

ливым. Биберах показал (1919 г.), что в этом случае можно лишь утверждать, что порядок ρ функции $f(z)$ не может удовлетворять неравенству $\frac{\pi}{2\pi - \gamma} < \rho < \frac{\pi}{\gamma}$. И. В. Островский доказал (1960 г.), что теорема Бибераха остается в силе для мероморфных функций с $\delta(\infty, f) > 1 - \cos \frac{\gamma\rho}{2}$ и несправедлива для функций с $\delta(\infty, f) = 1 - \cos \frac{\gamma\rho}{2}$. Этот результат обобщается на случай нескольких углов.

В 1960 г. Б. Я. Левин и И. В. Островский исследовали рост целых функций $f(z)$ класса A таких, что $f''(z)$ также принадлежит классу A . При дополнительном предположении о том, что функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = e^{Q(z)} g(z), \quad (32)$$

где $Q(z)$ и $g(z)$ — целые функции, причем

$$\int_0^\infty \frac{\ln \ln M(t, g)}{t^2} dt < \infty, \quad (33)$$

они доказали, что $Q(z)$ — целая функция, удовлетворяющая условиям

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r, Q)}{r} < \infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+ |Q'(t)|}{1+t^2} dt < \infty. \quad (34)$$

Оценка роста $Q(z)$ в этой теореме точна, поскольку, как показал И. В. Островский, из представимости функции $f(z)$ класса A в виде (32), где $g(z)$ удовлетворяет условию (33), а $Q(z)$ — условию (34), следует, что все производные функции $f(z)$ принадлежат классу A .

Б. Я. Левин и И. В. Островский показали также, что если целая функция $f(z)$ вещественна и имеет лишь вещественные корни, а $f''(z)$ принадлежит классу A , то

$$\ln \ln M(r, f) = O(r \ln r). \quad (35)$$

Этот результат связан со следующим вопросом, поставленным Поля и Виманом (1911—1914 гг.): можно ли утверждать, что всякая вещественная целая функция, имеющая, вместе со всеми производными, лишь вещественные нули, представима в виде

$$f(z) = e^{-\gamma z^2 + \beta z + \alpha} P(z), \quad (36)$$

где $\gamma \geq 0$, β и α вещественны, а $P(z)$ — каноническое произведение Вейерштрасса рода 1 с вещественными нулями. Класс функций, представимых в виде (36), впервые встречается в работах Лагерра. Лагерр показал, что нули всех производных таких функций вещественны.

Результаты, относящиеся к вопросу Поля — Вимана, были получены ранее Аландером, Поля, Заксером и Эдреем. Однако во всех этих результатах делались различные предположения или о росте функции $f(z)$, или о расположении ее нулей. Оценка (35) получена без

каких-либо дополнительных предположений. Таким образом, дальнейшие исследования по проблеме Поляна — Вимана можно вести в классе функций, удовлетворяющих (35).

Рассмотрим теперь результаты второй группы. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция, $\{a_k\}$ и $\{b_n\}$ — соответственно ее нули и полюсы. Пусть p — натуральное, φ и η — вещественные числа, удовлетворяющие условиям

$$0 \leq \eta < \frac{\pi}{2p}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Обозначим $D_1^{(p)}(\eta, \varphi)$ и $D_2^{(p)}(\eta, \varphi)$ — множества

$$D_1^{(p)}(\eta, \varphi) = \bigcup_{j=0}^{p-1} \left\{ \left| \arg z - \varphi - \frac{\pi}{p} 2j \right| \leq \eta \right\},$$

$$D_2^{(p)}(\eta, \varphi) = \bigcup_{j=0}^{p-1} \left\{ \left| \arg z - \varphi - \frac{\pi}{p} (2j+1) \right| \leq \eta \right\}.$$

Если все $a_k \in D_1^{(p)}(\eta, \varphi)$, а все $b_n \in D_2^{(p)}(\eta, \varphi)$, то будем говорить, что у функции $f(z)$ нули и полюсы (p, η) -разделены.

Функции с (p, η) -разделенными нулями и полюсами изучались в 1960, 1961 гг. А. А. Гольдбергом. Им доказано, что для таких функций из $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-p} T(r, f) < \infty$ следует $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-p} T(r, f) < \infty$. Поскольку для

целой функции с положительными нулями нули и полюсы (p, η) -разделены при любом p , то как следствие получается, что для такой функции порядок и нижний порядок находятся между двумя последовательными целыми числами. Для целой функции класса A нули и полюсы (p, η) -разделены при любом четном p , поэтому для такой функции порядок и нижний порядок заключены между двумя последовательными четными числами. Он же доказал, что для функций с (p, η) -разделенными нулями и полюсами, удовлетворяющих условию $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-p} T(r, f) = \infty$, нуль и бесконечность имеют «общий» дефект в том смысле, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, 0) + N(r, \infty)}{T(r, f)} \leq \frac{2}{1 + \cos p\eta} < 2. \quad (37)$$

Однако при $\eta > 0$ может быть $\delta(0, f) = 0$ и $\delta(\infty, f) = 0$. С другой стороны, Эдрей, Фукс и Геллерштейн показали (1961 г.), что при $\eta = 0$ для функций конечного порядка, удовлетворяющих указанным выше условиям, всегда $\delta(0, f) > 0$ и $\delta(\infty, f) > 0$. Кроме того, они (независимо друг от друга) вывели неравенство (37) для случая $\eta = 0$.

И. В. Островский рассматривал (1960 г.) мероморфные функции, у которых a -точки для трех различных значений a близки к системе лучей. Если предположить, что такая функция имеет дефектное значение, то эта функция не выше нормального типа порядка $\pi\gamma^{-1}$ и обладает

регулярностью роста в том смысле, что существует равномерный по φ предел

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in E}} \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r^{\frac{\pi}{\nu_j}}}, \quad \alpha_j \leq \varphi \leq \alpha_{j+1},$$

$$j = 1, 2, \dots, n,$$

где E — некоторое множество конечной логарифмической длины (т. е. $\int_E d \ln r < \infty$), и интегралы

$$\int_1^\infty \frac{|\ln |f(re^{i\alpha_j})||}{r^{\frac{\pi}{\nu_j}+1}} dr$$

сходятся. Этот результат позволяет исследовать функции, которые представляются рядами вида (30) и у которых полюсы близки к системе лучей. Оказывается, что для таких функций из близости полюсов к системе лучей (31) следует, что для любого a a -точки $\{0, 0\}$ -близки к этой же системе. Поэтому применение указанного выше результата приводит к следующему обобщению теоремы М. Г. Крейна (1947 г., см. § 2).

Пусть функция $f(z)$ представима в виде (30) и ее полюсы удовлетворяют условию $\sum_k \left| \operatorname{Im} \frac{1}{h_k} \right| < \infty$. Если эта функция имеет действительное значение, то она не выше нормального типа порядка 1 и, кроме того, существует равномерный по φ предел $\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in E}} \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r}$,

$$\int_E d \ln r < \infty, \quad \text{и интеграл} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln |f(t)||}{1+t^2} dt \text{ сходится.}$$

Мероморфная во всей плоскости функция $f(z)$ взаимно однозначно отображает $|z| < R$ на некоторую открытую односвязную риманову поверхность F . Наоборот, всякая открытая односвязная риманова поверхность F (накрывающая расширенной комплексной плоскости) может рассматриваться как образ $|z| < R$ при отображении некоторой мероморфной функцией. Ограничимся рассмотрением открытых односвязных римановых поверхностей, наиболее важных с точки зрения теории распределения значений. Будем называть их просто римановыми поверхностями.

При изучении римановой поверхности прежде всего возникает вопрос о ее типе, т. е. вопрос о том, будет она конформно эквивалентна конечной z -плоскости (параболический тип) или кругу с конечным радиусом (гиперболический тип). Этой задачей занимался Л. И. Волковский. Основные полученные им результаты собраны в его монографии



И. В. Островский.

«Исследования по проблеме типа односвязной римановой поверхности» (1950 г.), единственной в мировой литературе по этому вопросу. В большинстве случаев теоремы, изложенные в книге, остаются самыми сильными из известных до настоящего времени. Отметим первое в литературе общее достаточное условие для принадлежности поверхности к гиперболическому типу и многочисленные конкретные классы римановых поверхностей, для которых удается определить тип (среди них важные классы римановых поверхностей с конечным числом точек ветвления на каждом листе и поверхности со сближающимися точками ветвления). Основной метод, которым пользуется Л. И. Волковский, является сочетанием квазиконформных отображений и склеивания.

К исследованиям Л. И. Волковского примыкают работы Д. Б. Потягайло (1953, 1961, 1962 гг.). В частности, Д. Б. Потягайло привел неожиданные примеры двух римановых поверхностей, которые строятся аналогичным образом, имеют одни и те же алгебраические точки ветвления (и только их) над конечной плоскостью, но, в зависимости от способа склеивания листов, принадлежат к различным типам.

Пусть о мероморфной в $|z| < \infty$ функции $f(z)$ известно, что она отображает $|z| < \infty$ на данную риманову поверхность F параболического типа. Для того чтобы изучить распределение значений функции $f(z)$, например подсчитать дефекты и индексы разветвления $f(z)$, надо уметь с достаточной степенью точности находить асимптотику конформного отображения F на $|z| < \infty$. Обычно отображают F на $|\zeta| < \infty$ квазиконформно с характеристиками $p(\zeta)$ такими, что

$$\int \int_{|\zeta| > R} \frac{p(\zeta) - 1}{|\zeta|^2} d\xi d\eta < \infty, \quad \zeta = \xi + i\eta. \quad (38)$$

В тех задачах, где нужно получить асимптотику модулей a -точек функции $f(z)$, достаточен результат Тейхмюллера (1938 г.) о существовании при условии (38) предела $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} |\zeta^{-1} z(\zeta)|$. В тех же случаях, когда исследуются и аргументы a -точек, используется более сильный результат П. П. Белинского (1954 г.) о существовании предела $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \zeta^{-1} z(\zeta)$.

В настоящее время получить достаточно точную асимптотику конформного отображения F на $|z| < \infty$ удастся лишь для специальных классов римановых поверхностей. Этой задачей занимался А. А. Гольдберг (1954, 1959 гг.). Изученные им классы римановых поверхностей с почти периодическими концами и π -концами содержат как частные случаи большинство исследованных с этой точки зрения классов римановых поверхностей. Используя поверхности с почти периодическими концами, он получил свое решение обратной задачи теории распределения значений, о которой упоминалось выше. В совместной с В. Г. Тайровой работе (1963 г.) им исследованы римановы поверхности, соответствующие целым функциям конечного нижнего порядка с двумя конечными вполне разветвленными значениями (число a называется вполне разветвленным значением функции $f(z)$, если все корни уравнения $f(z) - a = 0$, за исключением конечного числа, кратные). Оказалось,

что эти римановы поверхности принадлежат известному классу поверхностей с синус-концами, что позволило детально изучить асимптотику целых функций с двумя вполне разветвленными значениями, в частности получить формулу для их порядка роста. Тем самым были существенно дополнены результаты Валирона (1923 г.), Блока (1925 г.) и Сельберга (1928 г.).

Согласно известной теореме Данжуа — Карлемана — Альфорса нижний порядок λ не меньше $\frac{1}{2}$, если мероморфная функция $f(z)$ отображает $|z| < \infty$ на риманову поверхность F с $n \geq 2$ прямо критическими граничными точками. В 1954 г. А. А. Гольдберг распространил эту теорему на более широкие классы критических граничных точек F . Позднее М. Хейнс (США) включил эти результаты в рамки развитой им широкой теории линделефовых отображений. В связи с обобщением теоремы Данжуа — Карлемана — Альфорса, а также в связи с построением теории дефектных значений в смысле О. Лехто для функций ограниченного вида весьма актуальной стала задача описания римановых поверхностей, соответствующих произведениям Бляшке. В общем случае эта задача еще не решена. Наиболее общий из известных результатов в этом направлении (случай, когда все нули произведения Бляшке лежат на одном радиусе) получен А. А. Гольдбергом в 1956 г.

Заметим, что, изучая вопрос о том, какие континуумы могут быть множеством предельных значений некоторой мероморфной в $|z| < 1$ функции $f(z)$, Д. Б. Потягайло (1952 г.) существенно использовал римановы поверхности. Он впервые обнаружил, что не каждый континуум может быть множеством предельных точек. Позднее этими задачами занимались американские математики У. Рудин и П. Черч.

Луч $\arg z = \varphi_0$ называется лучом Жюлиа для целой функции $f(z)$, если $f(z)$ принимает в любом угле $|\arg z - \varphi_0| < \delta$ все конечные значения, кроме, самое большое, одного. Жюлиа показал, что каждая целая трансцендентная функция имеет, по крайней мере, один луч Жюлиа. Это уточняет классическую теорему Пикара. Вопросом о связи между расположением лучей Жюлиа и множеством Θ предельных точек последовательности θ_n , $0 \leq \theta_n \leq 2\pi$, где $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ — нули целой функции $f(z)$, занимался В. Л. Гончаров (1927 г.). Приведем некоторые из принадлежащих ему результатов.

Пусть целая функция $f(z)$ имеет порядок $\rho \leq \frac{1}{2}$, $\theta \in \Theta$, $\theta_{n_j} \rightarrow \theta$, $r_{n_{j+1}} = O(r_{n_j})$. Тогда луч $\arg z = \theta$ является лучом Жюлиа. Пусть $\rho < \frac{1}{2}$ и

$$\lim_{t \rightarrow 1+} \frac{\sigma(t) - 1}{t - 1} < \frac{1}{2},$$

где

$$\sigma(t) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n(tr, 0)}{n(r, 0)}.$$

Тогда

1) если $\arg z = \theta$ является лучом Жюлиа, то $\theta \in \Theta$;

2) если $\theta_1 \in \Theta$, $\theta_2 \in \Theta$, то в угле $\theta_1 < \arg z < \theta_2$ содержится хотя бы один луч Жюлиа.

А. Л. Шагинян следующим образом обобщает (1958 г.) понятие луча Жюлиа. Пусть $L: z = z(t)$, $0 \leq t \leq 1$, — жорданова кривая, $z(0) = 0$, $z(1) = \infty$. Пусть $\delta(t) > 0$ — произвольная функция на $[0, 1)$, $\Omega(L; \delta(t)) = \bigcup_{0 \leq t < 1} \{|z - z(t)| < \delta(t)\}$. Кривая L называется

δ -направлением Жюлиа целой функции $f(z)$, если для всех $0 < q < 1$ функция $f(z)$ принимает в $\Omega(L; q\delta(t))$ все конечные значения, кроме, возможно, одного. Пусть $L(\alpha)$ — семейство кривых, непрерывно зависящих от параметра α и покрывающих всю z -плоскость. А. Л. Шагинян строит пример целой функции, для которой каждая кривая из заданного семейства является δ -направлением Жюлиа с заданной функцией $\delta(t)$, произвольно быстро стремящейся к нулю при $t \rightarrow 1$.

В. Л. Гончаров построил (1930 г.) пример целой функции первого порядка, ограниченной в угле раствором меньше π и не имеющей в нем конечных асимптотических значений. Несколько раньше (1928 г.) он получил ряд теорем единственности для мероморфных функций. Приведем одну из них.

Пусть у мероморфных функций конечного порядка $f(z)$ и $g(z)$, так же как и у их первых и вторых производных, совпадают нули и полюсы. Тогда возможны лишь четыре случая:

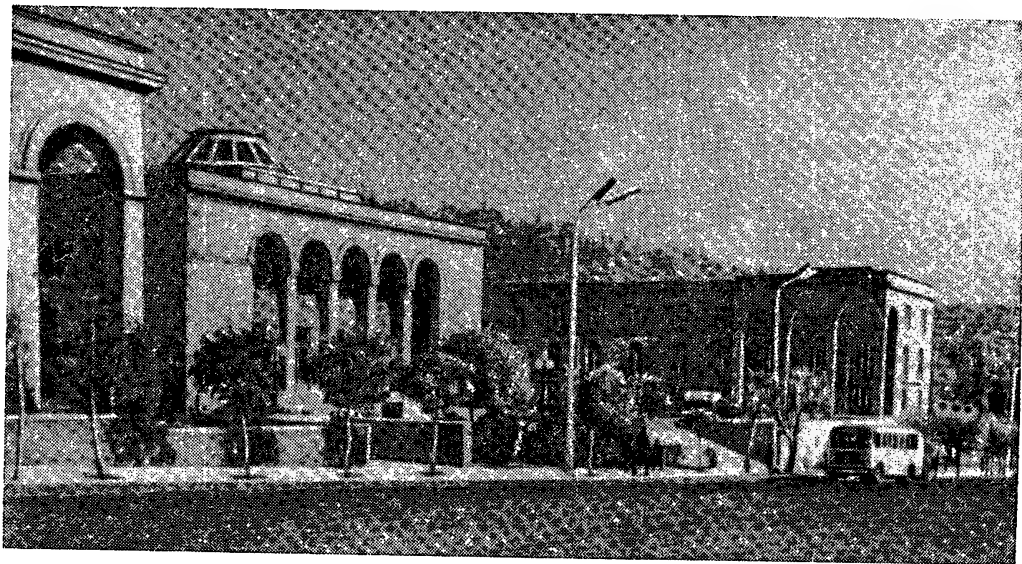
$$f(z) = cg(z);$$

$$f(z) = Ae^{az}, \quad g(z) = Be^{bz};$$

$$f(z) = A(1 + e^{az+b}), \quad g(z) = B(1 + e^{-az-b});$$

$$f(z) = Ae^{P(z)}(e^{P(z)} - 1)^{-1}, \quad g(z) = B(e^{P(z)} - 1)^{-1},$$

где a, b, c, A, B — постоянные, $P(z)$ — многочлен.



Академия наук Армянской ССР.

В 1929 г. А. О. Гельфонд установил признак, позволяющий по данным полюсам мероморфной функции и коэффициентам ее степенного разложения в окрестности $z = 0$ определить, является ли данное число $a \neq \infty$ исключительным пикаровским значением.

Наряду с работами, непосредственно относящимися к теории распределения значений, можно указать работы, которые по тематике относятся к другим областям теории функций и анализа, но существенно используют аппарат неванлинновской теории. Ограничимся здесь тремя примерами.

1. Число $\alpha \neq 0$ называется асимптотическим периодом мероморфной функции $f(z)$, если порядок функции $f(z + \alpha) - f(z)$ меньше порядка функции $f(z)$. Для целых функций асимптотические периоды исследовались Дж. Уиттеркером и А. О. Гельфондом (1951 г.). В частности, А. О. Гельфонд доказал, что отношение любых двух асимптотических периодов целой функции конечного порядка является или рациональным, или трансцендентным числом. Исследованием асимптотических периодов мероморфных функций занимался А. Г. Нафталевич (1958, 1962 гг.). В общем случае здесь ситуация значительно более сложная. Однако если предположить, например, что порядок неванлинновской характеристики $m(r, f)$ не ниже порядка $N(r, f)$, то основные результаты об асимптотических периодах, справедливые для целых функций (в частности, цитированная теорема А. О. Гельфонда), остаются в силе и для мероморфных функций. Позднее (1961, 1962 г.) А. Г. Нафталевич обобщил свои результаты на мероморфные матрицы.

2. Существенно используя одно обобщение неванлинновской теории — теорию мероморфных кривых, М. Б. Балк получил (1966 г.) следующую теорему. Пусть $F(\bar{z}, z)$ — многочлен относительно $\bar{z}$ и целая функция относительно z . Если множество нулей $F(\bar{z}, z)$ ограничено (но не обязательно конечно), то $F(\bar{z}, z) = P(\bar{z}, z) e^{g(z)}$, где $P(\bar{z}, z)$ — многочлен по обоим переменным, а $g(z)$ — целая функция.

3. Опираясь на результаты неванлинновской теории, А. А. Гольдберг показал (1956 г.), что всякое однозначное мероморфное в конечной плоскости решение алгебраического дифференциального уравнения первого порядка имеет конечный порядок роста, и вывел априорные оценки сверху для этих порядков. Ш. И. Стрелиц изучал (1964 г.) мероморфные решения алгебраических дифференциальных уравнений (не обязательно первого порядка) и при некоторых дополнительных ограничениях показал, как найти возможные порядки мероморфных



А. Г. Нафталевич.

решений, имеющих в бесконечности дефектное значение. Он получил также необходимое условие для того, чтобы мероморфное решение имело конечное дефектное значение.

Специальные вопросы теории целых функций

Теория целых функций развивалась в нашей стране в тесной взаимосвязи со смежными областями математики: теорией чисел, теорией аппроксимации и интерполирования, гармоническим анализом, теорией дифференциальных уравнений и функциональным анализом.

В последние десятилетия в развитии теории функций все больше проявляется ее взаимосвязь с функциональным анализом. Многие постановки вопросов этой теории, таких, например, как о полноте систем целых функций или об условиях, при которых данная система является базисом, а также постановка некоторых экстремальных задач заимствованы из функционального анализа, и часто методы функционального анализа помогают решать эти вопросы и задачи. С другой стороны, функциональный анализ, в частности теория нормированных колец и теория несамосопряженных операторов, ставит перед теорией целых функций новые задачи, решение которых способствует ее дальнейшему развитию.

В данном разделе рассматриваются результаты, полученные в теории интерполирования, некоторые алгебраические вопросы, неравенства и экстремальные свойства целых функций, а также вопросы гармонического анализа.

Начало исследованиям советских математиков по интерполированию целыми функциями было положено А. О. Гельфондом и В. Л. Гончаровым. В настоящее время проблемам интерполирования посвящено большое количество работ. В этих работах поставлены и решены многие вопросы, относящиеся к единственности определения функции ее интерполяционными данными, вопросы конструкции интерполирующих функций, в частности сходимости интерполяционных рядов, и созданы оригинальные методы решения задач. А. О. Гельфонд использовал интерполирование как аппарат для изучения арифметических свойств целых функций. Применяя этот метод к проблемам аналитической теории чисел, он получил свои ныне широко известные результаты по трансцендентным числам. С помощью интерполирования оказалось возможным решать задачи о приближении голоморфных функций линейными комбинациями функций вида $f(\lambda_n z)$, $f^{(n)}(\lambda_n z)$, z^{λ_n} и др. Иной подход к задачам о полноте систем функций, основанный на идеях функционального анализа, был разработан А. И. Маркушевичем. Это направление также получило большое развитие.

Другое, алгебраическое направление в теории целых функций связано с работами Н. Г. Чеботарева, который начиная с 1922 г. постоянно интересовался проблемой перенесения на целые функции свойств поли-

номов. В частности, Чеботарев занимался отысканием условий вещественности всех корней целой функции и изучением задачи Гурвица для различных классов целых функций. Его исследования в этом направлении были продолжены многими математиками. Классы целых функций, к изучению которых привели эти исследования, играют, как выяснилось впоследствии, основную роль при получении неравенств между целыми функциями и изучении их экстремальных свойств. Таким образом, была установлена связь между двумя различными направлениями исследования.

Теория аппроксимации, в частности теория наилучшего приближения функций на всей числовой оси, также поставила новые оригинальные задачи перед теорией целых функций. В 1923 г. С. Н. Бернштейн ввел в рассмотрение целые функции конечной степени, ограниченные на вещественной оси (экспоненциального типа), и перенес на эти функции неравенство для производной, установленное им ранее для производной тригонометрического полинома. Так было положено начало исследованию экстремальных свойств и неравенств для целых функций конечной степени. Это исследование было продолжено в работах С. Н. Бернштейна и его сотрудников и в настоящее время развивается главным образом советскими математиками.

Значительный цикл работ по целым функциям, находящихся на грани с функциональным анализом, связан с почти периодическими функциями, преобразованиями Фурье, Лапласа и другими более общими интегральными преобразованиями.

В настоящем разделе мы не касаемся исследований, которые хотя и связаны с теорией целых функций, но прямо к ней не относятся, и лишь бегло затрагиваем вопросы полноты систем целых функций, базисов из целых функций и свойств решений дифференциальных уравнений бесконечного порядка в комплексной плоскости.

1

Интерполирование и связанные с ним вопросы

Теория интерполирования целыми функциями начиная с 30-х годов развивалась в основном в исследованиях советских математиков. Интерес к этой теории в СССР возник под влиянием работ В. Л. Гончарова и А. О. Гельфонда, которыми были получены фундаментальные результаты. Особую роль сыграли их статьи «Интерполяционные процессы и целые функции» (В. Л. Гончаров) и «Проблема представления и единственности целой аналитической функции первого порядка» (А. О. Гельфонд), опубликованные в 1937 г. в журнале «Успехи математических наук». Современное состояние основных направлений теории интерполирования отражено в монографии А. О. Гельфонда «Исчисление конечных разностей» (1952 г.; 3-е изд. — 1967 г.).

Классическая задача интерполяции состоит в отыскании функции данного класса (полином степени не больше n , целая функция с ограничениями на рост и т. п.), принимающей в заданных точках — узлах интерполяции — заданные значения. В общей постановке задача интерполяции заключается в следующем. Дана последовательность линейных функционалов $L_n(f)$, $n = 1, 2, \dots$, и последовательность чисел a_n , $n = 1, 2, \dots$. Требуется в данном классе K найти функцию $f(z)$, удовлетворяющую условиям

$$L_n(f) = a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Естественнее всего искать эту функцию в так называемом классе единственности, т. е. в таком линейном подклассе класса K , который не содержит нетривиальной функции, удовлетворяющей условиям $L_n(f) = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Таким образом, возникают проблемы

1) описания классов единственности для данной интерполяционной задачи;

2) конструкции функции, решающей интерполяционную задачу в данном классе единственности.

Функция, решающая интерполяционную задачу, часто строится в виде ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(z), \quad (39)$$

где $P_n(z)$ — некоторые полиномы или целые функции, образующие систему, биортогональную к системе функционалов L_n , т. е. такие, что

$$L_n(P_k) = \delta_{kn}.$$

Такой ряд называется интерполяционным рядом. При этом предполагается, что сходимость ряда равномерна на любом компакте и функционалы L_n непрерывны относительно этой сходимости. Если сумма интерполяционного ряда (39) является функцией данного класса K , то она и дает решение интерполяционной задачи. В связи с этим возникает важная проблема

3) описания классов функций, представимых интерполяционным рядом (39).

Классы функций, представимых интерполяционным рядом (39), принято называть классами сходимости. Очевидно, что класс сходимости является классом единственности.

В дальнейшем мы будем рассматривать интерполяционные задачи лишь в классах, состоящих из целых функций. Особенно часто будут встречаться следующие классы:

$[\rho, \sigma)$ — класс целых функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \ln M(r, f) < \sigma \leq \infty$;

$[\rho, \sigma]$ — класс целых функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \ln M(r, f) \leq \sigma < \infty$;

$[\rho, \infty]$ — класс целых функций порядка не выше ρ ;

$[\rho(r), H(\theta)]$ — класс целых функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho(r)} \ln |f(re^{i\theta})| < H(\theta)$, $0 \leq \theta < 2\pi$;

$[\rho(r), H(\theta)]$ — класс целых функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho(r)} \ln |f(re^{i\theta})| \leq H(\theta)$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Сходимость всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем понимать как равномерную на любом компакте.

Интерполяционный ряд Ньютона. Пусть $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность комплексных чисел $z_n \neq z_k$ ($k \neq n$) и нам необходимо построить целую функцию $f(z)$, принимающую в точках этой последовательности заданные значения. Эту задачу можно рассматривать как интерполяционную с функционалами

$$L_0(f) = f(z_1), \quad L_1(f) = \frac{f(z_1)}{z_1 - z_2} + \frac{f(z_2)}{z_2 - z_1}, \dots,$$

$$L_n(f) = \frac{f(z_1)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) \dots (z_1 - z_{n+1})} + \\ + \frac{f(z_2)}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3) \dots (z_2 - z_{n+1})} + \dots \\ \dots + \frac{f(z_{n+1})}{(z_{n+1} - z_1)(z_{n+1} - z_2) \dots (z_{n+1} - z_n)},$$

которые называются разделенными разностями функции $f(z)$. Полиномы $P_0(z) = 1$, $P_1(z) = z - z_1$, ..., $P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$, ... образуют систему, биортогональную к этой системе функционалов, и поэтому интерполяционный ряд имеет вид

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_1) \dots (z - z_n). \quad (40)$$

Этот ряд называется интерполяционным рядом Ньютона с узлами z_n . Свойства ряда Ньютона

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - 1) \dots (z - n) \quad (41)$$

с узлами в точках натурального ряда были изучены Нерлундом (1926 г.).

В. Л. Гончаров рассмотрел (1937 г.) более общий случай ряда Ньютона с узлами в точках $n^{1/\rho}$, $n = 1, 2, \dots$, $0 < \rho < \infty$, и нашел для каждого ρ индикатор сходимости. Им же и его сотрудниками найдены индикаторы сходимости для случая, когда узлы расположены в точках пересечения окружностей $|z| = n^{1/\rho}$, $n = 1, 2, \dots$, с некоторой системой лучей, исходящих из точки 0, а также для случая, когда узлы имеют угловую плотность. Эти результаты изложены В. Л. Гончаровым в названной выше статье.

А. О. Гельфонд исследовал (1930 г.) вопрос о сходимости ряда Ньютона с узлами z_n , удовлетворяющими только условию $|z_n| = n^{1/\rho}$, $n = 1, 2, \dots$. Им доказано, что всякая функция класса $[\rho, I_\rho]$, $I_\rho =$

$= \int_2^{\infty} t^{-\rho} (t-1)^{-1} dt$, представляется рядом Ньютона. Функция, представляемая таким рядом при $\rho < 1$, должна принадлежать классу $[\rho, \pi \rho \operatorname{cosec} \pi \rho]$.

Представляет значительный интерес вопрос о сходимости ряда Ньютона с произвольными узлами, имеющими единственную предельную точку в бесконечности. Укажем основные полученные в этом направлении результаты.

А. О. Гельфонд показал, что если узлы удовлетворяют условию $\sum_n |z_n|^{-1} < \infty$ и ряд (40) сходится хотя бы в одной точке, не являющейся узлом, то он сходится во всей плоскости. И. И. Ибрагимов и М. В. Келдыш установили (1947 г.) следующее достаточное условие для представимости целой функции рядом Ньютона. Пусть $\nu(r)$ — число узлов z_n в круге $|z| \leq r$. Если для целой функции $f(z)$ можно указать числа θ , $0 < \theta < \frac{1}{2}$, и λ , $0 < \lambda < \ln [\theta^{-1} (1 - \theta)]$, так, что асимптотически

$$\ln M(r, f) < \lambda \nu(\theta r), \quad (42)$$

то $f(z)$ представляется рядом Ньютона. Это условие неулучшаемо в следующем смысле: для любого $\theta > \frac{1}{2}$ можно подобрать последовательность узлов такую, что (42) выполняется, а соответствующий ряд (40) расходится.

Несколько более тонкий критерий дается следующей теоремой А. О. Гельфонда (1952 г.). Пусть $z_1, z_2, \dots$ — последовательность узлов, расположенных в порядке неубывания модулей, $\rho_1, \rho_2, \dots$ — произвольная последовательность чисел, удовлетворяющая условию $\rho_n \geq |z_n|$, $\nu_1(r)$ — количество чисел ρ_n таких, что $\rho_n \leq r$. Если целая функция $f(z)$ такова, что для любого $\rho > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln M(2\rho_n + \rho, f) - 2(\rho_n + \rho) \int_{\rho_1}^{\rho_n} \frac{\nu_1(t) dt}{(\rho + t)(2\rho_n + \rho - t)} \right] = -\infty,$$

то $f(z)$ представляется рядом (40). Точность этой теоремы характеризуется следующей оценкой. Если узлы z_n положительны и целая функция $f(z)$ представляется рядом (40), то при $x > 0$

$$\ln |f(2z_n + x)| - \ln z_n - 2(z_n + x) \int_{z_1}^x \frac{\nu(t) dt}{(x + t)(2z_n + x - t)} < c(x),$$

где $c(x)$ не зависит от n .

Из указанной теоремы А. О. Гельфонда вытекает более ранний (1930 г.) его результат. Всякая целая функция класса $[\rho, \sigma]$, где

$$\sigma = \Delta 2^{1-\rho} \int_0^1 t^{\rho-1} (2-t)^{-1} dt, \quad \Delta = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \nu(r),$$

представляется рядом (40).

В теореме Келдыша и Ибрагимова условие (42), гарантирующее представимость рядом Ньютона, конечно, является достаточным условием единственности определения функции $f(z)$ ее значениями в узлах $\{z_n\}$. Обозначая

$$V(r) = \int_0^r \frac{v(t)}{t} dt,$$

с помощью формулы Иенсена получаем значительно более слабое условие единственности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \{\ln M(r, f) - V(r)\} = -\infty. \quad (43)$$

М. В. Келдыш и И. И. Ибрагимов вводят (1947 г.) класс целых функций K_0 условием

$$\ln M(r, f) - V(\theta r) < C, \quad (44)$$

где $0 < \theta < 1$, а $C > 0$ — некоторая постоянная. Этот класс содержит класс сходимости, определяемый условием (42), и близок, хотя он и уже, к классу единственности, определяемому условием (43). Рассматривая вместо ряда (40) последовательность многочленов

$$q_n(z) = \sum_{k=1}^n f(z_k) p_{n,k}(z), \quad (45)$$

где $p_{n,k}(z)$ — многочлен, явно выражаемый через число θ из неравенства (44) и z_s , $s = 1, \dots, n$, они устанавливают, что при $f(z) \in K_0$ эта последовательность сходится к функции $f(z)$.

Таким образом, последовательность многочленов (45) решает проблему конструкции функции по интерполяционным данным.

Для класса целых функций, определяемого условием

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r, f) - V(r)}{V_1(r)} = -\infty,$$

где

$$V_1(r) = \int_0^r v(t) \left[\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right] dt,$$

проблема конструкции решена А. О. Гельфондом (1952 г.). Для целых функций этого класса им построена последовательность рациональных функций $Q_n(z)$, сходящаяся при $n \rightarrow \infty$ к функции $f(z)$ равномерно на любом компакте и такая, что $Q_n(z)$ зависит лишь от значений $f(z_k)$, $|z_k| \leq n$.

Задача Абеля — Гончарова. Задачей Абеля — Гончарова называют интерполяционную задачу с $L_n(f) = f^{(n)}(z_n)$, где $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность чисел, называемых узлами задачи (при этом, вообще говоря, не предполагается, что $z_n \neq z_k$ при $k \neq n$). Как было замечено А. О. Гельфондом (1946 г.), если узлы имеют единственную точку сгущения в бесконечности, то в классе всех целых функций существует

бесконечное множество решений этой задачи (для случаев $z_n = n$, $z_n = q^n$, $|q| \geq 1$, А. О. Гельфонд указал общий вид решения).

Приведенная здесь постановка задачи дана В. Л. Гончаровым, в течение ряда лет, начиная с 1930 г., исследовавшим этот круг вопросов. В. Л. Гончаров построил для этой задачи биортогональную последовательность многочленов в виде

$$P_n(z) = \int_{z_0}^z \int_{z_1}^{\xi_1} \dots \int_{z_{n-1}}^{\xi_{n-1}} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n.$$

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z_n) P_n(z), \quad (46)$$

формально решающий задачу, принято называть рядом Абеля — Гончарова (такой ряд при $z_n = n$ рассматривался Абелем; в этом случае $P_n(z) = \frac{1}{n!} z(z-n)^{n-1}$). В. Л. Гончаров дал следующую оценку для

остаточного члена $R_N(z) = f(z) - \sum_{n=0}^N f^{(n)}(z_n) P_n(z)$:

$$|R_N(z)| \leq \frac{S_N^{N+1}}{(N+1)!} \max_{\zeta \in D_N} |f^{N+1}(\zeta)|, \quad (47)$$

где $S_N = |z - z_0| + |z_0 - z_1| + \dots + |z_{N-1} - z_N|$, а D_N — наименьший выпуклый многоугольник, содержащий точки $z, z_0, z_1, \dots, z_N$. С помощью этой оценки он получил (1930 г.) теоремы о сходимости ряда (46):

1) если ряд $\sum_{j=1}^{\infty} |z_j - z_{j+1}|$ сходится, причем $\lim_{j \rightarrow \infty} z_j = a$, то функция $f(z)$, голоморфная в круге $|z - a| < R$, разлагается в ряд (46), равномерно сходящийся внутри этого круга;

2) если выполнено условие

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \tau_n n^{-\frac{1}{\rho}} = \tau, \quad \rho > 0, \quad \tau \geq 0,$$

где

$$\tau_n = \sum_{j=0}^{n-1} |z_j - z_{j+1}|, \quad (48)$$

то всякая целая функция класса $[\rho, \sigma]$, где $\sigma = \rho^{-1} \tau^{-\rho} \omega^{\rho} (1 + \omega)^{1-\rho}$, а ω — положительный корень уравнения $\omega^{\rho} e^{\omega+1} = 1$, разлагается в ряд (46).

В случае общего расположения узлов теорема, аналогичная последней теореме, получена И. И. Ибрагимовым (1947 г.). Обозначим символом $\Gamma(r)$ число определяемых равенством (48) точек τ_n , лежащих в

круге $|z| \leq r$. Если функция $f(z)$ удовлетворяет асимптотическому неравенству

$$\ln M(r, f) < \lambda \Gamma(\theta r),$$

$$\lambda < \ln \frac{1-\theta}{\theta} \left(0 < \theta < \frac{1}{2} \right),$$

то она разлагается в ряд (46).

Более точные результаты получены для некоторых специальных случаев расположения узлов.

Для классического случая Абеля $z_n = n$ В. Л. Гончаров показал (1935 г.), что всякая целая функция $f(z)$, представимая рядом Абеля, принадлежит классу $[1, H(\theta)]$, где функция $H(\theta)$ при $\frac{3}{4}\pi \leq |\theta| \leq \pi$ равна $|\cos \theta|$, а при $|\theta| \leq \frac{3}{4}\pi$ конечна и определяется неявно некоторым уравнением. С другой стороны, всякая целая функция $f(z)$ класса $[1, H(\theta)]$ представляется рядом Абеля. Оказывается, что в случае ряда Абеля, как и в случае ряда Ньютона с узлами $z_n = n$, класс единственности существенно шире класса сходимости. А. О. Гельфонд, воспользовавшись методом моментов, о котором будет сказано ниже, нашел (1937 г.) функцию $H_1(\theta)$, строго большую $H(\theta)$ при всех θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$, а при $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ даже равную $+\infty$, такую, что класс $[1, H_1(\theta)]$ является классом единственности. Заметим, что индикаторная диаграмма, соответствующая $H_1(\theta)$, содержит круг $|z| < 1$, а индикаторная диаграмма, соответствующая $H(\theta)$, содержится в этом круге.

Задача Абеля — Гончарова для узлов вида $z_n = n^{1/\rho} l(n)$, где $0 < \rho < \infty$, а $l(r)$ — медленно растущая функция, была изучена в 1954—1956 гг. М. А. Евграфовым. Для описания классов сходимости и единственности М. А. Евграфов использует обобщенное преобразование Бореля, которое определяется следующим образом. Пусть

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{m_k}, \quad |m_k| > 0, \quad (49)$$

есть целая функция. Обобщенным преобразованием Бореля целой функции

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{m_k} z^k$$

называется функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^{k+1}}.$$



В. Л. Гончаров.

Обычное преобразование Бореля соответствует случаю $\Phi(z) = e^z$ и для функции $F(z)$ экспоненциального типа является функцией, голоморфной в бесконечности. По теореме Поля (см. стр. 17) классы единственности и сходимости в случае классической задачи Абеля можно характеризовать не индикатором, а расположением особенностей преобразования Бореля. Последний способ оказывается удобным для более общих интерполяционных задач.

Для задачи Абеля — Гончарова с узлами $z_n = n^{1/\rho}$, $\rho > 0$, М. А. Евграфов вводит функцию $\Phi(z)$, определяющую обобщенное преобразование Бореля следующим образом. При $0 < \rho < 1$ $\Phi(z)$ определяется как каноническое произведение с нулями в точках $-(\pi k \operatorname{cosec} \pi \rho)^{1/\rho}$, $k \geq 1$, а при $\rho \geq 1$ — известная функция Миттаг-Леффлера $E_\rho(z)$. М. А. Евграфов доказывает, что целые функции порядка ρ , для которых все особенности обобщенного преобразования Бореля лежат в определенной, зависящей лишь от ρ области G_ρ , представляются рядом Абеля — Гончарова, а также, что этот класс является в некотором смысле максимальным классом сходимости.

Аналогичные результаты получены М. А. Евграфовым и для более общего расположения узлов $z_n = n^{1/\rho} l(n)$, где $l(r)$ — медленно растущая функция. Для задачи с узлами $z_n = n^{1/\rho}$, $\rho > \frac{1}{2}$, им получено также полное описание класса единственности.

Результаты М. А. Евграфова включают результаты В. Л. Гончарова и А. О. Гельфонда, относящиеся к классической задаче Абеля.

В. Л. Гончаров описал (1932 г.) классы сходимости и единственности для задачи с периодической последовательностью узлов. Пусть $z_{n+p} = z_n$ при всех $n = 1, 2, \dots$ и некотором $p > 1$. Обозначим ζ_0 ближайший к точке 0 корень функции

$$\begin{vmatrix} \exp(\zeta z_0) & \exp(\omega \zeta z_0) & \dots & \exp(\omega^{p-1} \zeta z_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \exp(\zeta z_{p-1}) & \omega^{p-1} \exp(\omega \zeta z_{p-1}) & \dots & \omega^{(p-1)^2} \exp(\omega^{p-1} \zeta z_{p-1}) \end{vmatrix}, \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}.$$

Класс $[1, |\zeta_0|)$ является классом сходимости, а класс $[1, |\zeta_0|]$ не является даже классом единственности.

Подобная ситуация складывается в случае узлов $z_n = q^n$, $|q| \geq 1$, рассмотренном А. О. Гельфондом (1945 г.). Обозначим ζ_0 ближайший к точке 0 корень функции

$$\Phi_q(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k! q^{\frac{k(k+1)}{2}}}.$$

Класс целых функций $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, коэффициенты которых удовлетворяют условию

$$c_k = O\left(\frac{\sigma^k}{k! |q|^{\frac{k(k+1)}{2}}}\right), \quad \sigma > 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (50)$$

при $\sigma < |\xi_0|$ является классом сходимости, а при $\sigma = |\xi_0|$ не является даже классом единственности. М. А. Евграфов показал (1953 г.), что это утверждение сохраняет силу и для узлов вида $z_n = q^n + \lambda_n$, где λ_n достаточно малы. Заметим, что при $|q| = 1$ класс, определяемый условием (50), содержится в классе $[1, \sigma]$.

С. Н. Бернштейн, пользуясь методами конструктивной теории функций, доказал (1930 г.) следующую теорему единственности, относящуюся к рассматриваемому кругу вопросов. Если каждая производная целой функции класса $\left[1, \frac{\pi}{2}\right)$ имеет корень на отрезке $[0, 1]$, то эта функция

тождественно равна нулю. Класс $\left[1, \frac{\pi}{2}\right)$ нельзя заменить классом

$\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ — об этом свидетельствует пример функции $f(z) = \sin \frac{\pi}{2} z$.

Однако оказывается, что при дополнительных предположениях относительно расположения корней производных на отрезке $[0, 1]$ класс

$\left[1, \frac{\pi}{2}\right)$ можно заменить более широким классом. А. О. Гельфонд и

И. И. Ибрагимов рассмотрели (1947 г.) случай, когда эти корни попадают в две точки, 0 и 1, т. е. на функцию $f(z)$ накладываются такие ограничения:

$$f^{(v_n)}(1) = 0, \quad f^{(k)}(0) = 0, \quad k \neq v_n, \quad (51)$$

где $\{v_n\}$ — некоторая последовательность натуральных чисел. Ими доказана следующая теорема. Положим

$$\sigma_n = \left[\frac{v_n!}{(v_n - v_{n-1})! \dots (v_1 - v_0)! v_0!} \right]^{\frac{1}{v_n}}, \quad \lambda_s = \min_{k > s} \sigma_k.$$

Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty,$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{v_n} z^{v_n}, \quad |a_{v_n}| < \delta v_n^{-1} \lambda_n^{-v_n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n < \infty,$$

то из условий (51) следует, что $f(z) \equiv 0$. В частности, если $v_n = pn + 1$, где p — натуральное число, то всякая функция $f(z)$ класса $[1, pe^{-1})$, удовлетворяющая условию (51), должна равняться нулю. Этот результат точен в следующем смысле: каково бы ни было $\alpha > 1$, при достаточно большом p в классе $[1, \alpha pe^{-1})$ существует нетривиальная функция, удовлетворяющая условию (51). Заметим, что при $p \geq 5$ справедливо неравенство $pe^{-1} > \frac{\pi}{2}$.

Метод А. О. Гельфонда и И. И. Ибрагимова основан на полученной ими оценке остаточного члена $R_N(z)$, которая для случая, когда все узлы лежат в точках 0 и 1, существенно точнее оценки В. Л. Гончарова (47).

При $v_n = pn + l$ (p и l — натуральные числа) вопрос, рассмотренный А. О. Гельфондом и И. И. Ибрагимовым, другим методом исследовал

Ю. А. Казьмин (1965 г.). Он получил необходимые и достаточные условия для единственности и представимости целой функции экспоненциального типа по заданным значениям $f^{(\nu_n)}(1)$ и $f^{(k)}(0)$ ($k \neq \nu_n$) рядом Абеля — Гончарова. Эти условия выражаются в терминах расположения особенностей преобразования Бореля.

Используя, по-видимому впервые в теории интерполяции, метод бесконечных систем линейных уравнений, М. М. Джрбашян изучил (1952 г.) более общий вопрос. Пусть даны две последовательности натуральных чисел $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$, $\mu_n \leq \lambda_n < \mu_{n+1}$, и последовательность комплексных чисел $\{\alpha_n\}$. Требуется установить, при каких условиях из равенств

$$f^{(\mu_n)}(\alpha_n) = 0, \quad f^{(m)}(0) = 0, \quad m \neq \lambda_n, \quad (52)$$

следует, что $f(z) \equiv 0$.

М. М. Джрбашян нашел для функций класса $[\rho, \sigma]$ достаточное условие, в некотором смысле близкое к необходимому. Отметим некоторые следствия этого результата. Пусть

$$\mu_n = pn + r, \quad \lambda_n = pn + q \quad (0 \leq r \leq p-1, \quad r \leq q \leq p+r-1).$$

Если

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} k^{-\frac{1}{\rho}} |\alpha_k| < \eta_p(\sigma)^{-\frac{1}{\rho}} p^{\frac{1}{\rho}-1},$$

где η_p — корень уравнения

$$\sum_{j=0}^{p-1} \omega^{-j(q-r)} e^{\omega^j \eta_p} = \frac{2p\eta_p^{q-r}}{(q-r)!}, \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{p}},$$

то всякая функция класса $[\rho, \sigma]$, удовлетворяющая условиям (52), тождественно равна нулю. Например, если $f(z) \in [\rho, \sigma]$,

$$f^{(n)}(\alpha_n) = 0 \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} k^{1-\frac{1}{\rho}} |\alpha_k| < \ln 2 (\sigma)^{-\frac{1}{\rho}},$$

то $f(z) \equiv 0$. При $\rho = 1$ этот результат был ранее получен Такенакой (Япония). Выбирая $\mu_n = \lambda_n = pn + r$, видим, что в теореме А. О. Гельфонда и И. И. Ибрагимова класс $[1, pe^{-1})$ можно заменить классом $[1, (p!)^{\frac{1}{p}})$.

М. М. Джрбашян доказал также, что найденное им достаточное условие обеспечивает представимость функции класса $[\rho, \sigma]$, удовлетворяющей условию $f^{(m)}(0) = 0$ ($m \neq \lambda_n$), специальным рядом по заданным значениям $f^{(\mu_n)}(\alpha_n)$. Позднее (1957 г.) он распространил часть своих результатов на случай функций нескольких комплексных переменных.

К этим исследованиям примыкает вопрос о нахождении постоянной Уиттекера. Постоянная w определяется как $\inf$ тех значений σ , для которых в классе $[1, \sigma)$ существует функция $f(z)$, имеющая вместе со всеми своими производными хотя бы один корень в круге $\{|z| < 1\}$.

Точное значение w до сих пор неизвестно. М. А. Евграфов показал (1954 г.), что всякая функция класса $[1, w)$ разлагается в ряд Абеля — Гончарова по любой системе узлов, лежащей в круге $\{|z| < 1\}$. М. М. Драгилев установил (1960 г.), что w совпадает с $\sup$ тех значений c , для которых всякая функция, голоморфная в круге $\{|z| < 1\}$, представима внутри своего круга голоморфности рядом Абеля — Гончарова по системе узлов $\{z_n\}$, удовлетворяющих условию $|z_n| < \frac{c}{n+1}$.

Ю. К. Суетин доказал (1962 г.), что если целая функция 1-го порядка типа σ имеет вместе со всеми своими производными по крайней мере n нулей в круге $\{|z| \leq 1\}$, то $I_0(2\sigma e) \geq e^{2n}$, где $I_0(z) = J_0(iz)$ — функция Бесселя. Это неравенство точнее полученного Эрдешем и Реньи: $\sigma \geq ne^{-1}$.

Обзор многих идей, применяемых для исследования задачи Абеля — Гончарова, дан в монографии М. А. Евграфова «Интерполяционная задача Абеля — Гончарова» (1954 г.).

Более общие интерполяционные задачи. А. О. Гельфонд рассмотрел (1946 г.) следующую интерполяционную задачу. Дана треугольная таблица чисел

$$\left. \begin{array}{ccc} z_{00} & & \\ z_{01} & z_{11} & \\ z_{02} & z_{12} & z_{22} \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \right\}, \quad (53)$$

называемых узлами. Функционалы $L_n(f)$ определяются как значения обобщенных разделенных разностей функции $f(z)$ для n -й строки, т. е.

$$L_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\prod_{s=0}^n (\zeta - z_{sn})} d\zeta$$

(Γ_n — контур, охватывающий все точки $z_{0n}, z_{1n}, \dots, z_{nn}$). А. О. Гельфонд доказал весьма общую теорему о представимости функции интерполяционным рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(f) P_n(z), \quad (54)$$

где $P_n(z)$ — полиномы (образующие систему, биортогональную к системе функционалов L_n). Чтобы сформулировать эту теорему, введем некоторые обозначения. Пусть Δ_k — выпуклая оболочка множества $\{z_{sk}\}_{s=0}^k$, d_k — диаметр наименьшего круга, содержащего Δ_k и Δ_{k-1} , $\kappa_n = \sum_{k=1}^n d_k$, $K(r)$ — число точек z_n в круге $|z| \leq r$. Если для целой функции $f(z)$ выполнено асимптотическое неравенство

$$\ln M(r, f) < \lambda K(\theta r), \quad 0 < \lambda < \ln \frac{1-\theta}{\theta}, \quad 0 < \theta < \frac{1}{2},$$

то эта функция представляется рядом (54).

Теорема Гельфонда содержит ранее сформулированный результат И. И. Ибрагимова о сходимости ряда Абеля — Гончарова. А. О. Гельфондом установлены также другие критерии представимости целой функции рядом (54). В частности, если все узлы расположены в круге $|z| < R$, то условие

$$\ln M(r, f) = O\left(r^{-\frac{1}{2} - \varepsilon} \frac{r}{R}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad \varepsilon > 0,$$

гарантирует представимость функции $f(z)$ рядом (54).

В 1937 г. А. О. Гельфонд нашел новый подход к интерполяционным задачам для целых функций экспоненциального типа. Он использовал интегральное представление функций экспоненциального типа

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} e^{\xi z} f(\xi) d\xi,$$

где $f(\xi)$ — преобразование Бореля для $F(z)$, а Γ — контур, охватывающий все особенности $f(\xi)$. В силу непрерывности функционалов $L_n(F)$ можно внести их под знак интеграла и получить равенство

$$L_n(F) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} U_n(\xi) f(\xi) d\xi,$$

где $U_n(\xi) = L_n \underset{z}{(e^{\xi z})}$. Во многих интерполяционных задачах $U_n(\xi) = [U(\xi)]^n$, где $U(\xi)$ — некоторая голоморфная функция. Например, если $L_n(F)$ суть разделенные разности функции $F(z)$ для $z_n = n$ ($n = 0, 1, \dots$), то $U_n(\xi) = (e^{\xi} - 1)^n$, а если $L_n(F) = F^{(n)}(n)$, то $U_n(\xi) = (\xi e^{\xi})^n$. В таких случаях интерполяционная задача сводится к специальной проблеме моментов. Моментами называются числа

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C [U(\xi)]^n f(\xi) d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (55)$$

где $U(\xi)$ — функция, голоморфная в некоторой области D , а C — замкнутый контур, лежащий в D и содержащий внутри себя все особенности функции $f(\xi)$. Требуется установить, однозначно ли определяется функция $F(z)$ моментами, и, если это так, дать способ ее конструкции. Решение проблемы дается следующей теоремой Гельфонда.

Если область D односвязна и содержит точку 0, а функция $U(\xi)$ однолистка в D и $U(0) = 0$, $U'(0) = 1$, то функция $F(z)$ представляется во всей z -плоскости рядом полиномов

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z). \quad (56)$$

Полиномы $P_n(z)$ определяются соотношениями

$$P_n(z) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{d\xi^n} \left\{ \frac{\lambda'(\xi) \xi^{n+1} e^{z\xi}}{[\lambda(\xi)]^{n+1}} \right\}_{\xi=0},$$

где $\lambda(\zeta)$ — функция, конформно отображающая область D на некоторый круг $|\omega| < \rho$ так, что $\lambda(0) = 0$, $\lambda'(0) = 1$, а коэффициенты c_n — по формулам

$$c_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^m B_{nmp} A_p,$$

в которых числа B_{nmp} определяются областью D и функцией $U(\zeta)$.

Заметим, что если функция $U(\zeta)$ сама отображает область D на круг, то $\lambda(\zeta) = U(\zeta)$, $c_n = A_n$ и ряд (56) является интерполяционным. Требование однолиственности функции $U(\zeta)$ в области D существенно: при его нарушении можно построить целую функцию $F(z)$, у которой все особенности преобразования Бореля лежат в D и $A_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Результат А. О. Гельфонда включает полученные ранее теоремы Гончарова о представимости функции рядом Абеля и результаты Нерлунда о представимости функции рядом Ньютона с узлами $z_n = n$. Однако не для всех интерполяционных задач функционалы $L_n(F)$ можно представить в виде моментов (55). Например, это невозможно для задачи с треугольной таблицей узлов (53) и даже для задачи Абеля — Гончарова в общем случае.

М. А. Евграфов рассмотрел (1957 г.) задачу, в которой

$$L_n(F) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C U_n(z) F(z) dz, \quad (57)$$

где функции $U_n(z)$ — голоморфны на контуре C и вне него и имеют в окрестности бесконечно удаленной точки разложение

$$U_n(z) = \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_{nk}}{z^{k+1}}.$$

Задача с треугольной таблицей узлов (53) получается из этой общей задачи при

$$U_n(z) = \left\{ \prod_{s=0}^n (z - z_{sn}) \right\}^{-1},$$

задача Абеля — Гончарова с произвольными узлами z_n — при

$$U_n(z) = (z - z_n)^{-n-1}.$$

М. А. Евграфов получил условия представимости целой функции интерполяционным рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(F) P_n(z), \quad (58)$$



М. А. Евграфов.

где $P_n(z)$ — многочлены, образующие систему, биортогональную к системе функционалов L_n . Эти условия формулируются в терминах обобщенного преобразования Бореля, причем предполагается, что функции $U_n(z)$ удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям. Мы не приводим здесь эти результаты из-за их громоздкости, однако заметим, что они содержат значительную часть изложенных выше результатов М. А. Евграфова по задаче Абеля — Гончарова с узлами $z_n = n^{1/\rho} l(n)$.

При других условиях, накладываемых на функции $U_n(z)$, задачу о представимости функции рядом (58) рассмотрел в 1959 г. А. О. Гельфонд. Пусть последовательности $\{r_n\}$, $r_n > 0$; $\{\omega_n\}$, $\omega_{n+1} \geq \omega_n \geq 1$, и $\{m_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \infty$, таковы, что при $|z| = r > r_n$ справедливо соотношение

$$|U_n(z)| \leq \omega_n r^{-n+m_n-1} (r - r_n)^{m_n}.$$

Предположим, что $\rho_n = \max_{k \leq n} r_k m_k \omega_k \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда всякая целая функция $f(z)$, удовлетворяющая при некотором $\theta > 1$ условию

$$M(r, f) \leq \max_n \left[r^n \theta^{-n} \mu^n \prod_{k=1}^n \rho_{k-1}^{-1} \right], \quad r > r_0,$$

где μ — наименьший корень уравнения

$$1 - x - \omega \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^k} \left(\frac{x}{\omega} \right)^k = 0, \quad \omega = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k,$$

представима во всей плоскости рядом (58).

А. Д. Соловьев исследовал (1957 г.) задачу, в которой интерполяционные данные имеют вид

$$L_n(F) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \xi^n \varphi_n(\xi) f(\xi) d\xi,$$

где $f(\xi)$ — обобщенное преобразование Бореля для $F(z)$, построенное с помощью функции

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{m_n}, \quad \left| \frac{m_{n+1}}{m_n} \right| \uparrow \infty,$$

$\varphi_n(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \xi^k$ голоморфны при $|\xi| < R$, а контур C охватывает все особенности $f(\xi)$ и лежит в круге $|\xi| < R$. Для случая, когда $F(z)$ является целой функцией экспоненциального типа, а $\Phi(z) = e^z$, эта задача является более общей, по сравнению с задачей (57), ибо функционалы (57) могут быть преобразованы к виду

$$L_n(F) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C v_n(\xi) f(\xi) d\xi,$$

где $v_n(\zeta)$ — целые функции экспоненциального типа, для которых функции $U_n(z)$ являются преобразованиями Бореля.

А. Д. Соловьев изучал условия представимости целой функции $F(z)$ интерполяционным рядом (58) в терминах убывания ее коэффициентов Тейлора. Приведем один из его результатов. Классом $\{\Phi, \sigma\}$ будем называть класс целых функций $F(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h z^h$, для которых $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k m_k|} < \sigma$. Если равномерно в любом круге $|\zeta| \leq r < R$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\zeta) = \varphi(\zeta)$ и α — ближайший к началу корень функции $\varphi(\zeta)$, то всякая целая функция класса $\{\Phi, |\alpha|\}$ представляется рядом (58). При любом $\varepsilon > 0$ в классе $\{\Phi, |\alpha| + \varepsilon\}$ найдется функция, не представляемая рядом (58).

Интерполяционный ряд Лагранжа. Интерполяционным рядом Лагранжа называется ряд вида

$$f(z) = \Phi(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\Phi'(z_n)(z - z_n)}, \quad (59)$$

где $\Phi(z)$ — целая функция с простыми корнями в узлах $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ ($z_n \neq z_k$ при $n \neq k$ и $|z_n| \uparrow \infty$). Этот ряд является интерполяционным рядом для задачи с системой функционалов $L_n(f) = f(z_n)$, целые функции $P_n(z) = \frac{\Phi(z)}{\Phi'(z_n)(z - z_n)}$ образуют систему, биортогональную к этой системе функционалов. В случае сходимости ряда (59) целая функция $f(z)$ дает решение интерполяционной задачи, т. е.

$$f(z_n) = a_n. \quad (60)$$

Иногда пользуются также обобщенным рядом Лагранжа

$$f(z) = \Phi(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\Phi'(z_n)(z - z_n)} \left(\frac{z}{z_n}\right)^{k_n}, \quad (61)$$

где k_n — натуральные числа. Множители $\left(\frac{z}{z_n}\right)^{k_n}$ добавляются для сходимости. Очевидно, что для любого множества узлов $|z_n| \uparrow \infty$ и любой последовательности комплексных чисел $\{a_n\}$ можно подобрать числа k_n так, чтобы ряд сходился.

Представление целой функции рядом Лагранжа используется при изучении вопроса о том, как асимптотическое поведение функции на некотором множестве точек $\{z_n\}$ влияет на ее асимптотическое поведение во всей плоскости, внутри угла или на некоторой кривой.

А. Ф. Леонтьев рассматривал следующую задачу: определить, каким условиям должна удовлетворять фиксированная последовательность точек $\{z_n\}$, $|z_n| \uparrow \infty$, комплексной плоскости для того, чтобы по каждой последовательности чисел $\{a_n\}$, удовлетворяющей асимптотическому неравенству

$$\ln |a_n| = O(|z_n|^\rho),$$

можно было построить целую функцию класса $[\rho, \infty)$, удовлетворяющую равенству (60). Используя формулу (61) для представления искомой функции, он доказал (1957 г.), что при нецелом ρ такими условиями являются

$$\left. \begin{aligned} \text{а)} \quad & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n |z_n|^{-\rho} < \infty, \\ \text{б)} \quad & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |z_n|^{-\rho} \ln \frac{1}{|\Phi'(z_n)|} < \infty, \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

где

$$\Phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, \rho\right), \quad \rho = [\rho].$$

При целом ρ условие б) несгущаемости узлов следует заменить более сложным

$$\begin{aligned} \text{б')} \quad & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |z_n|^{-\rho} \ln \frac{1}{|\Psi'_s(z_n)|} < \infty, \\ & s = 1, 2, \dots, q, \end{aligned}$$

где

$$\Psi_s(z) = \prod_{\lambda_n \in D_s} \left(1 - \frac{z^m}{z_n^m}\right).$$

Здесь m — натуральное число, большее ρ , D_s ($s = 1, 2, \dots, q$) — углы $|\arg z - \varphi_s| < k < \frac{\pi}{m}$ и φ_s выбраны так, что углы D_s покрывают всю плоскость. Условием б') можно пользоваться и при нецелом ρ . А. Ф. Леонтьев указал и другие условия несгущаемости узлов, эквивалентные условию б'). Он показал, что условия

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln |\lambda_n|} \leq \rho, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \left| \frac{1}{\Phi'(z_n)} \right|}{\ln |z_n|} \leq \rho \quad (63)$$

являются необходимыми и достаточными для того, чтобы существовала функция класса $[\rho, \infty]$, дающая решение задачи (60) для любой системы чисел $\{a_n\}$, удовлетворяющей неравенству

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln |a_n|}{\ln |z_n|} \leq \rho.$$

В более общем классе $[\rho(r), \infty)$ аналогичную задачу (с условием $\ln |a_n| = O(|z_n|^{\rho(r)} |z_n|)$) исследовала О. С. Фирсакова (1957 г.). По последовательности узлов, удовлетворяющей условию

$$\hat{\text{а)}} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |z_n|^{-\rho(r)} n < \infty,$$

строится присоединенная функция $\Phi_1(z)$. При нецелом ρ в качестве $\Phi_1(z)$ принимается каноническое произведение с простыми корнями в

точках $\{z_n\}$, а при целом ρ предварительно к точкам $\{z_n\}$ добавляются еще точки $\{\mu_n\}$ так, чтобы для $\{z_n\} \cup \{\mu_n\}$ выполнялось условие $\hat{a})$ и, кроме того, условие Линделефа

$$\overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} R^{\rho - \rho(R)} \left\{ \sum_{|z_n| \leq R} z_n^{-\rho} + \sum_{|\mu_n| \leq R} \mu_n^{-\rho} \right\} < \infty.$$

Присоединенная функция в этом случае не единственная.

Приведем результат О. С. Фирсаковой. Для того чтобы каждой последовательности чисел $\{a_n\}$ с ограничением

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |z_n|^{-\rho(l(z_n))} \ln |a_n| < \infty$$

соответствовала целая функция класса $[\rho(r), \infty)$, с помощью которой решается интерполяционная задача, достаточно, чтобы выполнялось условие $\hat{a})$ и некоторая присоединенная функция $\Phi_1(z)$ удовлетворяла условию

$$\hat{b}) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |z_n|^{-\rho(l(z_n))} \ln \frac{1}{|\Phi_1'(z_n)|} < \infty,$$

и необходимо, чтобы кроме выполнения условия $\hat{a})$ условие $\hat{b})$ выполнялось для всех присоединенных функций.

Г. Д. Трошин, продолжая исследования А. Ф. Леонтьева, нашел условия, накладываемые на узлы, применительно к классу функций конечного порядка внутри некоторого угла. Эти условия аналогичны (63), но роль функции $\Phi(z)$ играет произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^m}{z_n^m} \right) \left(1 - \frac{z^m}{\bar{z}_n^m} \right)^{-1},$$

где $\frac{\pi}{2\rho} > \frac{\pi}{2m} > \frac{\pi}{2\rho} - \omega$, а ω — некоторое положительное число.

Г. П. Лапин продолжил исследования А. Ф. Леонтьева в другом направлении, рассмотрев более общую задачу интерполяции

$$f^{(k-1)}(z_n) = a_{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, p_n, \quad (64)$$

причем числа a_{nk} должны удовлетворять естественному условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \left(\frac{\max_k}{k} |a_{nk}| \right)}{\ln |z_n|} \leq \rho.$$

Он получил необходимые и достаточные условия существования функции $f(z)$ класса $[\rho, \infty]$, дающей решение задачи.

А. Ф. Леонтьев рассмотрел (1958 г.) также следующий вопрос. Пусть узлы интерполяции $\{z_n\}$ удовлетворяют единственному условию а). Требуется установить, каковы должны быть значения a_n , чтобы в классе $[\rho, \infty)$ или $[\rho, \infty]$ существовала функция $f(z)$, с помощью которой решается интерполяционная задача (60). Эти условия должны,

конечно, накладывать ограничения на те числа a_n , которые соответствуют близким узлам. Леонтьев нашел такие необходимые и достаточные условия.

Более тонкую, чем тип, характеристику роста целой функции дает индикатор. Пусть $\Omega = \{z_n\}$ — некоторое множество, правильно распределенное при уточненном порядке $\rho(r) \rightarrow \rho$ и такое, что кружки с центрами в z_n и радиусами $r_n = d |z_n|^{1 - \frac{1}{2} \rho(|z_n|)}$ при некотором $d > 0$ не пересекаются. Пусть $H_\Omega(\theta)$ — индикатор соответствующего этому множеству канонического произведения $\Phi_\Omega(z)$. Пользуясь теорией функций вполне регулярного роста, Б. Я. Левин доказал (1940 г.) следующие теоремы о представлении целой функции рядом (59).

1. Если индикатор $h(\theta)$ целой функции $f(z)$ при уточненном порядке $\rho(r)$ удовлетворяет неравенству $h(\theta) < H_\Omega(\theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$), то $f(z)$ представляется рядом (59).

Заметим, что функция $\Phi_\Omega(z)$ обращается в нуль во всех узлах $\{z_n\}$ и имеет индикатор $H_\Omega(\theta)$. Таким образом, класс $[\rho(r), H_\Omega(\theta)]$ есть класс сходимости, а класс $[\rho(r), H_\Omega(\theta)]$ не является даже классом единственности. Напомним, что в случае ряда Ньютона класс сходимости существенно уже класса единственности.

2. Для того чтобы существовала целая функция класса $[\rho(r), H_\Omega(\theta)]$, дающая решение интерполяционной задачи (60), необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{H_\Omega(\theta_n) |z_n|^{\rho(|z_n|)}} \leq 1, \quad \theta_n = \arg z_n. \quad (65)$$

Эти результаты О. С. Фирсакова перенесла на тот более общий случай, когда от узлов интерполяции требуется только, чтобы они образовывали правильно распределенное множество (см. стр. 25).

Для изучения поведения целых функций экспоненциального типа на вещественной оси весьма существенными оказываются формулы (59) и (61) с узлами интерполяции на (или вблизи) вещественной оси. Простейшая теорема о представлении: если $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа не большего π и $f(x) \in L^2(-\infty, +\infty)$, то

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{f(n)}{z-n}. \quad (66)$$

Формулу (66) иногда называют формулой В. А. Котельникова. Заметим, что при условии $f(iy)e^{-\pi|y|} \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \pm \infty$ требование $f(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ можно заменить требованием, наложенным лишь на значения $f(z)$ в целых точках: $\{f(n)\}_{n=-\infty}^{\infty} \in l^2$. Весьма удобна для приложений также формула

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{f(n)}{z-n} \left[\frac{\sin \varepsilon(z-n)}{\varepsilon(z-n)} \right]^p, \quad (67)$$

где $\varepsilon > 0$, а p — натуральное число. Это формула, установленная С. Н. Бернштейном (1946 г.) и Р. Боасом, дает представление целой функции экспоненциального типа при условиях

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) + h\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 2\pi,$$

$$|f(n)| < M(1 + |n|^{p-\delta}), \quad \delta > 0, \quad M = \text{const}, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

В. А. Марченко принадлежит следующее обобщение (1950 г.) формулы (67). Пусть $f(z)$ — функция класса $[1, \infty)$, для которой

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) + h\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2\varepsilon < 2\pi, \quad \varepsilon > 0,$$

$\varphi(z)$, $\varphi(0) = 1$, — функция экспоненциального типа 1 такая, что при любом вещественном t

$$\{f(n) \varphi(\varepsilon(t - n))\}_{n=-\infty}^{\infty} \in l^2. \quad (68)$$

Тогда

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{f(n)}{z - n} \varphi(\varepsilon(z - n)).$$

Функция $\varphi(z)$, обладающая свойством (68), существует, если $|f(x)| \leq \omega(x)$, $-\infty < x < +\infty$, где $\omega(x)$ — функция, удовлетворяющая условиям

$$\omega(x) \leq 1, \quad \omega(x + y) \leq \omega(x) \omega(y), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln \omega(x)}{1 + x^2} dx > -\infty.$$

Л. И. Ронкин показал (1953 г.), что второе условие можно заменить требованием монотонного убывания $\omega(x)$ и $\omega(-x)$ при $0 \leq x < \infty$.

Формула Лагранжа дает сильный аппарат для исследования вопроса о том, как поведение функции экспоненциального типа в целых точках влияет на ее поведение на вещественной оси. Весьма важной в этом круге вопросов является следующая теорема Картрайт (1936 г.): если целая функция экспоненциального типа ограничена в целых точках:

$$|f(n)| \leq M, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

и

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) + h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sigma < 2\pi, \quad (69)$$

то

$$|f(x)| \leq C(\sigma) M,$$

где $C(\sigma)$ зависит только от σ . Одно из наиболее простых доказательств этой теоремы основано на прямом применении интерполяционной формулы (69). Ряд работ был посвящен оценке величины $C(\sigma)$. Наиболее точную оценку дал С. Н. Бернштейн (1946 г.), показавший, что

$$L_{N-1} < C(\sigma) \leq L_N,$$

где

$$N = [\sigma(\pi - \sigma)^{-1}],$$

$$L_N = \frac{1}{N} \left[\operatorname{cosec} \frac{\pi}{2N} + \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2N} + \dots + \operatorname{cosec} \frac{(2N-1)\pi}{2N} \right].$$

При $\sigma \rightarrow \pi$ он получил асимптотическую формулу

$$C(\sigma) \sim \frac{2}{\pi} \ln \frac{\pi}{\pi - \sigma}.$$

В ряде работ теорема Картрайт обобщена на случай нецелых узлов. В частности, Даффин и Шеффер показали (1945 г.), что если

$$|z_n - n| \leq L < \infty, \quad \inf_{n \neq m} |z_n - z_m| = \delta > 0, \quad (70)$$

то теорема Картрайт остается верной при замене условия (69) условием

$$|f(z_n)| \leq M, \quad (71)$$

естественно, с другим значением $C(\sigma)$, зависящим в этом случае еще от L и δ . Н. И. Ахиезер и Б. Я. Левин показали (1952 г.), что можно освободиться от второго из требований (70), добавив к условию (71) еще необходимое в этом случае условие ограниченности всех разделенных разностей (для значений функции $f(z)$ в точках $\{z_n\}$) до определенного порядка, зависящего от L . Эти результаты основаны на обобщении формул (66) и (67) на случай нецелых узлов.

В работах Н. И. Ахиезера (1952, 1966 гг.) и Б. Я. Левина (1957 г.) изучен также вопрос о перенесении теоремы Картрайт на случай целых функций экспоненциального типа, вообще говоря, растущих, но имеющих мажоранту на последовательности точек вещественной оси. Самый общий из полученных ими результатов таков.

Пусть $\omega(z) = P(z) + iQ(z)$ ($P(z)$ и $Q(z)$ — вещественные целые функции) есть целая функция класса P , т. е. $\omega(z) \in [1, \infty)$ и

$$\omega(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z < 0,$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq h\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

где

$$h(\theta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \ln |\omega(re^{i\theta})|.$$

Кроме того, предполагается, что

$$Q(iy) [P(iy)]^{-1} = O(1), \quad y \rightarrow \pm \infty.$$

Известно, что при выполнении первого и второго условий все корни функций $P(z)$ и $Q(z)$ вещественны. Пусть $\{\lambda_n\}$ — корни $P(z)$ и функция $f(z) \in [1, \infty)$ удовлетворяет во всех точках λ_n условиям

$$|f(\lambda_n)| \leq |\omega(\lambda_n)|$$

и

$$f(iy) [\omega(-i|y|)]^{-1} = O(e^{-\varepsilon|y|}), \quad y \rightarrow \pm \infty, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда при всех x , $-\infty < x < \infty$, справедливо неравенство

$$|f(x)| \leq C |\omega(x - ih)|, \quad (72)$$

где $h > 0$, а $C < \infty$ не зависит от x . Если потребовать дополнительно, чтобы корни $\alpha_h + i\beta_h$ функции $\omega(z)$ удовлетворяли условию

$$\sum_h \frac{\beta_h}{(x - \alpha_h)^2 + \beta_h^2} = O(1), \quad x \rightarrow \pm \infty,$$

то в (72) можно взять $h = 0$. Теорема Картрайт получается из этого результата при

$$\omega(z) = e^{i\pi\left(z + \frac{1}{2}\right)} = -\sin \pi z + i \cos \pi z.$$

С помощью интерполяционной формулы

$$f(z) - f(0) - f'(0) \frac{\sin \pi z}{\pi} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n f(n) z}{(z - n) n},$$

которая является частным случаем формулы (61), С. Н. Бернштейн обнаружил (1948 г.) свойство целой функции конечной степени (ц. ф. к.с.), названное им явлением интерференции.

Пусть ц. ф. к. с. π удовлетворяет на вещественной оси условиям

$$f(x) = o(x), \quad x \rightarrow \infty; \quad |f(n)| \leq 1, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (73)$$

Тогда

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} \frac{1}{2} \left| f\left(x + \frac{1}{2}\right) + f\left(x - \frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{4}{\pi}.$$

Как показывает пример

$$f(x) = \frac{2 \sin \pi x}{\pi x} - \cos \pi x,$$

константа $\frac{4}{\pi}$ точная. А. Ф. Тиман обобщил (1953 г.) эту теорему, заменив конечноразностный оператор более общим оператором

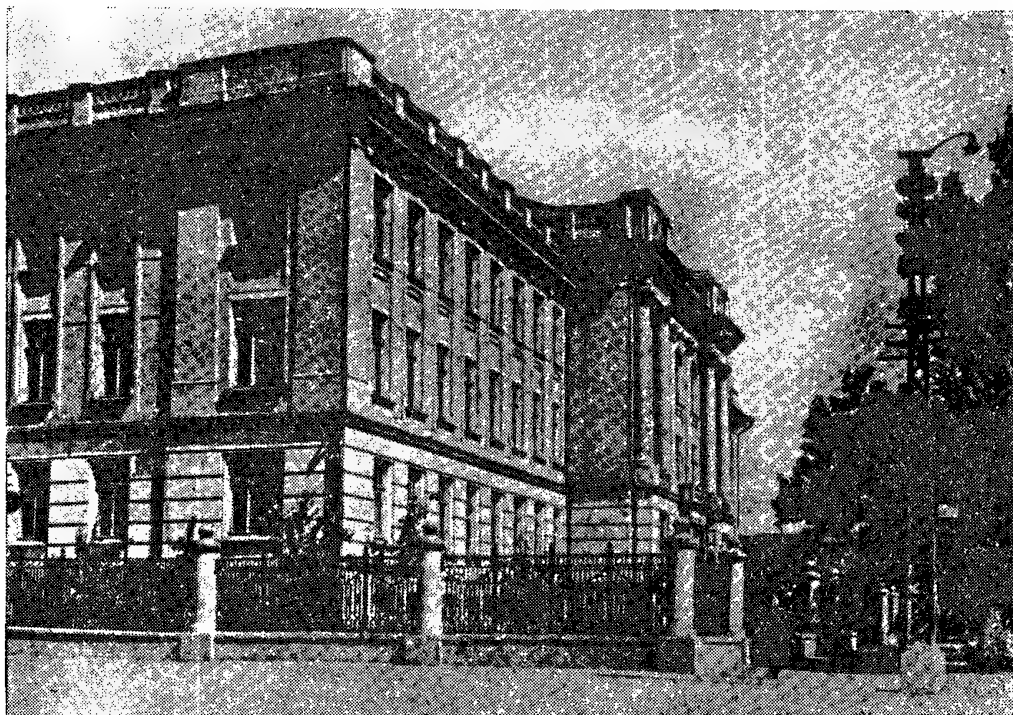
$$F(f(z)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s + z) d\rho(s),$$

где $\rho(s)$ — вещественная функция, удовлетворяющая при некотором $\sigma_0 > \pi$ условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma_0 |s|} |d\rho(s)| < \infty.$$

Функция $\rho(s)$ называется «порождающей интерференцию», если для целой функции конечной степени π из условий (73) следует

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |F(f(x))| \leq L < \infty.$$



Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского.

Тиман доказал, что, для того чтобы функция $\rho(s)$ порождала интерференцию, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi s} d\rho(s) = 0.$$

Дальнейшие результаты в этом круге вопросов получены Р. Боасом (1955 г.) и Н. И. Ахиезером (1965 г.).

Применения интерполяционного ряда Ньютона для изучения арифметических свойств целых функций. Первая теорема в этом направлении была получена Г. Поля (1915 г.). Если целая функция $f(z)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(z)| < M2^{\alpha|z|}, \quad \alpha < 1, \quad M = \text{const},$$

и в точках натурального ряда принимает целые значения, то $f(z)$ — полином.

Доказательство таких теорем основано на следующем простом соображении. Из ограничения на рост следует представимость целой функции $f(z)$ интерполяционным рядом Ньютона с узлами в точках натурального ряда. Из сходимости этого ряда следует стремление к нулю его коэффициентов. С другой стороны, эти коэффициенты должны быть целыми числами. Поэтому ряд обрывается и $f(z)$ — полином. Применяя эту идею, А. О. Гельфонд показал (1933 г.), что целая функция $f(z)$, принимающая целые значения в точках геометрической прогрессии

$\{q^n\}_{n=0}^{\infty}$ ($q > 1$ — целое) и допускающая оценку

$$f(z) = o\left(\exp\left\{\frac{\ln^2 |z|}{4 \ln q} - \frac{1}{2} \ln |z|\right\}\right), \quad (74)$$

есть полином. Эта теорема точна: существует целая трансцендентная функция, удовлетворяющая условию (74), в котором o заменено символом O , и принимающая в точках $\{q^n\}_{n=0}^{\infty}$ целые значения. В недавно опубликованной статье (1967 г.) А. О. Гельфонд обобщил эту теорему, предполагая, что не только сама функция, но и ее производные до некоторого порядка $s = 0$ принимают целые значения в точках $\{q^n\}_{n=0}^{\infty}$.

Б. Я. Левин исследовал (1938 г.) функции, голоморфные в точке нуль и такие, что $f(q^{-k}) = pq^{-\Psi(k)}$, где p и q — целые, а $\Psi(k)$ — целочисленная функция. Им доказаны следующие теоремы.

1. Если $\Psi(k) \leq \frac{k(k-1)}{2} + sk + O(1)$, где s — целое, то функция $f(z)$ — либо полином, либо имеет особенность в круге $|z| \leq q^s$.

2. Если $\Psi(k) \leq \frac{k(k-1)}{2} + (k-1)\vartheta(k-1)$, $f(z)$ — целая функция, то ее порядок ρ удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{\rho} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\vartheta(k)}{\ln k} \ln q.$$

3. Если $f(q^{-k}) = p'_k/q'_k$, $q'_k < N_q^{nk}$ и числа $f(0)$, $f'(0)$, ..., $f^{(2n-2)}(0)$ рациональны, то $f(z)$ — рациональная функция.

В связи с этими результатами полезно заметить, что Штеккель построил (1895 г.) пример целой трансцендентной функции произвольно малого роста, принимающей во всех рациональных точках рациональные значения.

А. О. Гельфонд исследовал (1929 г.) также целые функции, принимающие во всех целых комплексных точках целые значения, и показал, что если такая функция удовлетворяет неравенству

$$|f(z)| \leq e^{N|z|^2}, \quad N < \frac{\pi}{2} \left(1 + e^{\frac{164}{\pi}}\right)^{-2},$$

то $f(z)$ — полином.

Более тонкие результаты А. О. Гельфонд получил (причем существенно изменив метод) в 1951 г., изучая целые функции, принимающие на некоторой последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$ комплексных чисел ($|\lambda_n| \uparrow \infty$) значения $f(\lambda_n)$ из некоторого алгебраического поля K ; при этом числа $\overline{f(\lambda_n)}$, алгебраически сопряженные с $f(\lambda_n)$, удовлетворяют при любом $\delta > 0$ неравенству

$$|\overline{f(\lambda_n)}| < C_\delta [M(|\lambda_n|, f)]^{1+\delta}.$$

Такую функцию он называет нормально целочисленной. Пусть множество Λ состоит из всех сумм вида $\alpha_k + \beta_s$, где

$$|\alpha_k| \leq |\alpha_{k+1}|, \quad |\beta_s| \leq |\beta_{s+1}|;$$

$n_\alpha(r)$, $n_\beta(r)$ — числа точек соответствующих последовательностей в круге $|z| \leq r$ и аддитивная плотность множества Λ определяется как

$$n_\Lambda(r) = \min [n_\alpha(r), n_\beta(r)].$$

А. О. Гельфонд доказал (1951 г.), что если $f(z)$ — нормально целочисленная функция на множестве Λ , аддитивная плотность которого удовлетворяет неравенству

$$\ln M(\theta r, f) < \lambda n_\Lambda(r),$$

где $\theta > 2 + \sqrt{2}$, $\lambda > \frac{1}{8v} \ln \{[(\theta - 1)^2 - 1] 2^{-1} (\theta - 1)^{-1}\}$ и v — степень поля, то должно выполняться тождество

$$\sum_{k=0}^m A_k f(z + \beta_k) = 0, \quad m > 1,$$

в котором A_k — алгебраические числа поля K . Если при этом рост $f(z)$ не выше минимального типа 1-го порядка, то $f(z)$ — полином. С помощью этих теорем Гельфонд получил глубокие результаты по теории чисел. Они изложены в его монографии «Трансцендентные и алгебраические числа» (1952 г.).

2

Алгебраические вопросы

Из представления целой функции степенным рядом следует, что произвольная целая функция есть предел сходящейся во всей плоскости последовательности полиномов⁴. Если же наложить ограничения на расположение корней приближающих полиномов, то предельные функции образуют некоторый специальный класс, зависящий от этих ограничений.

Первые результаты в этом направлении принадлежат Лагерру. Он дал (1882 г.) полную характеристику целых функций, приближаемых полиномами со всеми положительными корнями и приближаемых полиномами со всеми вещественными корнями. Согласно Лагерру, для того чтобы имел место первый случай, необходимо и достаточно, чтобы предельная целая функция имела вид

$$f(z) = cz^m e^{-\sigma z} \prod_k \left(1 - \frac{z}{a_k}\right), \quad (75)$$

где $a_k > 0$, $\sigma \geq 0$, $\sum_k a_k^{-1} < \infty$. Во втором случае необходимо и достаточно, чтобы предельная функция имела вид

$$f(z) = cz^m e^{-\gamma z^2 + \beta z} \prod_k \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k}}, \quad (76)$$

⁴ Здесь, как и в предыдущем параграфе, под сходимостью понимается равномерная сходимость на каждом компакте.

где $\gamma \geq 0$, c, β, a_k вещественны и $\sum_k a_k^{-2} < \infty$. Эту теорему Лагерр лишь сформулировал, она была доказана позднее (1913 г.) Г. Поля.

Полиномы без корней в полуплоскости $\text{Im } z < 0$ будем кратко называть H -полиномами. Болгарский математик Н. Обрешков, развивая идеи Лагерра и Поля, доказал (1941 г.) следующее: для того чтобы целая функция $f(z)$ была пределом H -полиномов, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид

$$f(z) = cz^m e^{-\gamma z^2 + \beta z} \prod_k \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k}}, \quad (77)$$

где

$$\gamma \geq 0, \quad \text{Im } a_k \geq 0, \quad \sum_k |a_k|^{-2} < \infty, \quad \sum_k \text{Im}(a_k^{-1}) + \text{Im } \beta \geq 0.$$

Последнее условие эквивалентно условию

$$|f(z)| \geq |f(\bar{z})|, \quad \text{Im } z < 0.$$

Класс функций, представимых в виде (77), будем в дальнейшем называть классом P^* .

Линдварт и Поля показали (1914 г.), что если последовательность полиномов со всеми вещественными корнями сходится в окрестности нуля к функции, не равной тождественно нулю, то она сходится всюду. Н. Обрешков перенес этот результат на последовательности H -полиномов.

С. Н. Бернштейн рассматривал (1929 г.) равномерное приближение непрерывных функций на отрезке $[-1, 1]$ полиномами, корни которых лежат в углах $\left[\arg z \pm \frac{\pi}{2}\right] \leq \frac{\pi}{4}$, и доказал, что если предельная функция положительна, то она продолжается в комплексную плоскость как целая функция вида $e^{-\gamma z^2} F(z)$, где $F(z)$ не выше третьего рода. Им получены аналогичные результаты и при других ограничениях на расположение корней приближающих полиномов. Требование положительности предельной функции в этих теоремах, как показал Н. И. Ахизер, можно снять.

Б. Я. Левин заменил (1965 г.) отрезок $[-1, +1]$ менее плотным множеством⁵. Он доказал, что если последовательность H -полиномов равномерно сходится на множестве точек $\{z_k\}$, плотном в некоторой точке α , $\text{Im } \alpha \leq 0$, то сходимости имеет место всюду. Существенно, что есть пример бесконечного множества $\{z_k\}$ -точек с предельной точкой в нуле, на котором равномерно сходится некоторая последовательность H -полиномов, не сходящаяся во всей плоскости. Теорема переносится

⁵ Последовательность комплексных чисел $\{z_k\}$ называется плотной в точке α , если множество чисел $v_k = \ln |z_k - \alpha|$ относительно плотно на луче $(-\infty, 0)$. Множество называется относительно плотным на луче $(-\infty, 0)$, если всякий интервал длины, не меньшей некоторого числа $l > 0$, расположенный на луче $(-\infty, 0)$, содержит точку множества.

и на тот случай, когда вместо H -полиномов рассматриваются полиномы, все корни которых лежат в замкнутой области $r^k \cos k\varphi \leq a$ ($a \geq 0$, k — натуральное число), и на H -полиномы нескольких аргументов. Последние определяются как полиномы $P(z_1, z_2, \dots, z_n)$, не обращающиеся в нуль в области $\bigcap_k \{\operatorname{Im} z_k < 0\}$.

Ряд работ советских математиков посвящен перенесению некоторых фактов, относящихся к полиномам, на классы целых трансцендентных функций. При этом, разумеется, важную роль играют лагерровские классы функций и класс P^* , на который естественно переносятся свойства H -полиномов, выдерживающие предельный переход. Внимание к этим вопросам было привлечено главным образом работами Н. Г. Чеботарева. Чеботарев построил (1926 г.) результат двух целых трансцендентных функций $f(z)$ и $\varphi(z)$, т. е. выражение, обращающееся в нуль, если у функций $f(z)$ и $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ есть общие корни, и отличное от нуля в противном случае. Это выражение имеет вид

$$R[f, \varphi] = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \sigma_k,$$

где s_k и σ_k — коэффициенты степенного разложения в окрестности нуля логарифмических производных функций $f(z)$ и $\varphi(z)$.

В 1922—1928 гг. Н. Г. Чеботарев исследовал перенесение на целые трансцендентные функции критерия Борхарта вещественности корней полинома. Первое такое перенесение было сделано И. Громмером в 1914 г. Чеботарев нашел новый, более простой подход к этому кругу вопросов и получил более полные результаты. В частности, для вещественных целых функций конечного рода q им установлена связь между

сигнатурой формы $\sum_{\mu, \nu=0}^{p-1} s_{m+\mu+\nu} x_{\mu} x_{\nu}$ и числом мнимых корней функции среди ее первых p корней. Здесь s_k — коэффициенты разложения функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$, а m — четное число, большее или равное q . Положительность всех таких квадратичных форм (при любом p) эквивалентна тому, что род целой функции $q \leq m$ и все ее корни вещественны.

Н. Г. Чеботарев обобщил этот критерий также на целые функции бесконечного рода. Отметим еще установленный им и справедливый для целых функций нулевого и первого рода критерий вещественности всех корней функции $f(z)$:

$$\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} \frac{f'(z)}{f(z)} \geq 0.$$

Параллельно, как отмечает Чеботарев, аналогичные результаты были получены М. Ф. Кравчуком.

Изучая различные «проблемы продолжения», Н. Г. Чеботарев поставил следующую общую задачу.

Задан полином $P_n(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$. Требуется установить, каким условиям должны удовлетворять его коэффициенты для

того, чтобы существовал продолженный полином

$$F(z) = P_n(z) + z^{n+1}Q(z),$$

где $Q(z)$ — полином такой, что все корни $F(z)$ принадлежат данному множеству. Если это множество — единичная окружность K , то продолженный полином называется K -продолженным полиномом или KF -полиномом; если множество — вещественная ось, то продолженный полином называется R -продолженным полиномом или RF -полиномом; если множество — левая полуплоскость $\operatorname{Re} z < 0$, то полином H -продолженный.

Мы останавливаемся на этих проблемах потому, что большая часть полученных здесь результатов непосредственно переносится на целые функции. Эти проблемы исследовались самим Н. Г. Чеботаревым, а также его сотрудниками. Л. И. Гаврилов показал (1936 г.), что KF -проблема всегда разрешима, затем (1941 г.) Н. Г. Чеботарев доказал, что проблема продолжения всегда разрешима в более общем случае, когда единичная окружность K заменена произвольной замкнутой жордановой кривой, звездной и содержащей внутри себя начало координат. RF -проблема подробно исследована (1938 г.) Н. Н. Мейманом. Им показано, что для разрешимости RF -проблемы необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты полинома $P_n(z)$ определяли точку в $(n+1)$ -мерном пространстве, принадлежащую некоторому телу, определенному бесконечной системой неравенств. Н. Г. Чеботарев провел исследования H -продолжаемости и установил (1945 г.) аналогичное необходимое и достаточное условие. Он называет полином $P_n(z)$ R -интегрируемым, если, интегрируя его достаточное число раз и правильно подбирая постоянные, можно превратить его в R -полином. Им доказано, что для R -интегрируемости полинома

$$P_n(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$$

необходимо и достаточно, чтобы полином

$$c_0 \frac{z^n}{n!} + c_1 \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + c_{n-1} z + c_n$$

был R -продолжаемым.

В приложениях большую роль играет вопрос об условиях принадлежности всех корней полинома полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$, т. е. об условиях принадлежности полинома $P(-iz)$ к H -полиномам без вещественных корней. Эту проблему обычно называют проблемой Гурвица. Известен критерий Гурвица, состоящий в выполнении некоторой системы детерминантных неравенств. И. Громмер перенес (1914 г.) этот критерий на целые вещественные функции нулевого рода $f(z) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h z^h$.

М. Г. Крейн обнаружил (1938 г.) ошибочность рассуждения И. Громмера и показал, что функция нулевого рода, удовлетворяющая критерию Громмера, имеет вид

$$f(z) = E(z^2) \varphi(z),$$

где $E(z)$ — вещественная целая функция, а $\varphi(z)$ не имеет корней в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$. Изучая проблему Гурвица для целых функций, М. Г. Крейн ввел (1938 г.) специальные классы H_p , $p = 1, 2, \dots$, целых функций, представимых в виде

$$f(z) = e^{i(az+b)} \prod_k \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{z \operatorname{Re} \frac{1}{a_k} + \dots + \frac{z^{p-1}}{p-1} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{a_k^{p-1}}\right)},$$

где $p - 1$ есть род и $a > 0$; через H_∞ им обозначен аналогичный класс функций, имеющих бесконечный род. М. Г. Крейн показал, что принадлежность целой функции без корней в нижней полуплоскости к классу H_p эквивалентна выполнению неравенства

$$|f(z)| < |f(\bar{z})|, \quad \operatorname{Im} z > 0.$$

Кроме того, им доказано, что для представимости функции

$$f(z) = g(z) + ih(z)$$

в форме

$$f(z) = E(z) H(z), \quad (78)$$

где $E(z)$ — вещественная функция, а $H(z)$ принадлежит к одному из классов H_p , необходима и достаточна положительность формы

$$S(h, g, \xi_0, \xi_1, \dots) = \sum_{j,k=0}^{\infty} s_{j+k} \xi_j \xi_k, \quad (79)$$

в которой s_k — коэффициенты разложения

$$\frac{h(z)}{g(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k.$$

С другой стороны, по теореме Громмера положительность формы (79) эквивалентна условию

$$\operatorname{Im} \frac{h(z)}{g(z)} > 0 \quad (80)$$

при $\operatorname{Im} z > 0$. Таким образом, представимость функции $f(z)$ в форме (78) эквивалентна условию (80).

Сделаем еще одно замечание, относящееся к критерию Гурвица для целых функций. Иенсен построил операцию, ставящую в соответствие каждой целой функции

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$$

последовательность полиномов

$$I_n(f) = c_0 + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k}{n}\right) c_k z^k, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и установил, что вещественность всех корней всех этих полиномов эквивалентна тому, что $f(z)$ имеет вид (76). Если воспользоваться теоремой

Эрмита — Билера для целых функций, о которой будет речь впереди, то можно утверждать следующее: для того чтобы все $I_n(f)$ были H -полиномами, необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ была целой функцией класса P^* . Для каждого H -полинома $I_n(f)$ можно записать детерминантный критерий Гурвица и таким образом (для целых функций нулевого или первого рода) получить критерий, выражающийся в бесконечной последовательности детерминантных неравенств и решающий проблему Гурвица. В отличие от критерия Громмера, исправленного М. Г. Крейн-ном, этот критерий дает необходимое и достаточное условие принадлежности всех корней целой функции к полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$.

Однако критерии подобного рода, в которых участвует бесконечное множество неравенств, вряд ли можно считать эффективными. Многие же вопросы приводят к необходимости эффективно решать проблему Гурвица для специальных классов целых функций. В частности, вопросы устойчивости решений дифференциально-разностных уравнений вида

$$\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{k_j} a_{kj} f^{(k)}(x + \lambda_j) = 0$$

приводят к необходимости решать проблему Гурвица для «квазиполинома»

$$Q(z) = \sum_{j=1}^n P_j(z) e^{\lambda_j z} \quad \left(P_j(z) = \sum_{k=0}^{k_j} a_{kj} z^k \right). \quad (81)$$

Квазиполином зависит от конечного числа параметров, и поэтому естественно искать конечный алгоритм для решения проблемы Гурвица в этом случае.

Главным образом в связи с указанной задачей Н. Г. Чеботарев опубликовал в 1941 и 1942 гг. заметки по проблеме Гурвица, которые привлекли внимание советских математиков к этому кругу вопросов. Одним из направляющих алгебраических фактов служила при этом теорема Эрмита — Билера.

Для того чтобы полином

$$\omega(z) = P(z) + iQ(z),$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ — полиномы с вещественными коэффициентами, не имел корней в замкнутой нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z \leq 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) полиномы $P(z)$ и $Q(z)$ имеют лишь простые вещественные корни, которые взаимно разделяются («перемежаются»), т. е. между двумя последовательными корнями одного полинома лежит точно один корень другого;

2) в некоторой точке x_0 вещественной оси

$$Q'(x_0)P(x_0) - Q(x_0)P'(x_0) > 0.$$

(Если во втором условии изменить знак, то корни $\omega(z)$ будут лежать в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$.)

Легко видеть, что непосредственно теорема Эрмита — Билера не переносится на целые функции. Вещественность и перемножаемость

корней вещественной и мнимой частей целой функции не является ни необходимым, ни достаточным условием принадлежности корней этой функции к одной из полуплоскостей $\operatorname{Im} z > 0$ или $\operatorname{Im} z < 0$.

Н. Г. Чеботарев провел (1941, 1942 гг.) ряд исследований, относящихся к некоторым специальным классам целых функций, Л. С. Понтрягин доказал (1942 г.), что теорема Эрмита — Билера прямо переносится на специальные квазиполиномы $Q(z) = P(z, e^z)$, где $P(z, w)$ — полином двух переменных. Вскоре после этого М. Г. Крейн и Б. Я. Левин нашли аналог теоремы Эрмита — Билера для одного общего класса целых функций конечной степени. Этот класс P определяется следующими условиями:

А. Все корни целой функции $\omega(z)$ конечной степени лежат в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

$$B. \quad d_{\omega} = h\left(-\frac{\pi}{2}\right) - h\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0.$$

Здесь $h(\varphi)$ — индикатор функции $\omega(z)$, а величину d_{ω} называют дефектом функции $\omega(z)$. Доказано, что для принадлежности целой функции

$$\omega(z) = P(z) + iQ(z)$$

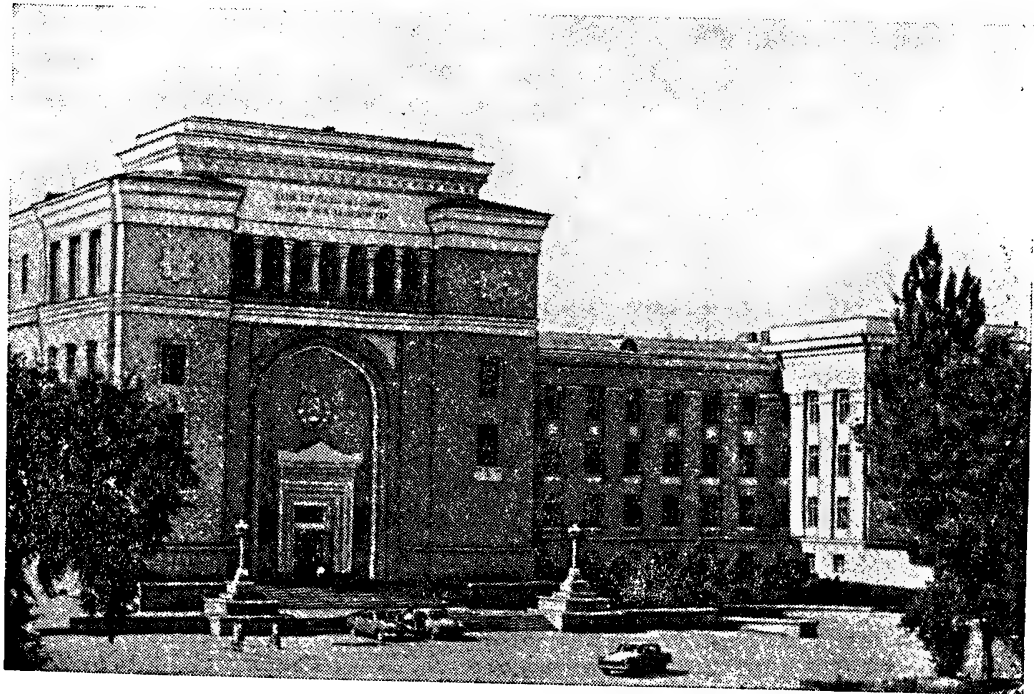
к классу P необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

С. Корни $P(z)$ и $Q(z)$ вещественны и перемежаются.

Д. Индикаторные диаграммы $P(z)$ и $Q(z)$ совпадают.

Е. В какой-нибудь точке x_0 вещественной оси

$$Q'(x_0)P(x_0) - Q(x_0)P'(x_0) > 0.$$



Здание Президиума и Института математики и механики Академии наук Казахской ССР.

Условие «D», очевидно, автоматически выполняется, если степень функции $\omega(z)$ равна нулю. Кроме того, оно выполняется, если дефект функции $\omega(z)$ положителен. Последнее справедливо для квазиполинома

$$Q(z) = \sum_{k=0}^n e^{i\lambda_k z} P_k(z) \quad (\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n)$$

при $\lambda_n > -\lambda_0$, а значит, в частности, и в случае, рассмотренном Л. С. Понтрягиным. Поэтому в данном частном случае условия «С» и «Е» необходимы и достаточны для того, чтобы все корни $\omega(z)$ лежали в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$ (в общем случае целых вещественных функций $P(z)$ и $Q(z)$ конечной степени из условия «С» следует, что индикаторные диаграммы этих функций получаются одна из другой сдвигом на вещественный вектор).

Н. Н. Мейман рассмотрел общий случай целой функции $\omega(z)$. Он ввел класс $H\bar{B}$ ($\bar{H}\bar{B}$) функций, определяемый следующими условиями:

- 1) все корни $\omega(z)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ ($\operatorname{Im} z \geq 0$);
- 2) при $\operatorname{Im} z < 0$ выполняется неравенство

$$|\omega(z)| \geq |\omega(\bar{z})|.$$

Очевидно, что в силу изложенных выше теорем М. Г. Крейна о классах H_p этот класс совпадает с объединением $\bigcup_{p=1}^{\infty} H_p$. Определение

Н. Н. Меймана удобно и в настоящее время принято. Класс P состоит из всех функций конечной степени, принадлежащих $H\bar{B}$. Н. Н. Мейман дал следующий критерий принадлежности целой функции $\omega(z) = P(z) + iQ(z)$ к классу $H\bar{B}$.

Пусть

$$P(z) = Ae^{u(z)} \prod_k \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{P_k\left(\frac{z}{a_k}\right)}$$

и

$$Q(z) = Be^{v(z)} \prod_k \left(1 - \frac{z}{b_k}\right) e^{P_k\left(\frac{z}{b_k}\right)}$$

есть разложения функций $P(z)$ и $Q(z)$ в бесконечные произведения, в которых $u(z)$ и $v(z)$ — целые функции. Для принадлежности функции $\omega(z)$ к классу $H\bar{B}$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

α) корни $P(z)$ и $Q(z)$ вещественные, простые и перемежаются;

β) $u(z) - v(z) + \sum_k \left| P_k\left(\frac{z}{a_k}\right) - P_k\left(\frac{z}{b_k}\right) \right| = \text{const};$

γ) A и B имеют один и тот же знак.

Н. Г. Чеботарев назвал «вещественной парой» две вещественные целые функции $P(z)$ и $Q(z)$, если они не имеют общих корней и любая их линейная комбинация $\lambda P(z) + \mu Q(z)$ с вещественными коэффициентами имеет лишь вещественные корни. Из этого определения непосред-

ственно следует, что мнимая часть отношения $Q(z)/P(z)$ сохраняет постоянный знак в каждой из полуплоскостей $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$. Условия α и β , очевидно, эквивалентны тому, что функции $P(z)$ и $Q(z)$ образуют вещественную пару.

Н. Н. Мейман ввел также класс B целых функций $f(z)$, несколько более общий, чем класс $\overline{HB}$. Класс B определяется так:

1) $f(z)$ имеет в нижней полуплоскости не более чем конечное число корней;

2) при любом $\eta > 0$ и $|z| > R_\eta$, $\operatorname{Im} z > 0$,

$$\left| \frac{f(z)}{f(\bar{z})} \right| < 1 + \eta.$$

Очевидно, что всякая целая функция класса B представляется в форме

$$f(z) = R(z) H(z),$$

где $H(z) \in \overline{HB}$, а $R(z)$ — полином. Мейман показал также, что для принадлежности целой функции

$$\omega(z) = P(z) + iQ(z)$$

к этому классу необходимо и достаточно, чтобы

$$P(z) = S(z) P_1(z), \quad Q(z) = T(z) Q_1(z),$$

где $S(z)$ и $T(z)$ — полиномы, степени которых имеют одинаковую четность, а $P_1(z)$ и $Q_1(z)$ образуют вещественную пару.

Все эти классы функций, введенные в связи с задачей о перенесении на целые функции теоремы Эрмита — Билера, оказались впоследствии нужными для изучения экстремальных свойств целых функций.

В исследованиях Н. Г. Чеботарева и его сотрудников (1941—1946 гг.) разработаны эффективные методы решения проблемы Гурвица для квазиполиномов. В частности, для случая, когда все показатели λ_k соизмеримы, создан алгоритм, позволяющий с помощью конечного числа операций проверить, лежат ли все корни квазиполинома в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$. Основным методом применения этого алгоритма является разработанный Чеботаревым обобщенный метод Штурма.

Результаты по проблеме Гурвица изложены в монографии Н. Г. Чеботарева и Н. Н. Меймана «Проблема Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций» (1949 г.).

3

Неравенства и экстремальные свойства

Неравенство С. Н. Бернштейна и его обобщения. В 1889 г.

Д. И. Менделеев поставил вопрос об оценке производной полинома второй степени на данном отрезке в зависимости от максимума модуля этого полинома. В этом же году А. А. Марков решил более общую задачу, доказав для полинома произвольной степени n следующую теорему.

Если на отрезке $[-1, +1]$ полином степени n удовлетворяет неравенству $|P_n(x)| \leq M$, то на этом же отрезке $|P'_n(x)| \leq Mn$.

Оценка для старших производных была получена братом А. А. Маркова — В. А. Марковым в 1892 г. Она имеет вид

$$|P_n^{(k)}(x)| \leq M \frac{n^2(n^2-1) \dots [n^2-(k-1)^2]}{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}.$$

Обе оценки точные.

В 1912 г. С. Н. Бернштейн установил для тригонометрического полинома n -й степени

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad (82)$$

неравенство

$$|S'_n(x)| \leq n \max_{-\infty < x < +\infty} |S_n(x)|, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (83)$$

положенное в основу теории аппроксимации периодических функций. Это неравенство эквивалентно неравенству для алгебраических полиномов на отрезке $[-1, +1]$

$$|P'_n(x) \sqrt{1-x^2}| \leq Mn,$$

которое, как отмечает С. Н. Бернштейн, неявно содержится в доказательстве А. А. Маркова. Неравенство (83) естественно распространяется на производные всех порядков

$$|S_n^{(k)}(x)| \leq n^k \max_{-\infty < x < +\infty} |S_n(x)|, \quad k = 1, 2, \dots \quad (84)$$

Каждое из неравенств (84) точное и достигается лишь на старшей гармонике

$$S_n(x) = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}.$$

В 1923 г. С. Н. Бернштейн сделал новый принципиальный шаг, перейдя от тригонометрических полиномов к общему классу B_σ целых функций $f(z)$ конечной степени не большей σ (ц. ф. к. с.), ограниченных на вещественной оси, и доказал, что если $f(z) \in B_\sigma$ и $\sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x)| = M$, то выполняется неравенство

$$|f'(x)| \leq \sigma M \quad (85)$$

и, следовательно,

$$|f^{(k)}(x)| \leq \sigma^k M, \quad k = 1, 2, \dots \quad (86)$$

Знак равенства достигается только на гармонике

$$f(x) = c_1 e^{i\sigma x} + c_2 e^{-i\sigma x} \quad (|c_1| + |c_2| = M).$$

Эти важные неравенства обобщались в различных направлениях.

Н. И. Ахиезер получил (1946 г.) следующий результат. Пусть E — некоторое линейное нормированное пространство функций

$g(x)$ ($-\infty < x < +\infty$), в котором норма инвариантна относительно операции сдвига, т. е. при любом вещественном t

$$\|g(x+t)\| = \|g(x)\|, \quad (87)$$

■ пусть $f(z) \in B_\sigma$, а $f(x) \in E$. В таком случае $f'(x) \in E$ и при любом вещественном α

$$\|\sin \alpha f'(x) - \sigma \cos \alpha f(x)\| \leq \sigma \|f(x)\|. \quad (88)$$

Особого внимания заслуживают пространства E , в которых норма вводится так:

$$1) \quad \|g(x)\| = \sup_{-\infty < x < +\infty} |g(x)|,$$

$$2) \quad \|g(x)\| = \sup_{-\infty < s < +\infty} \left\{ \int_s^{2\pi+s} |g(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1,$$

$$3) \quad \|g(x)\| = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

Во всех этих пространствах неравенство (88) точное в том смысле, что множитель σ в правой части нельзя заменить меньшим. Неравенство (85) Бернштейна получается, если взять норму 1) и положить в неравенстве (88) $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Другое обобщение неравенства (85) Н. И. Ахиезер получил (1946 г.), введя понятие сопряженной функции к функции из класса B_σ . Как известно, из теоремы Винера и Палея следует, что каждая функция $f(z) \in B_\sigma$ допускает представление

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{+\sigma} e^{izu} \psi(u) du,$$

где $\psi(u) \in L^2(-\sigma, \sigma)$. Сопряженной к $f(z)$ называется функция

$$\tilde{f}(z) = \frac{z}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{+\sigma} e^{izu} i \operatorname{sign} u \psi(u) du.$$

Если E — линейное нормированное пространство, в котором норма удовлетворяет условию (87) и $f(z) \in B_\sigma$, $f(x) \in E$, то $f'(x) \in E$, $f'(x) \in E$ и при любом вещественном α

$$\|\sin \alpha f'(x) + \cos \alpha \tilde{f}'(x)\| \leq \sigma \|f(x)\|. \quad (89)$$

В случае норм 1) — 3) это неравенство является точным в том же смысле, что и (88). Заметим, что для норм 1) и 2) знак равенства в (88) и (89) достигается лишь на функциях вида $f(z) = c_1 e^{i\sigma z} + c_2 e^{-i\sigma z}$, где c_1 и c_2 — постоянные.

Несколько иной характер носит неравенство, доказанное (1948 г.) С. Б. Стечкиным для тригонометрического полинома

$$|S'_n(x)| \leq \frac{1}{\sin \frac{nh}{2}} \max_{-\infty < x < +\infty} \left| S_n\left(x + \frac{h}{2}\right) - S_n\left(x - \frac{h}{2}\right) \right|,$$

$$0 < h < \frac{2\pi}{n}.$$

Оно было обобщено С. М. Никольским на целые функции класса B_σ при ограничении $0 < h < \frac{\pi}{\sigma}$ и С. Н. Бернштейном — на общий случай $0 < h < \frac{2\pi}{\sigma}$. Дальнейшие обобщения, относящиеся к растущим функциям, принадлежат Б. Я. Левину (1950 г.).

Если потребовать от целой функции экспоненциального типа дополнительно, чтобы она была вещественной и монотонно возрастала при $-\infty < x < +\infty$, то оценку в неравенстве (85) можно уточнить. С. Н. Бернштейн показал (1946 г.), что в этом случае

$$|f'(x)| \leq \frac{\sigma}{\pi} M, \quad M = \sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x)|.$$

Оценка точная и достигается только на функциях вида

$$f(x) = F(x+h), \quad -\infty < h < +\infty,$$

где

$$F(x) = \frac{2M}{\pi} \int_0^{\sigma x} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt.$$

Для целых функций $f(x)$ порядка $\rho = \frac{1}{2}$ и типа не большего σ , ограниченных на луче $x \geq 0$, С. Н. Бернштейн доказал (1949 г.) аналог своего неравенства (86)

$$|f^{(k)}(x)| \leq M \frac{k!}{(2k)!} \sigma^{2k}$$

$$(x \geq 0, \quad M = \sup_{x \geq 0} |f(x)|)$$

и применил его к задачам аппроксимации на полуоси. Оценка точная и достигается только на функции $f(x) = M \cos \sigma \sqrt{x}$.

Н. И. Ахиезер рассмотрел (1965 г.) целые функции порядка $\frac{1}{2}$ типа не большего σ , ограниченные и монотонные на положительном луче, доказал неравенство

$$|f'(x)| \leq \frac{M\sigma^2}{8} \quad (x \geq 0, \quad M = \sup_{x \geq 0} |f(x)|)$$

и показал, что оно достигается лишь на функции

$$\pm \left\{ 4 \int_0^{\frac{1}{2}\sigma\sqrt{x}} [J_1(t)]^2 \frac{dt}{t} - 1 \right\}$$

($J_1(t)$ — функция Бесселя 1-го порядка).

Далеко идущие обобщения основного неравенства (86) С. Н. Бернштейна получены для целых функций, неограниченных на вещественной оси, но имеющих там некоторую мажоранту. Начало таким обобщениям было положено С. Н. Бернштейном, доказавшим в 1926 г. следующее утверждение.

Если $\omega_0(z)$ — целая функция нулевого рода с корнями $\alpha_k + i\beta_k$, причем $\beta_k > 0$ и $\sum_k \beta_k^{-1} < \infty$, а $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа не большего σ , то из неравенства

$$|f(x)| \leq |\omega_0(x)|, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (90)$$

следует

$$|f^{(k)}(x)| \leq |e^{i\sigma x} \omega_0(x)|^{(k)}, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (91)$$

Заметим, что теорему (86) Бернштейна можно сформулировать так: из неравенства

$$|f(x)| \leq |\omega(x)|, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (92)$$

для ц. ф. к. с. $\tau \leq \sigma$ следует

$$|f^{(k)}(x)| \leq |\omega^{(k)}(x)|, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (93)$$

где

$$\omega(x) = e^{i\sigma x}.$$

Неравенства (90) и (91) получаются, если в (92) и (93) подставить $\omega(z) = e^{i\sigma z} \omega_0(z)$.

Естественно называть мажорантами такие целые функции $\omega(z)$ конечной степени σ , что если $f(z)$ — ц. ф. к. с. $\tau \leq \sigma$ и удовлетворяет условию (92), то выполняется неравенство (93).

Н. И. Ахиезеру принадлежит (1946 г.) дальнейшее продвижение в исследовании этого вопроса. Он заменил специальные мажоранты $e^{i\sigma z} \omega_0(z)$ весьма общим классом целых функций $\omega(z)$ конечной степени. Вскоре (1949 г.) Б. Я. Левин доказал, что если $\omega(z)$ — ц. ф. к. с. σ , принадлежит к классу P (см. § 2), а $f(z)$ — ц. ф. к. с. $\tau \leq \sigma$ и удовлетворяет неравенству (92), то она удовлетворяет также неравенству (93), причем равенство достигается для функций $c_1 \omega(x) + c_2 \bar{\omega}(x)$, где $\bar{\omega}(z) = \overline{\omega(\bar{z})}$ и $|c_1| + |c_2| = 1$, и только для них. Таким образом, было доказано, что всякая функция класса P пригодна в качестве мажоранты. Очевидно, что тем же свойством обладает и $\bar{\omega}(z)$, если $\omega(z) \in P$. С другой стороны, в этой же работе было показано, что если $\omega(z)$ — ц. ф. к. с. σ и ни $\omega(z)$, ни $\bar{\omega}(z)$ не принадлежат к классу P , то существует ц. ф. к. с. $\tau = \sigma$, для которой выполняется неравенство (92) и не выполняется неравенство (93) (при $k = 1$). Класс P совпадает с классом всех мажорант, являющихся ц. ф. к. с.

То обстоятельство, что мажоранты для производных получаются дифференцированием из мажоранты самой функции, не существенно в приложениях. Поэтому С. Н. Бернштейн ввел более общее понятие. Функция $H(x) \geq 0$ называется мажорантой квазиконечного роста,

если существует такая последовательность функций $H_{k,\tau}(x) \geq 0$, $k = 1, 2 \dots$, удовлетворяющая соотношению

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{H_{k,\tau}(x)} \leq \varphi(\tau),$$

что всякая целая функция экспоненциального типа не большего τ , удовлетворяющая неравенству

$$|f(x)| \leq H(x),$$

удовлетворяет также системе неравенств

$$|f^{(k)}(x)| \leq H_{k,\tau}(x).$$

В случае $\varphi(\tau) = \tau$ функция $H(x)$ называется мажорантой конечного роста. В ряде заметок (1949—1952 гг.) С. Н. Бернштейн исследовал эти мажоранты. В частности, он установил, что если $H(x)$ — модуль целой функции $F(x)$ конечной степени, то, для того чтобы она была мажорантой квазиконечного роста, необходимо и достаточно, чтобы $F(z)$ принадлежала к классу A , что эквивалентно выполнению условия

$$\sup_R \left\{ \int_0^R \frac{\ln |H(x)H(-x)|}{1+x^2} dx \right\} < \infty.$$

Б. Я. Левин показал, что всякая мажоранта квазиконечного роста, являющаяся модулем целой функции, есть мажоранта конечного роста и равна модулю целой функции класса P . Таким образом, если ограничиться модулями ц. ф. к. с., то указанное расширение понятия о мажоранте не вводит новых мажорант. Более того, всякая ц. ф. к. с., допускающая мажоранту квазиконечного роста (не обязательно равную модулю целой функции), допускает мажоранту класса P .

Обратим внимание на особую роль, которую здесь играют ц. ф. к. с. Дело в том, что в определении мажоранты требуется, чтобы из неравенства (92) на вещественной оси следовало неравенство (93) также на вещественной оси. Требование, чтобы степень $f(x)$ не превосходила степень $\omega(x)$, не означает выхода в комплексную плоскость, так как степень у ц. ф. к. с. может быть определена, например, равенством

$$\sigma = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\omega^{(n)}(0)|}.$$

Если же $\omega(z)$ имеет рост, больший чем конечная степень, она не может быть мажорантой в указанном смысле, т. е. из (92) не следует (93). Это объясняется тем, что если $\omega(z)$ и $f(z)$ — ц. ф. к. с. соответственно σ и τ и $\tau \leq \sigma$, то, как доказал Б. Я. Левин, из неравенства (92) следуют неравенства

$$\left. \begin{aligned} |f(z)| &\leq |\omega(z)|, \\ |\bar{f}(z)| &\leq |\omega(z)|, \quad \text{Im } z \leq 0, \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

из которых получается неравенство (93) с $k = 1$.

Н. Н. Мейман показал (1950 г.), что можно освободиться от требования, чтобы функции $\omega(z)$ и $f(z)$ имели конечную степень. Он предло-



Н. Н. Мейман.

жил прямо определять мажоранту целой функции $f(z)$ как целую функцию $\omega(z) \in HB$ (см. разд. I, § 2), удовлетворяющую неравенствам (94), и доказал, что в этом случае на вещественной оси выполняется неравенство

$$|f'(x)| \leq |\omega'(x)|, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (95)$$

Знак равенства в (95) достигается на функциях вида

$$f(z) = c_1 \omega(z) + c_2 \bar{\omega}(z) \quad (|c_1| + |c_2| = 1)$$

и только на них. При доказательстве теоремы Мейман воспользовался установленным им общим фактом, который он назвал «принципом монотонности аргумента». Этот факт состоит в следующем. Пусть $f(x)$ и $\omega(x)$ — две комплекснозначные непрерывные функции вещественного переменного x . Если

$$|f(x_0)| \leq |\omega(x_0)|$$

и аргумент функции $e^{i\varphi} \omega(x) - f(x)$ монотонно возрастает при любом $0 \leq \varphi < 2\pi$ в некоторой (зависящей от φ) окрестности точки x_0 , то

$$|f'(x_0)| \leq |\omega'(x_0)|$$

при условии, что эти производные существуют.

Заметим, что при таком общем определении мажоранты соотношения мажорации (94) уже не возобновляются для производных, и поэтому в формулировке теоремы операцию дифференцирования нельзя заменить кратным дифференцированием. Естественно было поставить вопрос о наиболее широком классе мажорант в новом смысле, сохраняющих соотношения мажорантности после дифференцирования. Как показал (1951 г.) Б. Я. Левин, если потребовать дополнительно от этого класса, чтобы он был инвариантен относительно умножения на функцию $e^{\tau z}$, где τ — произвольное вещественное число⁶, то наиболее широким классом мажорант, сохраняющих соотношения мажорантности после дифференцирования, является класс P^* (см. разд. I, § 2) целых функций, предельных для H -полиномов.

Кроме того, в ряде статей Б. Я. Левина (1949—1951 гг.) установлено, что оператор дифференцирования может быть заменен в этом круге вопросов множеством других операторов значительно более общего вида. Для установления этих теорем вводятся понятия о допустимых классах функций и о $\mathfrak{B}$ -операторах. Подкласс T класса $\overline{HB}$ называется

⁶ Возможно, что теорема справедлива и без этого дополнительного требования. Вопрос упирается в следующую нерешенную проблему. Пусть корни целой функции $\omega(z)$ и всех ее производных все лежат в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Можно ли утверждать, что $\omega(z) \in P^*$?

допустимым, если из принадлежности $\omega(z) \in T$ следует, что $v\omega(z) \in T$ (v — постоянная), а из выполнимости условий мажорации (94) — принадлежность $\omega(z) + f(z) \in T$. Функция $\omega(z)$ называется при этом T -мажорантой функции $f(z)$.

Общая идея получения неравенств является развитием метода Даффина и Шеффера, примененного ими для изучения экстремальных свойств полиномов, и состоит в следующем. Если T — допустимый класс, то, для того чтобы $\omega(z)$ была T -мажорантой целой функции $f(z)$ ($\omega(z) \gg f(z)$), необходимо и достаточно, чтобы $f(z) - v\omega(z) \in T$ при всех $|v| \geq 1$. Пусть теперь $\mathfrak{B}_T$ — аддитивный однородный оператор, отображающий допустимый класс в себя. Из $\omega(z) \gg f(z)$ следует, что

$$f(z) - v\omega(z) \in T.$$

Поскольку $\mathfrak{B}_T$ отображает класс T в себя, то

$$\mathfrak{B}_T[f(z)] - v\mathfrak{B}_T[\omega(z)] \in T,$$

откуда следует, что

$$\mathfrak{B}_T[\omega(z)] \gg \mathfrak{B}_T[f(z)].$$

Доказано, что классы $\bar{P}$, $\bar{P}^*$ и $\overline{HB}$ допустимые (соответствующие операторы обозначены $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{B}_{HB}$) и что $\mathfrak{B}$ -оператор, перестановочный с оператором дифференцирования, является оператором вида

$$\mathfrak{B}[f(z)] = \sum_{h=0}^{\infty} \bar{a}_h f^{(h)}(z),$$

где $f(z) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h z^h$ — произвольная целая функция класса P^* . Оператор Иенсена $I_n(f)$ перехода от целых функций к аппроксимирующим полиномам (см. разд. I, § 2) является $\mathfrak{B}^*$ -оператором.

Для вывода общего вида $\mathfrak{B}$ - и $\mathfrak{B}^*$ -операторов потребовалось построить классы P , P^* и HB для целых функций нескольких переменных. Класс HB_2 (для двух переменных) — это целые функции $\omega(z, w)$, не обращающиеся в нуль в области $\operatorname{Im} z < 0$, $\operatorname{Im} w < 0$ и удовлетворяющие в этой области неравенствам

$$|\omega(z, w)| \geq |\omega(\bar{z}, w)|, \quad |\omega(z, \bar{w})| \geq |\omega(z, w)|, \\ |\omega(z, w)| \geq |\omega(\bar{z}, \bar{w})|.$$

Если, кроме того, функция $\omega(z, w)$ принадлежит к классу P^* при условии, что вторая переменная фиксирована в нижней полуплоскости, то по определению $\omega(z, w) \in P_2^*$; если же функция $\omega(z, w)$ принадлежит HB_2 и имеет конечную степень по обоим переменным, то она принадлежит к классу P_2 .

В работах Б. Я. Левина доказан аналог теоремы Лагерра — Поля — Обрешкова, состоящий в том, что равномерное замыкание H -полиномов двух переменных есть класс P_2^* , и дано представление функций этого класса. На функции нескольких переменных перенесено

понятие $\mathfrak{B}_T$ -оператора и доказано, что всякий непрерывный $\mathfrak{B}^*$ -оператор над функциями переменной z порождает $\mathfrak{B}^*$ -оператор над функциями класса P_2^* . Это относится, например, к оператору частного дифференцирования⁷. Общий вид непрерывного $\mathfrak{B}^*$ -оператора выражается формулой

$$\mathfrak{B}[f(z)] = f(-D_w)[\varphi(z, w)]_{w=0},$$

где $\varphi(z, w)$ — целая функция класса P_2^* , допускающая представление

$$\varphi(z, w) = e^{-\gamma z^2} \omega(z, w),$$

в котором $\gamma \geq 0$, а $\omega(z, w)$ — не выше первого рода по каждой из переменных при условии, что вторая переменная фиксирована в нижней полуплоскости. Найден также общий вид непрерывного $\mathfrak{B}$ -оператора.

Функции, наименее уклоняющиеся от нуля. Напомним, что элемент f нормированного пространства B называется наименее уклоняющимся от нуля на множестве $K \subset B$, если $f \in K$ и $\|f\| = \inf_{g \in K} \|g\|$. Если B — пространство всех непрерывных функций на множестве E комплексной плоскости с нормой

$$\|f(z)\| = \sup_{z \in E} |f(z)| p(z),$$

где $p(z)$ — неотрицательная функция на E , то говорят о функциях, наименее уклоняющихся от нуля с весом $p(z)$ на множестве E в данном классе $K \subset B$. При $p(z) \equiv 1$ говорят просто о функциях, наименее уклоняющихся от нуля на множестве E в данном классе $K \subset B$.

Исследования по теории функций, наименее уклоняющихся от нуля, ведут свое начало от работ П. Л. Чебышева. В 1853 г. Чебышев в работе «Теория механизмов, известных под именем параллелограммов» построил многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1, +1]$ в классе всех многочленов степени n с фиксированным старшим коэффициентом. Он указал важное свойство, вполне характеризующее этот многочлен: на отрезке $[-1, +1]$ существует множество из $n+1$ точек, в которых многочлен принимает с чередующимися знаками значения, по модулю равные его наибольшему значению на $[-1, +1]$. Это множество принято называть чебышевским. Позднее (1877 г.) Е. И. Золотарев решил задачу о нахождении многочлена, наименее уклоняющегося от нуля на отрезке вещественной оси в классе всех многочленов степени n с двумя фиксированными старшими коэффициентами. В. А. Марков указал (1892 г.) многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке вещественной оси в классе всех многочленов степени n с фиксированным значением производной порядка $k \leq n$ в данной точке.

⁷ Впервые неравенство (86) в несколько обобщенной форме (с мажорантами конечного роста) было перенесено (1948 г.) на ц. ф. к. с. нескольких переменных С. Н. Бернштейном. Заметим, что ему же принадлежит (1947 г.) обобщение неравенства В. А. Маркова на полиномы нескольких переменных.

Исследования П. Л. Чебышева, Е. И. Золотарева и В. А. Маркова о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля, были продолжены Н. И. Ахиезером. В 1928 г. он решил задачу о нахождении многочлена, наименее уклоняющегося от нуля на заданном отрезке вещественной оси среди всех многочленов степени n с тремя фиксированными старшими коэффициентами. Решение этой задачи выражается через автоморфные функции Шоттки, которые в частных случаях могут вырождаться в тригонометрические или эллиптические функции. Заметим, что многочлены Чебышева выражаются через тригонометрические функции, а многочлены Золотарева — через эллиптические. Н. И. Ахиезер дал также решение задачи о нахождении многочлена, наименее уклоняющегося от нуля на двух заданных отрезках вещественной оси среди всех многочленов степени n с фиксированным старшим коэффициентом.

Н. И. Ахиезер показал, что решение задачи о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля на одном отрезке вещественной оси среди многочленов степени n с k фиксированными старшими коэффициентами, а также о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля на k отрезках вещественной оси среди многочленов степени n с одним фиксированным старшим коэффициентом, сводится к нахождению некоторой области G_{kn} , представляющей собой плоскость с k разрезами вдоль сегментов вещественной оси, и построению функции Грина этой области.

В 1926 г. С. Н. Бернштейн поставил и решил следующую задачу о наименьшем уклонении от нуля. Пусть $\omega(z) = P(z) + iQ(z)$ — фиксированный H -полином степени n . Требуется найти многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на всей оси с весом $p(x) = |\omega(x)|^{-1}$ в классе всех многочленов степени n с одним или двумя последовательными фиксированными коэффициентами.

Целые трансцендентные функции, наименее уклоняющиеся от нуля на вещественной оси, впервые появились в работах С. Н. Бернштейна в связи с неравенством (85) (1923 г.). Это неравенство Бернштейн получил как следствие такого установленного им факта: функция $\frac{\sin \sigma z}{\sigma}$

наименее уклоняется от нуля на всей оси в классе функций, принадлежащих B_σ и удовлетворяющих условию $f'(0) = 1$. Позднее, для того чтобы обобщить неравенство (85), С. Н. Бернштейн решил следующую задачу. Пусть $\omega(z) = P(z) + iQ(z)$ — функция нулевого рода, корни которой $\alpha_k + i\beta_k$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и удовлетворяют условию $\sum_k \beta_k^{-1} < \infty$. Требуется найти функцию, которая наименее укло-

няется от нуля на всей оси с весом $p(x) = |\omega(x)|^{-1}$ в классе всех вещественных целых функций $\{f(z)\}$ конечной степени не больше σ с фиксированными значениями $f(0)$ и $f'(0)$.

Занимаясь обобщениями неравенства (85), Б. Я. Левин дал (1950 г.) решения более общих задач. Эти решения содержат результаты, полученные ранее С. Н. Бернштейном. Пусть $\omega(z) = P(z) + iQ(z)$ — целая функция конечной степени σ и класса P . В классе всех целых функций конечной степени не больше σ , удовлетворяющих условию $f^{(k)}(0) = 1$, единственной функцией, наименее уклоняющейся от нуля на

всей оси с весом $p(x) = |\omega(x)|^{-1}$, является функция, которая при вещественных значениях z определяется выражением $\operatorname{Re} \left\{ \frac{\omega(z)}{\omega^{(k)}(0)} \right\}$. В классе всех целых функций конечной степени не больше σ , удовлетворяющих условиям

$$f^{(k)}(0) = a, \quad f^{(k+1)}(0) = b, \quad (96)$$

единственной функцией, наименее уклоняющейся от нуля на всей оси с весом $p(x) = |\omega(x)|^{-1}$, является функция $AP(z) + BQ(z)$, где постоянные A и B выбраны так, чтобы удовлетворялись условия (96). При этом дополнительно предполагается, что функция $\omega(z)$ не является полиномом степени не больше $k+1$ и не равна Ce^{Dz} (C и D — вещественные постоянные).

В 1949 г. С. Н. Бернштейн исследовал задачу о нахождении функции, наименее уклоняющейся от нуля на всей оси в классе целых функций, принадлежащих B_σ и удовлетворяющих условиям

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = a_2, \quad (97)$$

где a_0 и a_2 — вещественные числа. Здесь различаются два случая:

$$\frac{a_2}{a_0} \in (-\sigma^2, 0), \quad \frac{a_2}{a_0} \notin (-\sigma^2, 0).$$

Для первого случая Бернштейн указывает решение

$$f(z) = a_0 \cos \left(z \sqrt{-\frac{a_2}{a_0}} \right),$$

а для второго — решение

$$f(z) = M \cos \sqrt{\sigma^2 z^2 + c^2},$$

где M и c — постоянные, определяемые из условий (97).

С. Н. Бернштейн дал также решение задачи о нахождении функции, наименее уклоняющейся от нуля на внешности отрезка $[-b, +b]$ в классе функций, принадлежащих B_σ с фиксированным значением $f^{(k)}(0)$. Н. И. Ахиезером была решена (1952 г.) аналогичная задача при условии, что фиксируются либо значения функции $f(z)$ в двух точках отрезка $[-b, +b]$, либо значения $f(0)$ и $f'(0)$.

В работах С. Н. Бернштейна (1949 г.) и Н. И. Ахиезера (1959 г.) использовалось то обстоятельство, что у вещественной целой функции $f(z)$, наименее уклоняющейся от нуля на оси, существует на оси множество $\{\xi_k\}$, где эта функция принимает с чередующимися знаками значения, по модулю равные $L_f = \sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x)|$. Множество, не являю-

щееся собственной частью множества такого типа, Н. И. Ахиезер назвал чебышевским множеством функции $f(z)$. Для целых функций это множество, вообще говоря, бесконечно, а учитывать его точки приходится все до единой. В связи с этим возник вопрос об учете количества точек в чебышевском множестве, в частности вопрос о том, что является аналогом числа $n+1$, фигурирующего в классической теореме Чебышева.

Систематическое изучение чебышевских множеств для целых функций было начато (1952 г.) Н. И. Ахиезером, предложившим характеризовать количество точек этих множеств ростом вдоль мнимой оси канонического произведения Вейерштрасса $\Omega(z)$, обращающегося в нуль во всех точках множества. Предполагая, что чебышевское множество $\{\xi_k\}$ вещественной целой функции $f(z) \in B_\sigma$ таково, что

$$|\Omega(z)| > C |z|^{-m} e^{q|\operatorname{Im} z|}, \quad |\Omega'(\xi_k)| > C (|\xi_k| + 1)^{-m}, \quad (98)$$

где $q > 0, m \geq 0, k = 0, 1, \dots$, а $C > 0$ — постоянная, он доказал, что либо $\sigma > q$, либо $\sigma = q$ и $m \geq 0$, причем оба равенства $\sigma = q, m = 0$ выполняются лишь для функции

$$f(z) = L \sin(qz + \alpha),$$

где $L = \sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x)|, \alpha$ вещественно.

Н. И. Ахиезер рассмотрел также задачу о нахождении функции, наименее уклоняющейся от нуля, на всей оси в классе функций, принадлежащих B_σ и представимых в виде

$$f(z) = Q(z) + P(z)g(z), \quad (99)$$

где $Q(z)$ и $P(z)$ — многочлены соответственно степени $n-1$ и n , а $g(z)$ — целая функция. Заметим, что при $P(z) = z^n$ этот класс совпадает с классом функций, принадлежащих B_σ , с фиксированными значениями $f(0), f'(0), \dots, f^{n-1}(0)$, а при $P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$ — с классом функций, принадлежащих B_σ , с фиксированными значениями $f(z_1), f(z_2), \dots, f(z_n)$.

Дополнительно предполагается, что многочлен $Q(z)$ веществен, а многочлен $P(z)$ положителен на всей оси. Легко видеть, что наименее уклоняющиеся от нуля функции существуют и среди них есть вещественные. Поэтому можно ограничиться изучением вещественных функций из B_σ , представимых в виде (99). Исследуя чебышевские множества такой функции $f(z)$ и дополнительно предполагая, что значения $|Q(z)|$ в вещественных корнях $P(z)$ отличны от $L = \sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x)|$, Н. И. Ахиезер

устанавливает такую теорему. Если чебышевское множество функции $f(z)$ конечной степени σ удовлетворяет условиям (98) с $q \geq \sigma, m < \frac{n}{2}$, то $f(z)$ является наименее уклоняющейся от нуля функцией, причем единственной, в рассматриваемом классе, а если чебышевское множество удовлетворяет условиям (98) с $q = \sigma, m \geq \frac{n}{2}$, то $f(z)$ не является наименее уклоняющейся от нуля функцией в этом классе. Эту теорему можно считать аналогом теоремы Чебышева.

Используя этот результат, Н. И. Ахиезер дает решение задачи о наименьшем отклонении от нуля на всей оси в классе функций, принадлежащих B_σ и удовлетворяющих условиям

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = a_3,$$

где a_1 и a_3 — вещественные числа. Это решение выражается в эллиптических функциях. Он устанавливает также, что в задаче с условиями (97) в случае $\frac{a_2}{a_0} \in (\sigma^2, 0)$ решение не единственное. Кроме решения $a_0 \cos\left(z \sqrt{-\frac{a_2}{a_0}}\right)$, указанного С. Н. Бернштейном, имеются и другие, выражаемые в эллиптических функциях. В случае $\frac{a_2}{a_0} \in (-\sigma^2, 0)$ решение, указанное Бернштейном, единственное.

Позднее (1954 г.) Н. И. Ахиезер рассмотрел чебышевские множества для задач о наименьшем отклонении на оси с весом $p(x)$. Чебышевским множеством вещественной целой функции $f(z)$ называется множество точек $\{\xi_k\}$, на котором функция $f(x)$ $p(x)$ принимает с чередующимися знаками значения, по модулю равные $\sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x)| p(x)$, не являющиеся собственной частью множества, которое обладает таким свойством. Н. И. Ахиезер накладывает на вес $p(x)$ ограничения, которые, в частности, выполняются, если $p(x) \geq |\omega(x)|^{-1}$, где $\omega(z)$ — целая функция класса P . При этом он устанавливает, что если степень функции $\omega(z)$ равна σ , а $f(z)$ — вещественная целая функция конечной степени не больше σ , чебышевское множество которой таково, что соответствующее каноническое произведение Вейерштрасса $\Omega(z)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} y \cdot \omega(iy) \Omega^{-1}(iy) = 0,$$

то функция $f(z)$ наименее отклоняется от нуля на всей оси с весом $p(x) \geq |\omega(x)|^{-1}$ в классе всех целых функций конечной степени не больше σ с фиксированным значением $f(0)$.

Другой подход к изучению чебышевских множеств целых функций класса B_σ указан (1960 г.) Н. Н. Мейманом. Чебышевское множество вещественной целой функции $f(z)$ разбивает вещественную ось на конечное или счетное множество интервалов j_k . Обозначим через N_k число корней функции $f(z)$ на интервале j_k . Первым индексом дефекта функции $f(z)$ Н. Н. Мейман называет величину

$$I_1 = \sum_k \left[\frac{1}{2} N_k \right].$$

Второй индекс дефекта I_2 определяется как половина числа невещественных корней (заметим, что оно четно) функции $f(z)$. Далее вводится индекс дефекта

$$I = I_1 + I_2$$

функции $f(z)$. Так как между двумя соседними точками чебышевского множества лежит, по крайней мере, один корень функции $f(z)$, то для многочлена степени n равенство $I = 0$ означает, что чебышевское множество состоит из $n + 1$ точек, а неравенство $I > 0$ означает, что в нем меньше $n + 1$ точек. Поэтому индекс дефекта I можно считать мерой недостатка точек в чебышевском множестве.

Н. Н. Мейман установил связь задач о наименьшем отклонении от нуля с теорией целых функций класса B . Пусть вещественная функция $f(z) \in B_\sigma$ обладает конечным индексом дефекта I . Специальной конструкцией ей можно сопоставить целую функцию $\hat{w}(z; f) \in B_\sigma$, принадлежащую к классу B и имеющую в верхней полуплоскости точно I нулей, такую, что $\hat{w}(z; f) = f(z) + ig(z)$, где $g(z)$ — вещественная функция из B_σ . Функцию $\hat{w}(z; f)$ Н. Н. Мейман называет сопутствующей $f(z)$. Используя понятие сопутствующей функции и свойства функций класса B , он изучает задачу о наименьшем отклонении от нуля на всей оси в классе функций, принадлежащих B_σ и представимых в виде (99), где полиномы $Q(z)$ и $P(z)$ вещественны, причем $P(z)$ имеет четное число $2m$ корней. Им доказано, что если вещественная функция $f(z)$ этого класса обладает индексом дефекта $I < m$ и, кроме того, между любыми двумя точками ее чебышевского множества расположено четное число корней $P(z)$, то функция $f(z)$ является единственной наименее уклоняющейся от нуля. Если же $I \geq m$, то, при небольших дополнительных ограничениях на расположение вещественных корней $P(z)$, можно утверждать, что $f(z)$ не является наименее уклоняющейся от нуля.

В частности, для задачи о наименьшем отклонении на всей оси в классе функций, принадлежащих B_σ и имеющих фиксированные значения $f(0), f'(0), \dots, f^{(m-1)}(0)$, Н. Н. Мейман получает необходимое и достаточное условие для того, чтобы вещественная функция $f(z)$ этого класса была единственной наименее уклоняющейся от нуля. Оно состоит в выполнении неравенств $I < m, |f(0)| \leq \sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x)|$. Мейман указывает также выражение для наименее уклоняющейся от нуля функции:

$$f(z) = L \sin \left\{ \int_0^z \frac{q(\xi)}{\sqrt{P(\xi)}} d\xi \right\}, \quad (100)$$

где $L > 0$ — постоянная, а $q(z)$ и $p(z)$ — многочлены соответственно степеней $2I$ и $4I$. Многочлены q и p связаны с некоторыми конформными отображениями полуплоскости с вертикальными разрезами. Хотя число разрезов и их расположение эффективно не определяют, однако выражение (100) дает значительную информацию о виде функции. Отметим, что к аналогичному выражению пришли несколько раньше (1957 г.) Боас и Шеффер, рассматривая задачу о наименьшем отклонении от нуля в классе функций, принадлежащих B_σ и удовлетворяющих условию

$$\sum_{v=1}^m \sum_{j=0}^{n_v} c_v^{(j)} f^{(j)}(x_v) = 1,$$

где x_v и $c_v^{(j)}$ — заданные вещественные числа, причем все x_v различны между собой, а $c_v^{(n_v)} \neq 0$.

Модифицируя свои методы, Н. Н. Мейман рассматривает задачу о наименьшем отклонении от нуля на отрезке в классе всех многочленов

степени n с $k < n$ фиксированными старшими коэффициентами. Он получает в терминах модифицированного индекса дефекта необходимое и достаточное условие для того, чтобы многочлен был наименее уклоняющимся от нуля, и находит для наименее уклоняющегося от нуля многочлена выражение, аналогичное выражению (100). Заметим, что, как и в случае целых функций, полиномы $q(z)$ и $p(z)$ и даже их степени эффективно не определяются. Поэтому задачу в случае $k > 3$, в отличие от случаев $k = 1, 2, 3$, рассмотренных соответственно П. Л. Чебышевым, Е. И. Золотаревым и Н. И. Ахиезером, нельзя считать полностью решенной.

В 1965 г. Н. И. Ахиезер, используя свой способ учета количества точек в чебышевском множестве, рассмотрел весьма общую задачу о наименьшем уклонении от нуля на всей оси с весом $p(x)$ в классе функций, представимых в виде

$$f(z) = Q(z) + P(z)g(z),$$

где $Q(z)$ — непрерывная на вещественной оси функция, $\sup_{-\infty < x < +\infty} |Q(x)| \times \times p(x) < \infty$, $P(z)$ — неотрицательная на вещественной оси целая функция нулевой степени, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln |P(x)|}{1+x^2} dx,$$

а $g(z)$ — целая функция конечной степени не больше σ . При этом предполагается, что существует целая функция $\omega(z)$ конечной степени σ , принадлежащая к классу P и такая, что $p(x) \geq |\omega(x)|^{-1}$. В терминах роста вдоль мнимой оси канонического произведения Вейерштрасса $\Omega(z)$, обращающегося в нуль на чебышевском множестве, Н. И. Ахиезер получил условие, достаточное для того, чтобы функция $f(z)$ наименее уклонялась от нуля с весом $p(x)$ в рассматриваемом классе. Этот результат обобщает его предшествующий (1954 г.) результат. Далее, предположив, что $Q(z)$ и $P(z)$ — вещественные многочлены соответственно степеней $n-1$ и n , причем $P(x) \geq 0$, а $p(x) \equiv 1$, Ахиезер получил своим методом результаты, обобщающие некоторые из упоминавшихся выше результатов Н. Н. Меймана. В частности, Ахиезер доказал, что при указанных условиях, наложенных на многочлены $P(z)$ и $Q(z)$, наименее уклоняющаяся от нуля функция представима в виде (100).

Большое число работ советских математиков посвящено исследованию экстремальных свойств целых функций многих переменных и неравенств для них. Назовем здесь только монографию И. И. Ибрагимова «Экстремальные свойства целых функций конечной степени» (1962 г.) и статью С. М. Никольского «Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных» (1951 г.).

Целые функции и гармонический анализ

Интегральные представления целых функций. Основным фактом, определяющим связь гармонического анализа с целыми функциями конечной степени, является известная теорема Винера и Палая:

для того чтобы функция вещественного переменного $f(x)$ представлялась в форме

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \varphi(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad (101)$$

где $\varphi(\lambda) \in L^2(a, b)$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ принадлежала $L^2(-\infty, +\infty)$ и продолжалась на всю комплексную плоскость как целая функция конечной степени; при этом, если в формуле (101) интервал (a, b) нельзя заменить меньшим, то сопряженная диаграмма функции $f(z)$ совпадает с отрезком (ia, ib) мнимой оси.

Эта теорема, играющая большую роль в гармоническом анализе, была обобщена в различных направлениях. Один из циклов обобщений связан с переходом от пространства $L^2(-\infty, +\infty)$ к более общему гильбертову пространству $L^2_\varphi(-\infty, +\infty)$ заданных на всей оси функций, в котором скалярное произведение определяется формулой

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} \frac{dx}{\varphi(x)},$$

где $\varphi(x) > 0, -\infty < x < +\infty$.

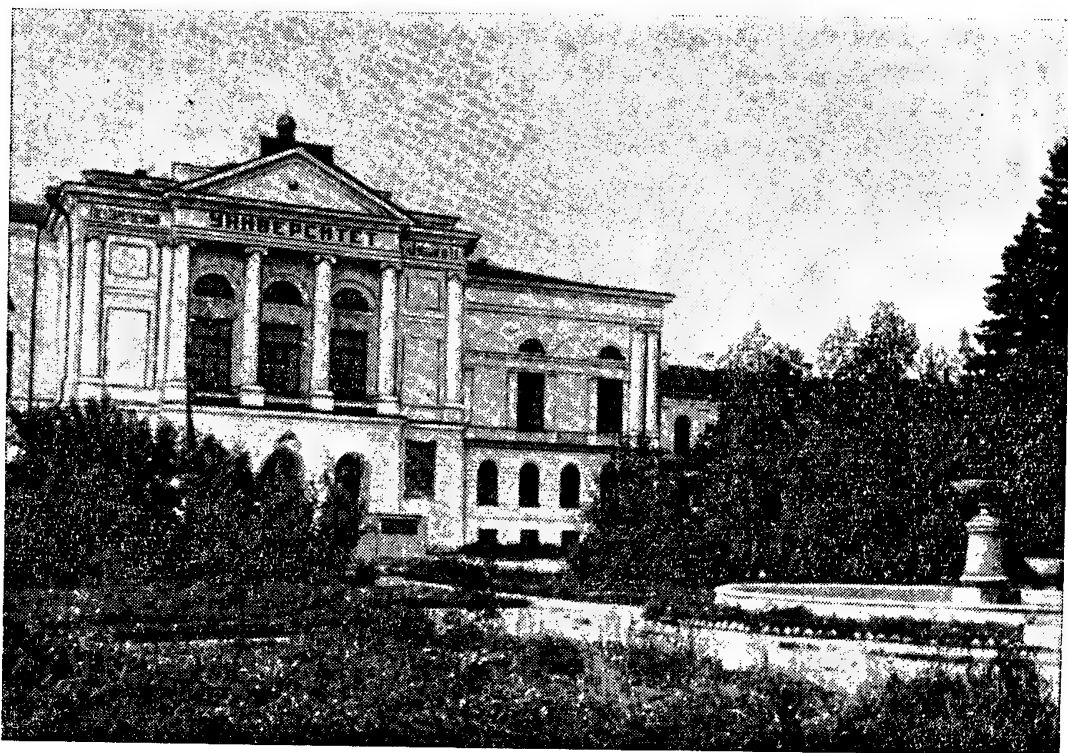
Теорема Планшереля об интегральном представлении функций из $L^2(-\infty, +\infty)$ и теорема Винера и Палая были обобщены С. Бохнером на $L^2_\varphi(-\infty, +\infty)$ в случае полиномиально растущего веса $\varphi(x)$. Для веса $\varphi(x)$, растущего быстрее любой степени, соответствующие обобщения были впервые найдены (1954 г.) Н. И. Ахиезером в предположении, что вес $\varphi(x)$ есть целая функция нулевого рода, все корни которой лежат в полосе $|\operatorname{Re} z| \leq N < \infty$. Дальнейшее обобщение принадлежит (1960 г.) В. П. Гурарию. Он принял в качестве веса $\varphi(x)$ целую функцию, имеющую конечную степень $2\sigma < \infty$ и принадлежащую к классу A , т. е. удовлетворяющую условию

$$\sup_R \left\{ \int_0^R \frac{\ln |\varphi(x) \varphi(-x)|}{1+x^2} dx \right\} < \infty. \quad (102)$$

Представляя $\varphi(x)$ в форме

$$\varphi(x) = \omega(x) \overline{\omega(x)},$$

где $\omega(x)$ — функция, принадлежащая к классу P и имеющая степень σ (принадлежность к классу A обеспечивает возможность такого



Томский государственный университет им. В. В. Куйбышева.

представления — см. ниже), В. П. Гурарий вводит ортонормированную систему функций

$$\omega_k(z) = \sqrt{\frac{z_k - \bar{z}_k}{2\pi i}} \omega(z) \frac{(z - \bar{z}_1)(z - \bar{z}_2) \dots (z - \bar{z}_{k-1})}{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{k-1})(z - z_k)},$$

где z_k — корни функции $\omega(z)$, и доказывает, что всякая функция $f(x) \in L^2_\Phi$ представляется в форме

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \omega_k(x) + \frac{\omega(x)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{ixt} h(t) dt + \frac{\bar{\omega}(x)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{ixt} h(t) dt, \quad (103)$$

где $c_k = (f, \omega_k)$, $h(t) \in L^2(-\infty, +\infty)$, все слагаемые взаимно ортогональны и

$$\|f\|_\Phi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt.$$

Для того чтобы $f(x) \in L^2_\Phi(-\infty, +\infty)$ была ц. ф. к. с. $\sigma + \tau$, необходимо и достаточно, чтобы в представлении (103) функция $h(t)$ была равна нулю почти всюду при $|t| > \tau$.

Интересно, что это обобщение теоремы Планшереля и Винера — Палей является в некотором смысле наиболее широким, а именно: если вес $\varphi(x)$ имеет вид $\varphi(x) = |\omega(x)|^2$, где $\omega(z)$ — голоморфная и без

корней в $\{\operatorname{Im} z < 0\}$ функция, и каждая функция $f(x)$ из $L^2_{\Phi}(-\infty, +\infty)$ допускает представление

$$f(x) = f_1(x) + \frac{\omega(x)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{ixt} h(t) dt + \frac{\bar{\omega}(x)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{ixt} h(t) dt,$$

в котором

$$f_1(x) \in L^2_{\Phi}(-\infty, +\infty), \quad h(t) \in L^2(-\infty, +\infty),$$

$$\|f\|_{\Phi}^2 = \|f_1\|_{\Phi}^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt,$$

и если, кроме того, хотя бы для одной $f(x)$ соответствующая функция $f_1(x)$ является ц. ф. к. с., то это будет верно для всех $f(x)$, причем точная верхняя грань степеней $f_1(x)$ (обозначим ее σ) конечна и функция $\Phi(x)$ совпадает почти всюду на $(-\infty, +\infty)$ с ц. ф. к. с. 2σ , принадлежащей к классу A .

Другое обобщение теоремы Винера и Палая относится к целым функциям конечной степени, у которых индикаторная диаграмма отличается от отрезка мнимой оси. Первая теорема такого рода принадлежит (1956 г.) Б. Я. Левину. Пусть $f(z)$ — ц. ф. к. с., индикаторная диаграмма которой есть многоугольник I . Пусть лучи $\arg z = \theta_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, параллельны нормальям к сторонам этого многоугольника, а функции

$$f_j(x) = f(xe^{i\theta_j}) e^{-h(\theta_j)x}$$

принадлежат $L^2(0, \infty)$. Тогда

$$f(z) = \oint_{\Gamma} e^{\lambda z} \psi(\lambda) d\lambda, \quad (104)$$

где Γ — граница сопряженной диаграммы функции $f(z)$ и

$$\oint_{\Gamma} |\psi(\lambda)|^2 |d\lambda| < \infty.$$

В. Д. Головин заметил, что, обратно, из представления (104) следует принадлежность всех функций $f_j(x)$ к $L^2(0, \infty)$. М. К. Лихт распространил (1964 г.) эту теорему на тот случай, когда индикаторная диаграмма представляет собой круг. Он доказал, что в этом случае для представимости ц. ф. к. с. $f(z)$ в форме (104) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-2h(\theta)x} |f(xe^{i\theta})|^2 dx < \infty.$$

Уже этот результат свидетельствует о том, что при дальнейших обобщениях теоремы Б. Я. Левина следует видоизменить условие.

Дальнейшие обобщения сделаны (1966 г.) В. Э. Кацнельсоном. В том случае, когда индикаторная диаграмма ц. ф. к. с. $f(z)$ представляет собой круг $|z| \leq R$, В. Э. Кацнельсон вводит вес

$$\rho(r) = r \int_0^{\infty} \frac{e^{-2tr}}{\sqrt{2t+t^2}} dt$$

и доказывает, что представимость функции $f(z)$ в виде (104) эквивалентна условию

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} |f(re^{i\theta})|^2 e^{-2rR} \rho(rR) dr d\theta < \infty.$$

Это условие также эквивалентно тому, что преобразование Бореля $\psi(\lambda)$ функции $f(z)$ принадлежит к классу В. И. Смирнова E_2 в области $|\lambda| > R$. Наконец, при таком выборе веса

$$\oint_{|\lambda|=R} |\psi(\lambda)|^2 |d\lambda| = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} |f(re^{i\theta})|^2 e^{-2rR} \rho(rR) dr d\theta,$$

т. е. имеем аналог равенства Парсеваля.

В общем случае произвольной индикаторной диаграммы В. Э. Кацнельсон показывает, что для принадлежности преобразования Бореля $\psi(\lambda)$ к классу E_2 во внешности сопряженной диаграммы необходимо, чтобы существовала постоянная C_Γ , зависящая лишь от Γ и такая, что

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} |f(re^{i\theta})|^2 e^{-2h(\theta)r} dr d\theta \leq C_\Gamma \oint_\Gamma |\psi(\lambda)|^2 |d\lambda|.$$

Если индикаторная диаграмма — многоугольник, то это условие является необходимым и достаточным.

Для исследования вопроса о представлении ц. ф. к. с. в случае произвольной индикаторной диаграммы В. Э. Кацнельсон вводит во внешности Γ сопряженной диаграммы вес

$$\rho_\Gamma(\zeta) = |\zeta - a_1(\zeta)| + |\zeta - a_2(\zeta)|,$$

где $a_1(\zeta)$ и $a_2(\zeta)$ — точки опоры на сопряженной диаграмме опорных прямых, проходящих через точку $\zeta \in \Gamma$. Для функций, голоморфных в Γ_0 , определяется скалярное произведение с помощью интегрирования по Γ с весом $\rho_\Gamma(\zeta)$ и соответствующее гильбертово пространство H_Γ . Для ц. ф. к. с. с индикатором не больше $h(\theta)$ определяется скалярное произведение

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-2h(\theta)r} f(re^{i\theta}) \overline{g(re^{i\theta})} dr d\theta$$

и вводится гильбертово пространство $H_{h(\theta)}$. В. Э. Кацнельсон доказывает, что оператор

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \psi(\lambda) e^{\lambda z} d\lambda$$

(C охватывает Γ) отображает все H_Γ на $H_{h(\theta)}$ и $\|f\|_{h(\theta)} = \|\psi\|_\Gamma$.

В другом направлении теорему Винера и Палая обобщил (1957 г.) Н. И. Ахиезер. Он заменил преобразование Фурье — Планшереля преобразованием Ганкеля. Для того чтобы функция $f(x)$ представлялась в форме

$$f(x) = \int_0^\sigma \sqrt{xt} I_{\nu-\frac{1}{2}}(xt) h(t) dt, \quad (105)$$

где $\nu \geq 0$, $h(t) \in L^2(0, \sigma)$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ принадлежала $L^2(-\infty, +\infty)$ и $x^{-\nu} f(x)$ была четной ц. ф. к. с. не больше σ . В случае целого ν этот результат был получен ранее (1953 г.) В. В. Сташевской.

Далеко идущие обобщения теоремы Винера и Палая, дающие интегральные представления целых функций конечного порядка $\rho \geq \frac{1}{2}$, которые принадлежат L^2 с весом на системе лучей, исходящих из начала координат, а также целых функций бесконечного порядка, которые принадлежат L^2 с весом на системе параллельных прямых, получены в 1952—1966 гг. М. М. Джрбашяном. Результаты этих исследований Джрбашяна подытожены в его монографии «Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области» (1966 г.). Приведем некоторые из этих результатов.

Введем предварительно некоторые обозначения. Фиксируем $\rho \geq \frac{1}{2}$ и натуральное число $\kappa \geq [2\rho] - 1$. Пусть совокупность чисел $\{\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{\kappa+1}\}$ удовлетворяет условиям

$$-\pi < \vartheta_0 < \vartheta_1 < \dots < \vartheta_\kappa \leq \pi < \vartheta_{\kappa+1} = \vartheta_0 + 2\pi,$$

$$\max(\vartheta_{r+1} - \vartheta_r) = \frac{\pi}{\rho}.$$

Обозначим через $\{(\vartheta_r, \vartheta_{r+1})\}_{r=0}^p$, $0 \leq p \leq \kappa$, совокупность тех интервалов из $\{(\vartheta_r, \vartheta_{r+1})\}_{r=0}^\kappa$, для которых выполняется равенство $\vartheta_{r+1} - \vartheta_r = \frac{\pi}{\rho}$, и положим $\theta_k = \frac{1}{2}(\vartheta_{r_k} + \vartheta_{r_k+1})$, $k = 0, 1, \dots, p$. Пусть $\omega \in (-1 + 1)$, а $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_p\}$ — набор $p + 1$ неотрицательных чисел. Обозначим через $W_\sigma^{(\rho)}(\omega; \{\vartheta_r\}_{r=0}^\kappa, \{\sigma_k\}_{k=0}^p)$ класс, состоящий из целых функций порядка ρ и нормального типа не больше σ , удовлетворяющих условиям

$$\int_0^\infty |f(te^{-i\vartheta_r})|^2 t^\omega dt < \infty \quad (r = 0, 1, \dots, \kappa),$$

$$h(-\theta_k) \leq \sigma_k \leq \sigma \quad (k = 0, 1, \dots, p).$$

Теперь сформулируем одну из основных теорем М. М. Джрбашяна. Класс $W_{\sigma}^{(\rho)}(\omega; \{\vartheta_r\}_{r=0}^{\infty}, \{\sigma_k\}_{k=0}^{\infty})$ совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление

$$f(z) = \sum_{k=0}^p \int_0^{\sigma_k} E_{\rho}(e^{i\vartheta_k} z \tau^{\frac{1}{\rho}}; \mu) \varphi_k(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau,$$

где

$$\mu = \frac{\omega + \rho + 1}{2\rho}, \quad \varphi_k(\tau) \in L^2(0, \sigma_k),$$

а $E_{\rho}(z; \mu)$ — обобщенная функция Миттаг-Леффлера:

$$E_{\rho}(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)}. \quad (106)$$

Функции $\varphi_k(\tau)$ определяются функцией $f(z)$ однозначно с точностью до множества нулевой меры.

Заметим, что для доказательства этой теоремы использовались новые весьма точные асимптотические формулы для функции $E_{\rho}(z; \mu)$.

Приведем некоторые частные случаи теоремы Джрбашяна.

Рассмотрим класс целых функций порядка $\rho \geq 1$ и нормального типа, удовлетворяющих условиям $(-1 < \omega < +1)$:

$$\int_0^{\infty} |f(te^{i\vartheta})|^2 t^{\omega} dt < \infty \quad \text{при } \vartheta = 0, \quad \frac{\pi}{\rho} \leq |\vartheta| \leq \pi,$$

$$h\left(-\frac{\pi}{2\rho}\right) \leq \sigma_1, \quad h\left(\frac{\pi}{2\rho}\right) \leq \sigma_2, \quad \sigma_1 \geq 0, \quad \sigma_2 \geq 0.$$

Этот класс совпадает с множеством функций, допускающих представление

$$f(z) = \int_0^{\sigma_1} E_{\rho}(e^{\frac{i\pi}{2\rho}} z \tau^{\frac{1}{\rho}}; \mu) \varphi_1(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau + \\ + \int_0^{\sigma_2} E_{\rho}(e^{-\frac{i\pi}{2\rho}} z \tau^{\frac{1}{\rho}}; \mu) \varphi_2(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau, \quad (107)$$

где

$$\mu = \frac{\omega + \rho + 1}{2\rho}, \quad \varphi_k(\tau) \in L^2(0, \sigma_k), \quad k = 1, 2.$$

Обозначим через $B_{\rho, \sigma}(\omega)$ класс целых функций порядка $\rho \geq \frac{1}{2}$ и типа не больше σ , удовлетворяющих условию

$$\int_0^{\infty} |f(te^{i\vartheta})|^2 t^{\omega} dt < \infty, \quad \frac{\pi}{2\rho} \leq |\vartheta| \leq \pi,$$



Группа армянских математиков, работающих в области теории функций. 1-й ряд (слева направо): Ф. Г. Арутюнян, С. О. Синанян, А. А. Талалян, М. М. Джрбашян, Н. У. Аракелян; 2-й ряд: Р. И. Осипов, А. А. Китбальян, И. О. Хачатрян, В. С. Захарян, А. Е. Аветисян, Н. Б. Енгибарян. 1967 г.

где $\omega \in (-1, +1)$. Этот класс совпадает с множеством функций, допускающих представление

$$f(z) = \int_0^{\sigma} E_{\rho}(z\tau^{\frac{1}{\rho}}; \mu) \varphi(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau, \quad (108)$$

где $\mu = \frac{\omega + \rho + 1}{2\rho}$, $\varphi(\tau) \in \alpha^2(0, \sigma)$.

Последний результат недавно (1966 г.) обобщен С. А. Акопяном. В качестве ядра интегрального представления Акопян использовал вместо обобщенной функции Миттаг-Леффлера (106) функцию более общего вида. Заметим, что из результата С. А. Акопяна следует также результат Н. И. Ахиезера о представимости в форме (107).

М. М. Джрбашян получил также аналоги теоремы Винера и Палая для специальных классов функций, аналитических на римановой поверхности функции $\ln z$; роль ядра играет обобщенная функция Вольтерра

$$v_{\rho}(z; \mu) = \int_0^{\infty} \frac{z^t}{\Gamma\left(\mu + \frac{t}{\rho}\right)} dt.$$

При подстановке $z = e^w$ эти классы функций переходят в некоторые классы функций бесконечного порядка. Таким образом, получаются теоремы типа теоремы Винера и Палая и для целых функций бесконечного порядка. Приведем одну из таких теорем.

Обозначим через $E_{\sigma}^{(p)}$ класс целых функций $F(w)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln \tilde{M}(u, F)}{u} = \rho, \quad \overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln \tilde{M}(u, F)}{e^{\rho u}} = \sigma,$$

где

$$\tilde{M}(u, F) = \sup_{-\infty < v < \infty} |F(u + iv)|;$$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \tilde{M}(u, F) < \infty;$$

$$\sup_{|v| > \frac{\pi}{2\rho}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |F(u + iv)|^2 du \right\} < \infty.$$

Класс $E_{\sigma}^{(p)}$ совпадает с множеством функций, представимых в виде

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{\rho} \ln \sigma} v_{\rho} \left(e^{w+t}; \frac{1}{2} \right) \psi(t) dt,$$

где $\psi(t)$ — функция, принадлежащая $L^2(-\infty, \frac{1}{\rho} \ln \sigma)$.

В связи с этими интегральными представлениями М. М. Джрбашян получил (1953 г.) некоторые теоремы единственности. Приведем одну из них. Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ , $\frac{1}{2} \leq \rho < 1$, и нормального типа, $|f(re^{i\theta_k})| = o(r^{\gamma})$, $k = 1, 2$, где $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{\rho}$ и $0 \leq \gamma < 1$, $\lambda_n \geq 1$ — номера равных нулю коэффициентов Тейлора $f(z)$. Если $\sum \lambda_n^{-1} = \infty$, то $f(z) \equiv \text{const}$. Условие $\sum \lambda_n^{-1} = \infty$ нельзя ослабить. Эти и другие теоремы единственности М. М. Джрбашяна переносят на случай порядка $\rho \geq \frac{1}{2}$ теорему Вимана, согласно которой целая функция порядка $\rho \geq \frac{1}{2}$, ограниченная на луче, тождественно равна постоянной.

Установлены также широкие обобщения и другой теоремы Винера и Палея, суть которой состоит в том, что класс функций $f(z)$, аналитических в полуплоскости $\text{Re } z > 0$ и удовлетворяющих условию

$$\sup_{0 < x < +\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + iy)|^2 dy \right\} < +\infty,$$

совпадает с множеством функций, допускающих представление вида

$$f(z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} \varphi(t) dt,$$

где $\varphi(t) \in L_2(0, +\infty)$. Например, определив класс $H_2[\alpha; \omega]$ $\left(\frac{1}{2} < \alpha < +\infty, -1 < \omega < +1\right)$ как множество аналитических в угловой области $\Delta(\alpha) \left\{|\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha}\right\}$ функций $f(z)$, для которых

$$\sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr \right\} < +\infty,$$

М. М. Джрбашян и А. Е. Аветисян показали, что он совпадает с множеством функций, допускающих представление вида

$$F(z) = \int_0^{+\infty} E_\rho \left(e^{i \frac{\pi}{2\gamma}} z \tau^{\frac{1}{\rho}}; \mu \right) \varphi_{(-)}(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau + \\ + \int_0^{+\infty} E_\rho \left(e^{-i \frac{\pi}{2\gamma}} z \tau^{\frac{1}{\rho}}; \mu \right) \varphi_{(+)}(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau, \quad z \in \Delta(\alpha),$$

где

$$\rho \geq \frac{\alpha}{2\alpha-1}, \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\alpha}, \quad \mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho},$$

функции $\varphi_{(\pm)}(\tau) \in L_2(0, +\infty)$ произвольны. Здесь при $\alpha = \rho = 1$ и $\omega = 0$ содержится также утверждение Винера и Палея.

Обозначим через $H_2[h]$ $(0 < h < +\infty)$ класс функций $G(w)$, аналитических в полосе $S(h) : \left\{|\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2h}\right\}$ и удовлетворяющих условию

$$\sup_{|v| < \frac{\pi}{2h}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |G(u+iv)|^2 du \right\} < +\infty.$$

Класс $H_2[h]$ совпадает с множеством функций, допускающих представление вида

$$G(w) = \int_0^{+\infty} \nu_\rho \left(e^{i \frac{\pi}{2\gamma}} \tau^{\frac{1}{\rho}} e^w; \frac{1}{2} \right) \tau^{-\frac{1}{2}} \varphi_{(-)}(\tau) d\tau + \\ + \int_0^{+\infty} \nu_\rho \left(e^{-i \frac{\pi}{2\gamma}} \tau^{\frac{1}{\rho}} e^w; \frac{1}{2} \right) \tau^{-\frac{1}{2}} \varphi_{(+)}(\tau) d\tau, \quad w \in S(h),$$

где

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{h}, \quad \rho > 0; \quad \varphi_{(\pm)}(\tau) \in L_2(0, +\infty).$$

Важная особенность этого представления состоит в том, что для данной функции $G(w) \in H_2(h)$ функции $\varphi_{(\pm)}(\tau)$ могут быть выбраны так,

чтобы правая часть представления была тождественна нулю в полуплоскостях $\frac{\pi}{2h} + \frac{\pi}{\rho} < |\operatorname{Im} w| < +\infty$ (М. М. Джрбашян и С. А. Акопян).

Во всех этих исследованиях используется развитая М. М. Джрбашяном теория интегральных преобразований в комплексной области, в которой впервые были обнаружены новые тонкие свойства классических функций Миттаг-Леффлера и Вольтерра, нашедших применение в теории целых функций и гармоническом анализе.

Приведем два результата М. М. Джрбашяна, относящихся к этому кругу вопросов.

1. Если параметры ρ и μ подчинены лишь условиям $\rho \geq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$, то для любой функции $g(y)$ из класса $g(y) y^{\mu-1} \in L_2(0, +\infty)$ преобразование Фурье — Планшереля

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \operatorname{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_0^{\sigma} \frac{e^{-ixy} - 1}{-iy} g(y) y^{\mu-1} dy$$

допускает на $(0, +\infty)$ обращения вида

$$\begin{aligned} \operatorname{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_{-\sigma}^{+\sigma} E_{\rho}((ix)^{\frac{1}{\rho}} y^{\frac{1}{\rho}} e^{i\varphi}; \mu) (ix)^{\mu-1} f(x) dx = \\ = \begin{cases} g(y), & \text{при } \varphi = 0, \quad \rho > \frac{1}{2} \\ 0, & \text{при } \frac{\pi}{\rho} \leq |\varphi| \leq \pi, \quad \rho \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Пусть $L\{v_1, \dots, v_p\}$ ($\rho \geq 2$) есть совокупность параллельных прямых

$$\begin{aligned} w = u + iv_k, \quad -\infty < u < +\infty \quad (k = 1, 2, \dots, p), \\ -\infty < v_1 < v_2 < \dots < v_p < +\infty, \end{aligned}$$

и пусть

$$\omega = \max_{1 \leq k \leq p-1} \left\{ \frac{\pi}{v_{k+1} - v_k} \right\}.$$

Если функция $G(w)$ определена на $L(v_1, \dots, v_p)$, причем $G(u + iv_k) \in L_2(-\infty, +\infty)$ ($k = 1, 2, \dots, p$), то для любого $\rho \geq \omega$ справедливы двойственные формулы преобразования

$$\begin{aligned} G(w) = \operatorname{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^p \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{+\sigma} v_{\rho} \left(e^{i\left(\frac{\pi}{2\rho} - v_k\right)} e^{wx^{\frac{1}{\rho}}}; \frac{1}{2} \right) x^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times f_k(x) dx, \quad w \in L(v_1, \dots, v_p), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_k(x) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{l.i.m.}_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_{-\sigma}^{+\sigma} (e^{-ixe^{\rho u}} - 1) e^{-\frac{u\rho}{2}} G(u + iv_k) du \\ (k = 1, 2, \dots, p). \end{aligned}$$

С теоремой Палая и Винера связан вопрос об эквивалентности различных норм в пространстве ц. ф. к. с. Первые исследования в этом направлении были проведены (1951 г.) С. М. Никольским. Им подробно изучена зависимость нормы ц. ф. к. с. в $L^p (-\infty, +\infty)$ от показателя p . Один из основных его результатов формулируется так. Если $f(x) \in L^p (-\infty, +\infty)$ является ц. ф. к. с. σ и $p_1 > p \geq 1$, то

$$\|f\|_{p_1} \leq 2\sigma^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}} \|f\|_p.$$

Этот результат С. М. Никольский обобщил на многомерный случай.

Б. П. Панеях поставил (1961 г.) следующую общую проблему. Будем говорить, что целая функция $f(z_1, \dots, z_n)$ n комплексных переменных является ц. ф. к. с. τ , если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется асимптотическое неравенство

$$|f(z_1, \dots, z_n)| \leq \exp[(\tau + \varepsilon)(|z_1| + \dots + |z_n|)].$$

Обозначим через $W_{\tau, n}$ пространство ц. ф. к. с. τ с нормой

$$\|f\| = \left(\int_{R^n} |f(x_1, \dots, x_n)|^2 dx_1 \dots dx_n \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (109)$$

Требуется описать класс измеримых множеств $M \subset R^n$ таких, что норма

$$\|f\|_M = \left(\int_M |f(x_1, \dots, x_n)|^2 dx_1 \dots dx_n \right)^{\frac{1}{2}} \quad (110)$$

эквивалентна норме (109).

Б. П. Панеях полностью решил (1962 г.) проблему для одномерного случая, показав, что нормы (109) и (110) эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют $\delta > 0$ и $l > 0$ такие, что любой интервал длины l на прямой $R^{(1)}$ пересекает M по множеству лебеговой меры, большей или равной δ . Для многомерного случая Панеях указал несколько признаков, являющихся либо необходимыми, либо достаточными для эквивалентности норм (109) и (110).

Проблема, поставленная Б. П. Панеяхом, допускает естественное обобщение. Пусть μ — борелевская мера в R^n . Требуется выяснить, каким условиям должна удовлетворять эта мера для того, чтобы норма

$$\|f\|_\mu = \left(\int_{R^n} |f(x_1, \dots, x_n)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \quad (111)$$

была эквивалентной норме (109). Эта проблема подробно исследована (1962, 1965 гг.) В. Я. Лином. Приведем некоторые результаты В. Я. Лина. 1. Класс допустимых мер, т. е. таких, для которых норма (111) конечна для любой $f \in W_{\tau, n}$, совпадает с классом мер, для которых при некотором $h > 0$ $\sup_{\eta \in R^n} \mu(K(\eta, h)) < \infty$, где $K(\eta, h)$ — полуоткрытый сверху куб в R^n с центром в точке η и ребром h . 2. Класс допустимых

мер, для которых норма (111) эквивалентна норме (109) в $W_{\tau,n}$ хотя бы для одного значения $\tau \geq 0$, совпадает с классом мер, для которых при некотором $h \geq 0$ $\inf_{\eta \in R^n} \mu(K(\eta, h)) > 0$. 3. Если мера μ допустима

и непрерывна на бесконечности (это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta > 0$ и $N > 0$, что $\mu(K(\eta, \sigma)) < \varepsilon$ при $\eta \in K(0, N)$), то, для того чтобы порожденная ею норма (111) была эквивалентна норме (109) в $W_{\tau,1}$ при любом $\tau > 0$, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $h > 0$ выполнялось неравенство $\inf_{\eta \in R^n} \mu(K(\eta, h)) > 0$.

Корни целых функций, представленных рядами и интегралами показательных функций. Для почти периодических функций хорошо известен следующий аналог теоремы Винера и Палея. Для того чтобы спектр почти периодической функции $f(x)$ лежал на отрезке $[-\Delta, +\Delta]$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ продолжалась на всю комплексную плоскость как целая функция конечной степени, не превосходящей Δ . Более того, сопряженная диаграмма такой функции совпадает с наименьшим отрезком, содержащим все точки $i\lambda_k$, где $\{\lambda_k\}$ — спектр.

Распределение корней голоморфных почти периодических функций изучалось главным образом в работах Иессена. В 1949 г. М. Г. Крейн и Б. Я. Левин исследовали с этой точки зрения почти периодические функции с ограниченным спектром, концы которого $-\Delta$ и Δ сами входят в спектр функции. Такие функции названы функциями класса $[\Delta]$. Для принадлежности почти периодической функции к классу $[\Delta]$ необходимо и достаточно, чтобы она была целой функцией конечной степени Δ с индикаторной диаграммой, расположенной симметрично относительно вещественной оси, и чтобы все ее корни лежали в некоторой полосе $|\operatorname{Im} z| \leq h < \infty$. Если обозначить через $n(t)$ число корней такой функции $f(z)$ в прямоугольнике $|y| \leq h, |x| \leq t$ (при $t < 0$ через $n(t)$ обозначено число корней в прямоугольнике $|y| \leq h, -t \leq x < 0$, взятое со знаком минус), то

$$n(t) = \frac{\Delta}{\pi} + \omega(t),$$

где $\omega(t)$ — функция, ограниченная и S_p -почти периодическая (в смысле В. В. Степанова) при любом $p > 0$.

М. Г. Крейн и Б. Я. Левин дали полную характеристику множества корней почти периодической функции класса $[\Delta]$. Для того чтобы функция $f(z)$ принадлежала к классу $[\Delta]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

а) функция $f(z)$ представляется в форме

$$f(z) = C \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=-N}^N \left(1 - \frac{z}{a_k}\right); \quad (112)$$

б) корни a_k функции $f(z)$ образуют почти периодическое точечное множество и представляются в форме $a_k = \frac{\pi}{\Delta}k + \psi(k)$, где $\psi(k)$ — комплекснозначная ограниченная функция;

в) при любом целом τ

$$L_{\tau}[\varphi] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\psi(k+\tau) - \psi(k)] \frac{k}{k^2+1} \leq M,$$

причем M не зависит от τ .

При выполнении условия б) условие в) эквивалентно следующему: точки a_k представляются в форме $a_k = \frac{\pi}{\Delta}k + \psi(k)$, где $\psi(z)e^{-i\pi z}$ — целая функция конечной степени не больше π , ограниченная на вещественной оси.

Далее установлено, что если $\psi(x)$ — некоторая почти периодическая функция с абсолютно сходящимся рядом Фурье и

$$a_k = \frac{\pi}{\Delta}k + \psi(k), \quad k = 0 \pm 1, \pm 2, \dots, \Delta > 0,$$

то функция $f(z)$, определенная равенством (112), является функцией класса $[\Delta]$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье. Используя эти результаты, В. П. Потапов показал (1949 г.), что всякий почти периодический полином безгранично делим в кольце целых почти периодических функций класса $[\Delta]$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье, и дал полную классификацию всех таких делителей.

Ряд исследований посвящен распределению корней целых функций, удовлетворяющих некоторым условиям, обобщающим условие почти периодичности.

Б. Я. Левин определил (1956 г.) пространство целых функций конечной степени с нормой

$$\|f(z)\|_I = \sup_{\substack{r>0 \\ 0 \leq \theta < 2\pi}} (|f(re^{i\theta})| e^{-h(\theta)r}), \quad (113)$$

где $h(\theta)$ — опорная функция некоторой ограниченной выпуклой области I . Им введен класс E_I обобщенных почти периодических функций как замыкание по норме (113) множества экспоненциальных полиномов

$$P(z) = \sum_{k=1}^n a_k e^{\lambda_k z}$$

с показателями λ_k , принадлежащими границе области $\bar{I}$, получаемой из I отражением в вещественной оси. Естественным образом определяется спектр функции из E_I . Доказано, что если сопряженная диаграмма функции $f(z) \in E_I$ совпадает с выпуклой оболочкой спектра, то $f(z)$ — функция в. р. р. и, следовательно, множество ее корней правильно распределено при показателе, равном единице. Такое совпадение всегда бывает, если I — многоугольник или если

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\lambda_k z},$$

где $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty$, а λ_k принадлежат границе ограниченной выпуклой области.

В недавно опубликованной (1966 г.) работе В. Э. Кацнельсона проведено исследование расположения корней целых функций вида

$$f(z) = \int_{-\Delta}^{+\Delta} e^{itz} \varphi(t) dt,$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная функция, отличная от нуля на концах сегмента $[-\Delta, +\Delta]$. Этот класс аналогичен классу $[\Delta]$. Показано, что если $\varphi(t)$ — функция ограниченной вариации, то все корни функции $f(z)$ лежат в некоторой полосе $|\operatorname{Im} z| < h$. В случае непрерывной $\varphi(t)$ корни функции $f(z)$ не обязательно должны лежать в полосе. Если $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем α , $0 < \alpha \leq 1$, то все корни $f(z)$ лежат в области

$$|y| < c_1 |x|^{1-\alpha} + c_2,$$

где C_1 и C_2 — положительные постоянные. Построенные примеры показывают, что эта теорема точная.

С распределением корней специальных классов ц. ф. к. с. связан вопрос о представлении неотрицательной на вещественной оси ц. ф. к. с. данного класса в виде квадрата модуля ц. ф. к. с. этого же класса. Первый результат в этом направлении был получен (1916 г.) Л. Фейером и Ф. Риссом. Их теорема гласит: тригонометрический полином

$$\varphi(z) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikhz},$$

неотрицательный на вещественной оси, можно представить в виде

$$\varphi(x) = |\omega(x)|^2, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (114)$$

где полином

$$\omega(z) = \sum_{k=0}^n a_k e^{ikhz}$$

не имеет корней в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$.

М. Г. Крейн, исследуя функционалы в классе функций B_σ , обобщил (1944 г.) эту теорему, показав, что ц. ф. к. с. σ , неотрицательная и ограниченная на вещественной оси, представляется в форме (114), где $\omega(z)$ — ц. ф. к. с. без корней в нижней полуплоскости, индикаторная диаграмма которой лежит на отрезке $[-i\sigma, 0]$ мнимой оси. Очевидно, что в формуле (114) $\omega(x)$ можно заменить функцией $\omega_1(x) = e^{-i\frac{\sigma}{2}x} \omega(x)$ степени $\frac{\sigma}{2}$. Условие ограниченности на вещественной оси было ослаблено (1946 г.) С. Н. Бернштейном. Бернштейн заменил его условием $\varphi(x) \leq H(x)$, где $H(z)$ — четная целая функция нулевого рода с неотрицательными коэффициентами. Н. И. Ахиезер показал (1948 г.), что необхо-

димое и достаточное условие для представимости неотрицательной на оси функции $\varphi(z)$ конечной степени σ в виде (114), где $\omega(z)$ — ц. ф. к. с. $\frac{\sigma}{2}$ без корней в нижней полуплоскости, состоит в принадлежности к классу A и, следовательно, в выполнении условия (102).

Другое обобщение теоремы Фейера — Рисса получил (1946 г.) Б. Я. Левин, перейдя от конечных тригонометрических сумм к абсолютно сходящимся тригонометрическим рядам вида

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k x} \left(|\lambda_k| \leq \sigma, \quad \sum_k |c_k| < \infty \right). \quad (115)$$

Если $f(x) \geq m > 0$, $-\infty < x < \infty$, то $f(x) = |\omega(x)|^2$, где $\omega(x)$ представляется абсолютно сходящимся рядом (115) при $0 \leq \lambda_k < \sigma$ и не имеет корней в нижней полуплоскости. Эта теорема обобщена Б. Я. Левиным на целые функции, представимые интегралами Фурье — Стильеса

$$f(x) = \lambda + \int_{-\sigma}^{+\sigma} e^{ixt} dv(t),$$

где λ — постоянная, а $v(t)$ — функция ограниченной вариации. М. Г. Крейн показал (1957 г.), что требование $f(x) \geq m > 0$ можно ослабить, заменив его требованием $f(x) \geq 0$.

Многие результаты, относящиеся к тригонометрическим полиномам, были перенесены на ц. ф. к. с., ограниченные в том или ином смысле на вещественной оси, с помощью следующей теоремы (1937 г.) Б. М. Левитана. Для каждой целой функции $f(z) \in B_\sigma$ можно построить последовательность тригонометрических полиномов

$$S_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n c_k^{(n)} e^{i \frac{k}{n} \sigma x},$$

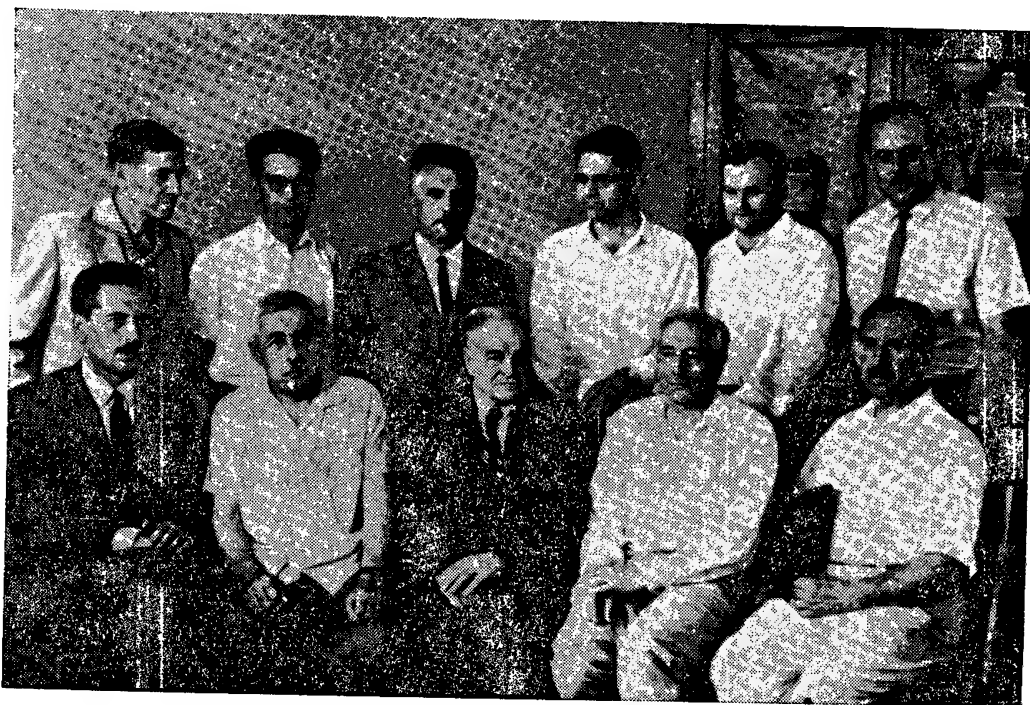
ограниченных на оси той же константой, что и $f(x)$, которая равномерно сходится к $f(x)$ на любом конечном интервале вещественной оси. Н. И. Ахиезер перенес (1946 г.) эту теорему на ц. ф. к. с., имеющие на оси степенной рост, а В. А. Марченко (1950 г.) — на ц. ф. к. с., имеющие на оси мажоранту $\alpha(x)$, удовлетворяющую условиям

$$\alpha(x) \geq 1, \quad \alpha(x_1 + x_2) \leq \alpha(x_1) \alpha(x_2),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln \alpha(x)}{1+x^2} dx < \infty.$$

Л. И. Ронкин заменил (1953 г.) второе условие требованием $\alpha(x_2) \geq \alpha(x_1)$ при $|x_2| > |x_1|$ и перенес теорему Левитана в обобщенном таким образом виде на ц. ф. к. с. нескольких переменных.

Теория целых функций и теория разложений вероятностных законов. С теорией целых функций тесно связан один из весьма важных разделов теории вероятностей — теория разложений вероятностных законов. Изложению этой теории посвящена монография



Группа харьковских математиков. 1-й ряд (слева направо): А. В. Погорелов, Н. И. Ахиезер, М. Н. Марчевский, Б. Я. Левин, Я. П. Бланк; 2-й ряд: А. С. Лейбин, В. А. Марченко, Д. З. Гордевский, М. С. Лившиц, И. В. Островский, И. Е. Тарапов. 1968 г.

Ю. В. Линника «Разложения вероятностных законов» (1960 г.), в которой с исчерпывающей полнотой отражены достижения в этой области до 1960 г. и сформулированы актуальные проблемы. Большая часть результатов по теории разложений получена с помощью методов теории целых функций. Некоторые задачи и полученные в связи с ними в теории разложений результаты интересны с точки зрения теории целых функций.

Основной задачей теории разложений вероятностных законов является описание всех компонент данного вероятностного закона. Напомним, что вероятностным законом называется неубывающая непрерывная слева функция $F(x)$, $-\infty < x < +\infty$, нормированная условиями $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$. Закон $F_1(x)$ называется компонентой закона $F(x)$, если найдется закон $F_2(x)$ такой, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x-s) dF_2(s) = (F_1 * F_2)(x), \quad (116)$$

при этом закон F называется композицией законов F_1 и F_2 .

Легко видеть, что каждый закон $F(x)$ можно представить в виде $F = F_c * \varepsilon_c$, где $F_c(x) = F(x+c)$, а $\varepsilon_c(x)$ — закон с единственной точкой роста в c . Компоненты вида F_c и ε_c называются несобственными компонентами закона F . Существуют законы, имеющие лишь несобственные компоненты, такие законы называются неразложимыми, они играют роль простых чисел.

Характеристической функцией (х. ф.) закона $F(x)$ называется функция, определенная равенством

$$\varphi(z; F) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} dF(x), \quad -\infty < z < +\infty.$$

Поскольку соотношение (116) эквивалентно, как известно, соотношению

$$\varphi(z; F) = \varphi(z; F_1) \varphi(z; F_2),$$

основную задачу теории разложений можно сформулировать следующим образом: описать все разложения данной х. ф. на множители, являющиеся х. ф.

Роль теории целых функций в теории разложений определяется в основном двумя обстоятельствами. Во-первых, класс законов, х. ф. которых являются целыми (точнее, могут быть аналитически продолжены до целых), достаточно широк и содержит, в частности, самые важные для теории вероятностей законы: закон Гаусса и закон Пуассона. Во-вторых, как показал (1933 г.) Д. А. Райков, если х. ф. данного закона F является целой, то целой является и х. ф. любой компоненты закона F .

Класс целых х. ф. является собственным подклассом класса целых функций, удовлетворяющих неравенству

$$|\varphi(x + iy)| \leq |\varphi(iy)|, \quad -\infty < x, \quad y < +\infty,$$

и называющихся хребтовыми функциями. Поэтому задачу о нахождении компонент закона F , имеющего целую х. ф., можно разбить на две: 1) описать все хребтовые множители, на которые разлагается х. ф. $\varphi(z; F)$, 2) отобрать те из множителей, которые являются х. ф. В большинстве случаев трудность представляет лишь первая задача. Это задача о целых функциях и решается она с помощью аппарата целых функций.

Первым результатом (1936 г.), относящимся к теории разложений, была теорема Г. Крамера о том, что все собственные компоненты закона Гаусса суть законы Гаусса. Эта теорема эквивалентна следующему утверждению о целых функциях: все нормированные условием $\varphi(0) = 1$ хребтовые множители, на которые разлагается функция вида $\exp\{-\sigma z^2 + i\beta z\}$, $\sigma \geq 0$, $\operatorname{Im} \beta = 0$, имеют такой же вид, как и разлагаемая функция (возможно, с другими параметрами σ и β). Д. А. Райков доказал (1937 г.) для закона Пуассона теорему, аналогичную теореме Г. Крамера; для этого ему потребовалось доказать утверждение, аналогичное приведенному выше, относительно функции вида $\exp\{\lambda(e^{iz} - 1) + i\beta z\}$, $\lambda > 0$, $\operatorname{Im} \beta = 0$.

А. Я. Хинчин установил (1937 г.), что всякий закон F может быть представлен (вообще говоря, неоднозначно) в виде $F = F_1 * F_2$, где F_1 — композиция конечного или счетного множества неразложимых законов, а F_2 — безгранично делимый закон⁸, не имеющий неразложимых компонент. В связи с этим результатом А. Я. Хинчина возник вопрос об описании класса I_0 безгранично делимых законов, не имеющих

⁸ Безгранично делимым называется закон, который при любом $m = 2, 3, 4, \dots$ представляется в виде композиции m одинаковых законов.

неразложимых компонент. В силу упомянутых теорем Г. Крамера и Д. А. Райкова представителями класса I_0 являются законы Гаусса и Пуассона. Некоторые другие представители были указаны Д. А. Райковым (1938 г.) и П. Леви. А. Я. Хинчин отметил, что класс I_0 является собственным подклассом класса всех безгранично делимых законов.

В 1957—1960 гг. Ю. В. Линник провел большой цикл исследований по проблеме описания класса I_0 . Одним из основных результатов этих исследований являются необходимые и близкие к ним достаточные условия для того, чтобы безгранично делимый закон, имеющий среди своих компонент закон Гаусса, принадлежал к I_0 . Из-за громоздкости формулировки мы не приводим здесь эти условия, отметим только, что они являются достаточными и без требования наличия гауссовой компоненты. Им удовлетворяют, в частности, сами законы Гаусса и Пуассона и их композиция, в связи с чем указанные теоремы Г. Крамера и Д. А. Райкова являются частными случаями результата Ю. В. Линника. Результат Ю. В. Линника был дополнен в 1963—1966 гг. И. В. Островским. И. В. Островский получил (1966 г.) также ряд теорем о разложениях многомерных вероятностных законов и, в частности, указал некоторые подклассы многомерного класса I_0 .

Теория приближений функций комплексного переменного

Теория приближений в комплексной области является одним из тех разделов теории аналитических функций, в которых вклад советских математиков особенно велик. Развитие теории приближений, ее методы и результаты тесно переплетаются с развитием общей теории функций комплексного переменного, а многие теоремы, формулируемые в терминах теории приближений, являются по существу весьма тонкими теоремами о свойствах аналитических функций и природе аналитичности. Рассмотрим кратко результаты по некоторым основным разделам теории приближений в комплексной области.

1

Равномерные приближения многочленами и рациональными функциями

В настоящем параграфе рассматриваются проблемы равномерного приближения функций комплексного переменного многочленами и рациональными функциями. В этом разделе теории приближений основополагающими являются исследования П. Л. Чебышева и К. Вейерштрасса.

В 1885 г. Вейерштрасс доказал теорему о возможности равномерного приближения непрерывных функций на отрезке посредством мно-

гочленов. Эта фундаментальная теорема, наряду с первыми исследованиями в теории рядов Фурье, сыграла огромную роль в формировании понятия непрерывной функции и явилась отправным пунктом многочисленных изысканий, относящихся к аналитическому изображению функций, выявлению тех многообразных связей, которые существуют между внутренними свойствами функций и их конструктивным определением с помощью функций из некоторых специальных классов, например с помощью многочленов.

В первый же период развития теории равномерных приближений в ней наметились два основных направления, две группы проблем. К первой группе относятся проблемы, ведущие свое начало непосредственно от Вейерштрасса и связанные с возможностью приближения непрерывных функций на множествах более общей природы, чем отрезок. Другая группа исследований связана в первую очередь с работами Чебышева и других русских математиков и относится к выявлению тех свойств, которые характерны для многочленов данной степени, наименее уклоняющихся от заданной функции, к изучению зависимости между свойствами функций и скоростью их приближения многочленами. Исследования П. Л. Чебышева, В. А. Маркова, С. Н. Бернштейна и других русских математиков в этой области, продолженные их многочисленными последователями как в нашей стране, так и за рубежом, привели к созданию теории наилучших приближений (конструктивной теории функций).

В этом параграфе мы остановимся лишь на проблемах, связанных с возможностью приближения функций многочленами и рациональными функциями.

Рассмотрим сначала вопрос о том, на каких ограниченных замкнутых подмножествах E комплексной плоскости (z) *любая непрерывная функция* допускает равномерное приближение многочленами от z , или, другими словами, допускает разложение в ряд по многочленам от z , равномерно сходящийся на множестве E . Прежде всего отметим два очевидных необходимых условия: множество E не должно иметь внутренних точек и дополнение к E должно быть связно (другими словами, E не должно разбивать плоскость). Действительно, если E содержит внутренние точки, то сумма равномерно сходящегося ряда многочленов обязательно должна быть аналитической в этих точках; с другой стороны, если E разбивает плоскость и g — одна из ограниченных компонент дополнения к E , то из равномерной сходимости многочленов к функции $f(z)$ на множестве E , содержащем границу области g , следует, что многочлены равномерно сходятся и в замыкании $\bar{g}$ области g , и поэтому функцию $f(z)$ при $z \in E$ можно продолжить в область g так, чтобы полученная функция была непрерывной в $\bar{g}$ и аналитической в g (очевидно, это возможно не для всех непрерывных на E функций).

Первое обобщение теоремы Вейерштрасса в указанном направлении было получено Уолшем, перенесшим ее на произвольные жордановы дуги в комплексной плоскости. Заметим, что содержащееся в теореме Уолша топологическое ограничение на множество не связано с

существом задачи. В 1930 г. Гартогс и Розенталь получили результат другого типа. Пользуясь аппаратом, аналогичным интегралу Коши, они доказали следующее усиление теоремы Вейерштрасса: если ограниченное замкнутое множество E не разбивает плоскость и имеет плоскую нулевую меру, то любая непрерывная на E функция допускает равномерное приближение на E многочленами от z . Здесь на множество E в свою очередь налагается дополнительное метрическое условие ($\text{mes}_2 E = 0$), которое, однако, также несущественно.

Исчерпывающее решение рассматриваемой задачи было дано М. А. Лаврентьевым в 1934 г. Оказалось, что отмеченные выше очевидные условия не только необходимы, но и достаточны для возможности равномерного приближения произвольных непрерывных функций. Приведем формулировку теоремы Лаврентьева: для того чтобы любая функция, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве E , разлагалась в равномерно сходящийся на E ряд многочленов от z , необходимо и достаточно, чтобы множество E не имело внутренних точек и не разбивало плоскость.

Если множество E содержит внутренние точки, то в силу сделанного выше замечания относительно аппроксимируемых функций помимо непрерывности на множестве E естественно предполагать аналитичность в каждой его внутренней точке и исследовать возможность аппроксимации при этом предположении. Очевидно, требование связности дополнения к E остается необходимым условием возможности приближения и в этом случае.

Первые результаты о приближении аналитических функций принадлежат Аппелю и Рунге и по времени почти совпадают с исследованием Вейерштрасса. Используя представление аналитических функций интегралом Коши, они доказали следующее предложение: если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\bar{D}$ со связным дополнением, то для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $p(z)$ такой, что

$$\max_{z \in \bar{D}} |f(z) - p(z)| < \varepsilon.$$

По существу были доказаны более общие теоремы — теоремы Рунге, которые можно сформулировать так (E — ограниченное замкнутое множество): 1) каково бы ни было множество E , любая функция, аналитическая на E , допускает равномерное приближение на E посредством рациональных функций от z с полюсами вне E ; 2) для того чтобы любая функция, аналитическая на E , допускала равномерное приближение на E посредством многочленов от z , необходимо и достаточно, чтобы E не разбивало плоскость.

От содержащегося в теореме Рунге требования аналитичности аппроксимируемых функций в граничных точках множества удалось освободиться. Однако даже для замкнутых областей общего вида это было сделано далеко не сразу и потребовало создания специальных методов для решения задач подобного рода. Как отмечалось выше, развитие методов исследования в теории приближения тесно связано с развитием общей теории функций комплексного переменного и в известной мере

отражает последнее; наиболее тесной при этом является связь с результатами, полученными в теории конформных отображений, теории потенциала и емкости множеств на плоскости.

В 1926 г. Уолш доказал теорему о приближении многочленами функций, непрерывных в замкнутых жордановых областях $\bar{D}$ и аналитических в D . Метод доказательства основан на теории конформных отображений, в частности на теореме о равномерной сходимости в замкнутой жордановой области функций, конформно отображающих монотонно убывающую к $\bar{D}$ последовательность областей на единичный круг.

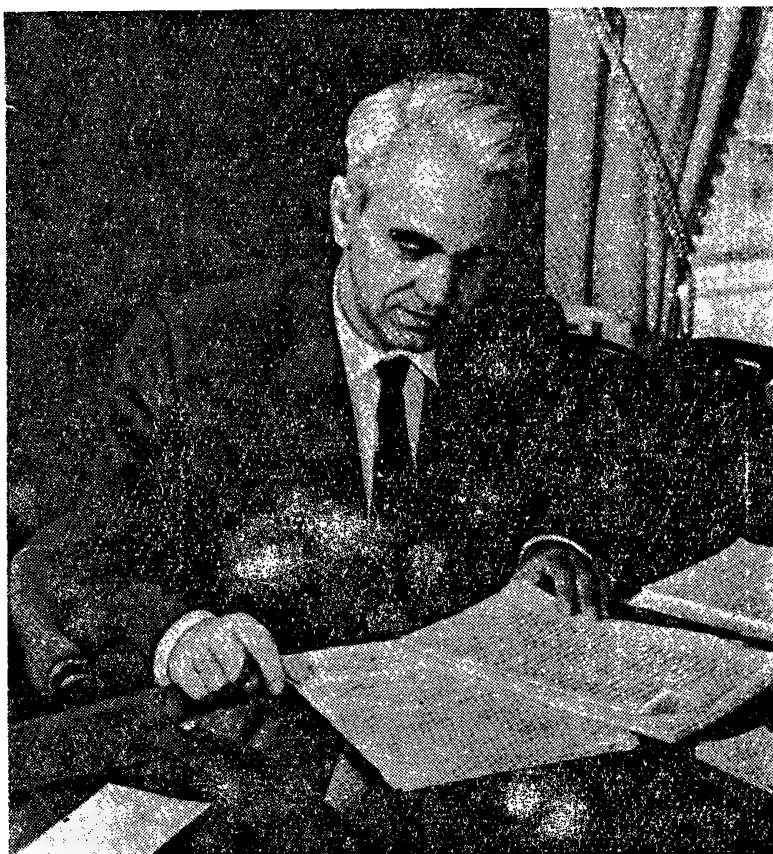
Аналогичная теорема была установлена (1932 г.) Фаррелем для областей D , граница которых является одновременно полной границей дополнительной к $\bar{D}$ области, содержащей бесконечно удаленную точку, в предположении, что два различных простых конца границы не покрывают одну и ту же геометрическую точку и что аппроксимируемая функция, будучи непрерывной в $\bar{D}$ и аналитической в D , принимает постоянные значения на всех простых концах границы области. Дополнительное ограничение на функцию в теореме Фарреля было связано с применявшимся им методом конформных отображений.

Дальнейшее развитие теория полиномиальных приближений получила в двух работах М. В. Келдыша. В первой из них (1940 г.) М. В. Келдыш доказал теорему о возможности равномерного приближения функций, аналитических в D и непрерывных в $\bar{D}$, для областей D , дополнение к замыканию которых связно и которые можно разбить некоторым сечением γ на две части D_1 и D_2 так, чтобы границы D_1 и D_2 не имели общих точек вне γ . Однако, как показал Брауэр, существует область, для которой один из простых концов границы покрывает всю границу; эта область, очевидно, не удовлетворяет предыдущему условию.

В 1945 г. М. В. Келдыш полностью решил проблему о равномерном приближении многочленами в замкнутых областях. Теорему Келдыша можно сформулировать так: для того чтобы любая функция, непрерывная в замкнутой области $\bar{D}$ и аналитическая на множестве внутренних точек $\bar{D}$, разлагалась в ряд по многочленам от z , равномерно сходящийся на $\bar{D}$, необходимо и достаточно, чтобы дополнение к $\bar{D}$ состояло из одной области, содержащей бесконечно удаленную точку.

Рассмотренные выше задачи о приближении на нигде не плотных множествах и приближении в замкнутых областях являются частными случаями следующей задачи: установить, на каких ограниченных замкнутых множествах E любая непрерывная на E и аналитическая во внутренних точках E функция допускает равномерное приближение многочленами от z . Приведенные теоремы Лаврентьева и Келдыша являются решениями этой общей задачи в двух, в известном смысле, крайних случаях: когда E не имеет внутренних точек и, наоборот, когда E является замкнутой областью (замыканием множества своих внутренних точек).

Решение сформулированной общей задачи было получено в 1951 г. С. Н. Мергеляном. Теорема Мергеляна формулируется так: для того



М. В. Келдыш.

чтобы любая функция, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве E и аналитическая на множестве его внутренних точек, допускала равномерное приближение на E посредством многочленов от z , необходимо и достаточно, чтобы множество E не разбивало плоскость. Доказательство этой теоремы позволило также получить исчерпывающее решение следующей проблемы. Пусть E — произвольное ограниченное замкнутое множество; требуется описать функции $f(z)$, $z \in E$, допускающие равномерное приближение на E посредством многочленов от z . Обозначим через $\tilde{E}$ дополнение к неограниченной компоненте дополнения к E ; другими словами, $\tilde{E}$ есть объединение E и всех ограниченных компонент дополнения к E . Множество $\tilde{E}$ можно описать как полиномиальную оболочку множества E , т. е. совокупность всех точек ζ таких, что

$$|p(\zeta)| \leq \max_{z \in E} |p(z)|$$

для любого многочлена $p(z)$.

Ответ на поставленный выше вопрос дает следующая теорема. Пусть E — произвольное ограниченное замкнутое множество. Для того чтобы функция $f(z)$, $z \in E$, допускала равномерное приближение на

E посредством многочленов от z , необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\tilde{f}(z)$, $z \in \tilde{E}$, непрерывная на $\tilde{E}$ и аналитическая на множестве внутренних точек $\tilde{E}$, такая, что $f(z) = \tilde{f}(z)$, $z \in E$.

Остановимся на методе доказательства общей теоремы о приближении многочленами, принадлежащем С. Н. Мергеляну.

Рассмотрим сначала случай нигде не плотных множеств E . Пусть E — нигде не плотное множество со связным дополнением; покажем, что любая функция, непрерывная на E , допускает равномерное приближение на E посредством функций, аналитических на E . Теорема Лаврентьева является следствием этого утверждения и теоремы Рунге.

Важную роль играет так называемая обобщенная формула Коши, или формула Коши для гладких функций. Пусть D — ограниченное открытое множество, граница которого состоит из конечного числа непересекающихся спрямляемых кривых (такие множества будем называть правильными), и функция $f(z)$, $z \in \bar{D}$, имеет непрерывные частные производные в $\bar{D}$. Тогда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f_{\bar{\xi}}(\xi) d\xi d\eta}{\xi - z}, \quad z \in D,$$

где ∂D — граница D , пробегаемая в положительном направлении относительно D . Эта формула легко выводится из классической формулы Грина.

По теореме Вейерштрасса для функций двух переменных любая непрерывная на E функция допускает равномерное приближение на E посредством многочленов от z и $\bar{z}$. Поэтому вопрос о возможности равномерного приближения аналитическими функциями произвольной непрерывной на E функции сводится к соответствующему вопросу для одной функции — $\bar{z}$ (рассматриваемой на множестве E). Функция $\bar{z}$ никак не учитывает свойства множества E . Поэтому гораздо более удобным для дальнейшего является тот факт, что такую же роль — роль «резольвенты» задачи — играет функция

$$\varphi(z) = \iint_E \frac{d\xi d\eta}{\xi - z}, \quad z \in E.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно применить обобщенную формулу Коши к функции $\bar{z}$ и правильному открытому множеству $D \supset E$ такому, что плоская мера $D \setminus E$ достаточно мала. Заметим, что если $\text{mes}_2 E = 0$, то $\varphi(z) = 0$, откуда уже следует сформулированная выше теорема Гартогса — Розенталя.

В общем случае дело сводится к аппроксимации ядра Коши $(\xi - z)^{-1}$. При фиксированном $\xi \in E$ эта функция — как функция от z — имеет особенность на множестве E ; необходимо переместить эту особенность в дополнение к множеству E . Для этого фиксируем открытый круг $K(\xi, \delta)$ с центром в точке ξ и радиусом $\delta > 0$; так как E не

разбивает плоскость, то в круге $K(\zeta, \delta)$ найдется жорданова дуга l диаметра, не меньшего $\frac{\delta}{2}$, принадлежащая дополнению к E . Пусть $\alpha_\zeta(z)$ — функция, конформно отображающая дополнение к l на внутренность единичного круга так, что $\alpha_\zeta(\infty) = 0$, $\alpha'_\zeta(\infty) > 0$. Вне круга $K(\zeta, \delta)$ функция $\alpha_\zeta(z)$ допускает разложение:

$$\alpha_\zeta(z) = \frac{a_1}{z - \zeta} + \frac{a_2}{(z - \zeta)^2} + \dots,$$

при этом коэффициент a_1 (емкость дуги l) удовлетворяет неравенству $a_1 > c\delta$, где $c > 0$ — абсолютная постоянная.

Положим

$$a_\zeta(z) = - \frac{\alpha_\zeta(z)}{a_1}, \quad z \notin l.$$

Функция $a_\zeta(z)$ аналитична всюду вне l , следовательно, и на E . Кроме того, справедливы оценки

$$1) \quad |a_\zeta(z)| \leq \frac{c_1}{\delta}, \quad z \notin l,$$

$$2) \quad \left| \frac{1}{\zeta - z} - a_1(z) \right| \leq \frac{c_2 \delta}{|\zeta - z|^2}, \quad |z - \zeta| > 2\delta,$$

где c_1, c_2 — абсолютные постоянные. Построим функцию $a_\zeta(z)$ для каждой точки $\zeta \in E$; компактность множества E позволяет считать, что среди функций $\{a_\zeta(z); \zeta \in E\}$ имеется лишь конечное число различных функций.

Рассмотрим теперь функцию

$$a(z) = \int_E a_\zeta(z) d\xi d\eta, \quad z \in E;$$

эта функция аналитична на E (как сумма конечного числа аналитических на E функций). Имеем

$$\varphi(z) - a(z) = \int_E \int \left[\frac{1}{\zeta - z} - a_\zeta(z) \right] d\xi d\eta, \quad z \in E.$$

При фиксированном $z \in E$ оцениваем разность $\varphi(z) - a(z)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} |\varphi(z) - a(z)| &\leq \int_{E_{z,2\delta}} \int \left[\frac{1}{|\zeta - z|} + |a_\zeta(z)| \right] d\xi d\eta + \\ &+ \int_{E \setminus E_{z,2\delta}} \int \left| \frac{1}{\zeta - z} - a_\zeta(z) \right| d\xi d\eta, \end{aligned}$$

где

$$E_{z,2\delta} = E \cap \{z : |z - \zeta| \leq 2\delta\}.$$

Применяя в первом слагаемом оценку 1), во втором — оценку 2), получаем

$$|\varphi(z) - a(z)| \leq c_3 \delta + c_4(E) \cdot \delta \ln \frac{1}{\delta}, \quad z \in E,$$

где $c_4(E)$ зависит только от диаметра множества E . Из последней оценки ввиду произвольности δ вытекает наше утверждение.

Доказательство теоремы о приближении в общем случае, когда множество E имеет внутренние точки, сопряжено с дополнительными трудностями. Наметим схему этого доказательства.

Пусть E — ограниченное замкнутое множество, не разбивающее плоскость; функция $f(z)$ непрерывна на E и аналитична на множестве внутренних точек E . Как и выше, нам нужно приблизить функцию $f(z)$ на множестве E посредством аналитических на E функций, т. е. функций, область аналитичности которых больше области аналитичности функции $f(z)$.

Начнем с приближения функции $f(z)$ гладкими функциями, область аналитичности которых, правда, несколько меньше области аналитичности функции $f(z)$. Такие приближающие функции можно строить с помощью усреднения функции $f(z)$.

Не ограничивая общности, можно считать, что функция $f(z)$ определена и непрерывна на всей комплексной плоскости и равна нулю в окрестности бесконечно удаленной точки. Зафиксируем $\delta > 0$ и рассмотрим функцию

$$f(z, \delta) = \frac{1}{\pi \delta^2} \int \int_{|\xi - z| \leq \delta} f(\xi) d\xi d\eta.$$

Нетрудно установить следующие свойства функции $f(z, \delta)$:

$$|f(z) - f(z, \delta)| \leq \omega(\delta)$$

для всех z , где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции $f(z)$; функция $f(z, \delta)$ имеет непрерывные частные производные, причем

$$|f'_z(z, \delta)| \leq \frac{\omega(\delta)}{\delta}$$

для всех z ; если функция $f(z)$ аналитична в δ -окрестности точки z , то

$$f(z, \delta) = f(z).$$

Пусть E_δ — множество точек $z \in E$, расстояние которых до границы E не превосходит δ ; имеем

$$f(z, \delta) = f(z), \quad z \in E \setminus E_\delta.$$

К функции $f(z, \delta)$ уже применима обобщенная формула Коши; применяя эту формулу к $f(z, \delta)$ и достаточно близкому к E правильному открытому множеству $D \supset E$, можно свести вопрос о приближении функции $f(z, \delta)$ (а тем самым и $f(z)$) к соответствующему вопросу для функции

$$\varphi(z, \delta) = \int \int_{E_\delta} \frac{f'_\xi(\xi, \delta) d\xi d\eta}{\xi - z}, \quad z \in E.$$

Учитывая принцип максимума, достаточно приблизить эту функцию на границе ∂E множества E посредством функций, аналитических на E . Эта задача уже близка к рассмотренной ранее, и здесь естественно начать с аппроксимации ядра Коши $(\zeta - z)^{-1}$, где ζ фиксировано, а $z \in E$. Однако есть и существенные различия. Основное из них заключается в том, что если множество E действительно имеет внутренние точки, то функцию $\varphi(z, \delta)$, при фиксированном $\delta > 0$, нельзя с любой наперед заданной точностью приблизить посредством аналитических на E функций (так как сама она аналитична не на всем множестве внутренних точек E). Можно рассчитывать приблизить $\varphi(z, \delta)$ с заданной точностью лишь за счет выбора достаточно малых δ (или, что то же самое, за счет сужения множества E_δ , имеющего особенности функции $\varphi(z, \delta)$). Однако при этом возрастает оценка для $f'_\zeta(\zeta, \delta)$ — в правой части этой оценки стоит $\frac{\omega(\delta)}{\delta}$. Поэтому аппроксимация ядра Коши с точностью, характеризуемой условием 2), уже недостаточна.

Зафиксируем, как и выше, точку $\zeta \in E_\delta$ и рассмотрим круг $K(\zeta, 2\delta)$; в этом круге, очевидно, есть жорданова дуга l , которая принадлежит дополнению к E и диаметр которой превосходит $\frac{\delta}{2}$. Основываясь на этом, можно построить функцию $a_\zeta(z)$, аналитическую вне l , удовлетворяющую той же оценке 1), но более точно аппроксимирующую ядро Коши

$$\left| \frac{1}{\zeta - z} - a_\zeta(z) \right| \leq \frac{c\delta^2}{|\zeta - z|^3}, \quad |z - \zeta| > 4\delta.$$

Функция $a_\zeta(z)$, фигурирующая в последнем неравенстве, также строится с помощью отображающей функции $\alpha_\zeta(z)$, но более сложным путем:

$$a_\zeta(z) = -\frac{\alpha_\zeta(z)}{a_1} + \frac{a_2 \alpha_\zeta^2(z)}{a_1^3}.$$

Это выражение составлено так, чтобы можно было освободиться от второго слагаемого в разложении функции $\alpha_\zeta(z)$.

Как и выше, рассмотрим функцию

$$a(z, \delta) = \iint_{E_\delta} a_\zeta(z) d\xi d\eta, \quad z \in E.$$

Эта функция аналитична на множестве E , причем

$$|\varphi(z, \delta) - a(z, \delta)| \leq c \omega(\delta), \quad z \in E;$$

отсюда уже следует теорема.

Приведенный метод доказательства теорем о приближении многочленами носит весьма общий характер и применяется при решении других задач теории приближения функций. Из изложенного выше видно, что по существу доказываются теоремы о приближении аналитическими функциями, причем тот факт, что множество E не разбивает плоскость, используется только для конкретного построения функций $a_\zeta(z)$, ап-

проксимирующих ядро Коши. Поэтому тот же метод позволил далеко продвинуть исследование задачи о приближении функций рациональными (или аналитическими) функциями. Рассмотрим эту задачу.

Начнем с задачи о приближении непрерывных функций. Вопрос ставится так: при каких условиях, налагаемых на множество E , любая функция, непрерывная на E , допускает равномерное приближение на E посредством рациональных функций с полюсами вне E . Как и выше, множество E предполагается ограниченным и замкнутым; конечно, в этом случае есть смысл рассматривать и неограниченные множества, однако подстановка $w = \frac{1}{z-a}$, где a — какая-либо точка дополнения к E , легко сводит задачу о приближении рациональными функциями на неограниченных множествах к соответствующей задаче для ограниченных множеств.

Теорема Рунге о приближении аналитических функций рациональными показывает, что задача о приближении рациональными функциями с полюсами вне E эквивалентна задаче о приближении произвольными функциями, аналитическими на E . Это замечание важно потому, что при исследовании указанной задачи позволяет отвлечься от конкретной алгебраической природы аппроксимирующих функций.

Очевидно, для того чтобы приближение любой непрерывной на E функции аналитическими было возможно, необходимо, чтобы E не имело внутренних точек. Однако второе условие, необходимое для возможности приближения многочленами, — связность дополнения к E — теперь уже отпадает; аппроксимирующие рациональные функции могут иметь особенности в каждой компоненте дополнения к E , и предельная функция не обязательно должна иметь аналитическое продолжение в какую-либо из этих компонент, как это было в случае многочленов.

Таким образом, остается одно очевидное необходимое условие возможности приближения: множество E должно быть нигде не плотным множеством. Оказывается, это условие далеко не достаточно для того, чтобы любая непрерывная на E функция допускала равномерное приближение рациональными функциями. Приведем соответствующий пример (точнее, класс примеров).

Пусть D_0 — жорданова область, ограниченная спрямляемой кривой L_0 . Рассмотрим счетную систему жордановых областей D_k ($k = 1, 2, \dots$), ограниченных спрямляемыми кривыми L_k и удовлетворяющих следующим условиям: $\bar{D}_k \subset D_0$, $k = 1, 2, \dots$, $\bar{D}_i \cap \bar{D}_j = \emptyset$, $i \neq j$; множество $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$ всюду плотно в D_0 , $\sum l_k < \infty$, где l_k — длина кривой L_k . Положим

$$E_0 = \bar{D}_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k.$$

Обозначим через L объединение кривой L_0 , пробегаемой против часовой стрелки, и всех кривых L_k , $k = 1, 2, \dots$, пробегаемых по часовой стрелке. Легко понять, что для любой рациональной функции с полюсами вне E_0 и, следовательно, для любой функции $f(z)$, допускающей

равномерное приближение на E посредством таких рациональных функций, справедливо равенство

$$\int_L f(z) dz = \left(\int_{L_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{L_k} \right) f(z) dz = 0.$$

В то же время ясно, что это равенство справедливо не для любой функции, непрерывной на E_0 . Более того, если обозначить через S_M совокупность всех функций, непрерывных на E_0 и ограниченных числом $M > 0$, то

$$\sup_{f \in S_M} \inf_{\{r(z)\}} \max_{z \in E_0} |f(z) - r(z)| = M,$$

где $\{r(z)\}$ — совокупность всех рациональных функций с полюсами вне E_0 . Таким образом, с точки зрения приближения на E_0 всего множества функций S_M класс всех рациональных функций ничем не лучше тривиального класса, состоящего из единственной функции $r(z) \equiv 0$.

Нигде не плотные множества E могут иметь точки, в окрестности которых дополнение к E очень «разрежено»; хотя такие точки топологически и являются граничными точками E , с точки зрения поведения аналитических на E функций они являются, скорее, «внутренними» точками. Анализ рассматриваемой нами задачи показывает, что, для того чтобы приближение было возможно, множество E не должно иметь таких точек — дополнение к множеству E должно быть достаточно «массивно» в окрестности каждой точки множества E . Мы уже видели, как требование «массивности» (существование дуги диаметра $\delta\delta$, принадлежащей дополнению к E , в δ -окрестности каждой точки E) используется при доказательстве возможности приближения аналитическими функциями. Интересно отметить, что при исследовании задач о приближении на множествах, не разбивающих плоскость, не требовалось накладывать метрических условий на дополнение к E : топологическое условие — связность дополнения к E — уже гарантировало его достаточную «массивность».

Рассмотрим дополнительные условия, которые накладываются на множество E и при которых любая непрерывная на E функция допускает равномерное приближение рациональными функциями.

Первые результаты в этом направлении были получены Уолшем, доказавшим возможность приближения непрерывных функций рациональными на жордановых кривых (более общо — на множествах, являющихся объединением конечного числа жордановых дуг и кривых), а также Гартогсом и Розенталем, доказавшими соответствующую теорему для множеств, которые имеют плоскую нулевую меру.

Задачу о равномерном приближении рациональными функциями подробно исследовал (1952 г.) С. Н. Мергелян. Используя метод, описанный выше, он установил ряд достаточных условий возможности приближения, связанных с «массивностью» дополнения к E ; при этом «массивность» дополнения характеризуется в геометрических терминах. Приведем одну из теорем подобного рода.

Пусть E — ограниченное замкнутое множество, не имеющее внутренних точек, $\xi \in E$, $\delta > 0$. Обозначим через $d_{\xi, \delta}$ верхнюю грань диаметров связанных компонент той части дополнения к E , которая принадлежит кругу $K(\xi, \delta)$. Положим

$$d_\delta = \inf_{\xi \in E} d_{\xi, \delta}.$$

Число d_δ характеризуется тем, что в δ -окрестности каждой точки $\xi \in E$ есть дуга, принадлежащая дополнению к E и имеющая диаметр, превосходящий cd_δ , где c — постоянная, сколь угодно близкая к единице. Анализ доказательства теоремы Лаврентьева, приведенного выше, позволяет установить следующее утверждение: если

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{d_\delta}{\delta^2} = \infty,$$

то любая функция, непрерывная на множестве E , допускает равномерное приближение на множестве E посредством рациональных функций от z . Отсюда следует, в частности, возможность приближения на нигде не плотных множествах, дополнение к которым состоит из конечного числа компонент.

Приведенная теорема остается справедливой и при переходе к локальному условию: для всех (или почти всех — относительно плоской меры) точек $\xi \in E$

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{d_{\xi, \delta}}{\delta^2} = \infty.$$

Следовательно, приближение возможно на множествах E , каждая точка которых является граничной точкой какой-либо компоненты дополнения к E .

Однако необходимых и достаточных условий возможности приближения аналитическими функциями в геометрических терминах получить не удалось. Потребовалось новое понятие, тесно связанное с аналитическими функциями, — понятие аналитической емкости множеств. Это понятие было введено Альфорсом в связи с проблемой Пенлеве об устранимых особенностях аналитических функций. Полное решение задачи о приближении непрерывных функций аналитическими в терминах аналитической емкости получено А. Г. Витушкиным в 1959 г.

Пусть e — ограниченное замкнутое подмножество комплексной плоскости, g — неограниченная компонента дополнения к e . Рассмотрим класс B_g функций $f(z)$, $z \in g$, определяемый следующими условиями: 1) $f(z)$ аналитична в области g ; 2) $|f(z)| \leq 1$, $z \in g$; 3) $f(\infty) = 0$. Положим

$$\gamma(e) = \sup_{f \in B_g} |f'(\infty)| = \sup_{f \in B_g} \lim_{z \rightarrow \infty} |zf(z)|.$$

Величина $\gamma(e)$ называется аналитической емкостью множества e .

Пусть $f(z) \in B_g$, ζ — фиксированная точка; разложим функцию $f(z)$ в окрестности точки ∞ в ряд по степеням $(z - \zeta)^{-1}$:

$$f(z) = \frac{a_1}{z - \zeta} + \frac{a_2}{(z - \zeta)^2} + \dots;$$

коэффициент $a_1 = a_1(f)$, очевидно, не зависит от ζ . Имеем

$$\gamma(e) = \sup_{f \in B_g} |a_1(f)|.$$

Пусть, наконец, Γ — произвольная система конечного числа взаимно внешних спрямляемых жордановых кривых, охватывающих множество e ; тогда

$$\gamma(e) = \sup_{f \in B_g} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz \right|.$$

Аналитическую емкость произвольного ограниченного множества F определим как верхнюю грань $\gamma(e)$ в классе всех замкнутых множеств $e \subset F$.

Отметим, что если e — континуум (связное замкнутое множество), то аналитическая емкость e совпадает с гармонической или логарифмической емкостью $c(e)$ множества e и соизмерима с диаметром $d(e)$ множества e ; точнее:

$$\frac{1}{4} d(e) \leq \gamma(e) = c(e) < d(e).$$

В общем случае

$$\gamma(e) \leq c(e) < d(e).$$

Чтобы уяснить связь рассматриваемой задачи с понятием аналитической емкости, вернемся к методу доказательства теоремы о приближении непрерывных функций аналитическими, изложенному выше. Как отмечалось, эта задача имеет «резольвенту»

$$\varphi(z) = \int_E \int \frac{d\xi d\eta}{\xi - z}, \quad z \in E;$$

задача о приближении произвольной непрерывной на E функции аналитическими сводится к задаче о приближении функции $\varphi(z)$.

Ядро Коши $(\zeta - z)^{-1}$ при фиксированном $\zeta \in E$ как функция z имеет особенность в точке $z = \zeta \in E$, будучи аналитической функцией во всех остальных точках плоскости. Естественно возникает вопрос: нельзя ли особенность ядра Коши переместить из точки $\zeta \in E$ на замкнутое множество e , лежащее в достаточно малой окрестности точки ζ , но уже в дополнении к множеству E , так, чтобы полученная функция $\alpha(z)$ вне некоторой окрестности точки ζ была близка к $(\zeta - z)^{-1}$, будучи аналитической уже всюду вне e (значит, и на множестве E). Близость $\alpha(z)$ к $(\zeta - z)^{-1}$ в окрестности бесконечно удаленной точки означает, что должно выполняться равенство

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \alpha(z) (\zeta - z) = 1.$$

С другой стороны, мы должны позаботиться и о том, чтобы верхняя грань этой функции в дополнении к e была по возможности меньше, для того чтобы ее значения в окрестности точки ζ после интегрирования по E мало влияли на степень приближения к $\varphi(z)$.

Таким образом, мы приходим к следующей экстремальной задаче: в классе всех функций $\alpha(z)$, аналитических в дополнении к e и удовлетворяющих условию $\alpha(z)(\zeta - z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$, найти функцию, для которой величина $\sup |\alpha(z)|$ по дополнению к e принимала бы наименьшее значение. Эта задача представляет собой лишь переформулировку задачи, приводящей к понятию аналитической емкости; экстремальной функцией в ней является функция

$$\alpha_e(z) = - \frac{f_e(z)}{\gamma(e)},$$

где $f_e(z)$ — экстремальная функция в задаче об аналитической емкости (так называемая функция Альфорса множества e), $\gamma(e)$ — аналитическая емкость e . Таким образом, задача о приближении оказалась тесно связанной с тем, насколько велика аналитическая емкость дополнения к E в окрестности каждой точки $\zeta \in E$.

В частности, описанный выше метод позволяет установить, что достаточные условия возможности приближения, которые были сформулированы в терминах d_δ и $d_{\zeta,\delta}$, справедливы и после замены d_δ и $d_{\zeta,\delta}$ терминами γ_δ и $\gamma_{\zeta,\delta}$, где $\gamma_{\zeta,\delta}$ — аналитическая емкость той части дополнения к E , которая принадлежит кругу $K(\zeta, \delta)$, а γ_δ — нижняя грань $\gamma_{\zeta,\delta}$ по всем $\zeta \in E$. Однако, как показал А. Г. Витушкин, эти условия также и необходимы. Более того, оказалось, что условие, необходимое для возможности приближения, по форме еще сильнее — емкость пересечения дополнения к E с произвольным кругом должна быть равна емкости самого круга (отметим, что емкость круга равна его радиусу); таким образом, эта емкость должна принимать максимальное возможное значение. Теорему Витушкина можно сформулировать так: каждое из следующих условий необходимо и достаточно для того, чтобы любая функция, непрерывная на E , допускала равномерное приближение на E посредством рациональных функций с полюсами вне E (или посредством аналитических на E функций):

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\gamma_{\zeta,\delta}}{\delta^2} = \infty \text{ для почти всех } \zeta \in E; \quad (A)$$

$$\gamma_{\zeta,\delta} = \delta \text{ для любых } \zeta \text{ и } \delta > 0. \quad (B)$$

Тот факт, что из условия (A) вытекает условие (B), является выражением свойства «неустойчивости» аналитической емкости, замеченного А. Г. Витушкиным именно в связи с решением рассматриваемой задачи. Поэтому необходимыми и достаточными условиями возможности приближения оказываются столь разные по форме условия, как (A) и (B) (и тем самым целый спектр промежуточных между (A) и (B) условий). Естественно, что в формулировке теоремы приведены условия, в известном смысле «крайние». Условие (B) — наиболее удобная форма

необходимого условия в терминах $\gamma_{\zeta, \delta}$. Оно допускает некоторое обобщение. Следующее свойство эквивалентно условиям (А) и (В): для любого ограниченного открытого множества

$$\gamma(G \setminus E) = \gamma(G). \quad (C)$$

С другой стороны, условие (А) — наиболее сильная (из известных) форма достаточных условий в терминах аналитической емкости; во всяком случае, δ^2 в этом условии нельзя заменить выражением $\delta^{2+\alpha}$ ни при каком $\alpha > 0$. Некоторые остающиеся открытыми в этом направлении вопросы более естественно рассматривать как вопросы об уточнении свойства «неустойчивости» аналитической емкости.

Другое решение задачи о приближении непрерывных функций рациональными было предложено С. Н. Мергеляном в 1954 г. Это решение формулируется в терминах, непосредственно связанных с принципом максимума.

Пусть E — ограниченное замкнутое множество, ζ — произвольная точка множества E , $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ фиксированы. Положим

$$m(\zeta, \varepsilon, \delta) = \sup |r(\zeta)|,$$

где верхняя грань берется в классе всех рациональных функций $r(z)$, удовлетворяющих условиям $|r(z)| \leq 1$ для $z \in E$ и $|r(z)| < \varepsilon$ для $z \in E$, $|z - \zeta| > \delta$. Заметим, что значение $m(\zeta, \varepsilon, \delta)$ не изменится, если верхнюю грань рассматривать в классе всех функций, аналитических на множестве E . Функция $m(\zeta, \varepsilon, \delta)$ не возрастает с убыванием ε или δ (при фиксированном другом переменном). Поэтому существует предел

$$m_E(\zeta) = m(\zeta) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \delta \rightarrow 0}} m(\zeta, \varepsilon, \delta).$$

Очевидно, что $0 \leq m(\zeta) \leq 1$. Доказано, что функция $m(\zeta)$, $\zeta \in E$ может принимать только два значения, 0 и 1 (А. А. Гончар). Таким образом, с помощью этой функции множество E можно разбить на два непересекающихся множества:

$$E_0 = \{\zeta \in E : m(\zeta) = 0\}, \quad E_1 = \{\zeta \in E : m(\zeta) = 1\}.$$

Первое из этих множеств состоит из тех точек $\zeta \in E$, в окрестности которых множество E достаточно «массивно»; сам факт, что $m(\zeta) = 0$, свидетельствует о том, что в этой точке имеет место некоторый обобщенный принцип максимума для аналитических на E функций. Точки множества E_0 играют роль как бы «внутренних» точек E . Наоборот, в окрестности точек множества E_1 «массивным» является дополнение к E ; эти точки — и только они — являются «граничными» точками E с точки зрения рассматриваемой задачи.

Разбиение E на множества E_0 и E_1 , вообще говоря, отличается от разбиения на топологическую внутренность и границу E . Разумеется, топологически внутренние точки E принадлежат E_0 ; однако этому множеству могут принадлежать и некоторые граничные, в топологическом смысле, точки E , именно те из них, в окрестности которых дополнение

к E «разрежено». Поэтому множество E_1 может быть собственным подмножеством границы E . Отметим, что $\bar{E}_1$ всюду плотно на границе E .

С. Н. Мергелян доказал следующую теорему: для того чтобы любая функция, непрерывная на множестве E , допускала равномерное приближение на E посредством рациональных функций, необходимо и достаточно, чтобы $m(\zeta) \equiv 1$, $\zeta \in E$, или, что то же самое, $E_0 = \emptyset$. Другими словами, для осуществления приближения необходимо и достаточно, чтобы множество E не имело «внутренних» точек. Если $\text{mes}_2 E_0 = 0$, то $E_0 = \emptyset$. Тем самым еще раз подтверждается аналогия между E_0 и топологической внутренностью E .

В 1959 г. Э. Бишоп получил еще одно решение рассматриваемой задачи, в терминах минимальной границы алгебры $R(E)$, состоящей из всех функций $f(z)$ ($z \in E$), допускающих равномерное приближение на E посредством рациональных функций (с полюсами вне E).

Точка $\zeta \in E$ называется точкой пика алгебры $R(E)$, если существует функция $f(z) \in R(E)$ такая, что $|f(\zeta)| > |f(z)|$ для всех $z \in E$, $z \neq \zeta$. Минимальная граница M_0 алгебры $R(E)$ может быть определена как совокупность всех ее точек пика. Теорема Бишоп: для того чтобы алгебра $R(E)$ совпадала с алгеброй всех непрерывных на E функций, необходимо и достаточно, чтобы $M_0 = E$. Если $\text{mes}_2 (E \setminus M_0) = 0$, то $M_0 = E$.

Как показал А. А. Гончар, функция $m(\zeta)$, $\zeta \in E$, является характеристической функцией минимальной границы алгебры $R(E)$. Поэтому теоремы Мергеляна и Бишоп тождественны.

Для того чтобы из приведенных теорем можно было извлечь геометрические условия возможности приближения, необходимо иметь локальные условия принадлежности точки ζ множеству E_1 , или, что то же самое, локальные условия того, что ζ является точкой пика алгебры $R(E)$. Достаточное условие отмечено А. А. Гончаром: если

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{d_{\zeta, \delta}}{\delta} > 0, \quad \zeta \in E,$$

то ζ является точкой пика алгебры $R(E)$. В терминах $d_{\zeta, \delta}$, носящих геометрический характер, это условие существенно уточнить невозможно; например, в знаменателе дроби нельзя добавить множитель $\varphi(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, как бы медленно ни стремилась к нулю эта функция.

Напомним, что $d_{\zeta, \delta}$ обозначает верхнюю грань диаметров связных компонент пересечения дополнения к E с кругом $|z - \zeta| < \delta$. Поэтому любая точка $\zeta \in E$, граничная для какой-либо компоненты дополнения к E , является точкой пика $R(E)$. Таким образом, как непосредственные следствия общей теоремы Мергеляна — Бишоп можно получить утверждения о том, что приближение осуществляется для нигде не плотных множеств, не разбивающих плоскость (теорема Лаврентьева) или разбивающих ее на конечное число компонент, для множеств, все или почти все точки которых являются граничными для отдельных компонент дополнения и т. п.

Необходимое и достаточное условие точки пика получено недавно (1966 г.) М. С. Мельниковым. Для того чтобы точка ζ являлась точкой



А. А. Гончар.

пика $R(E)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \gamma_n = \infty,$$

где γ_n — аналитическая емкость той части дополнения к E , которая принадлежит кольцу:

$$\frac{1}{2^{n+1}} < |z - \zeta| < \frac{1}{2^n}.$$

Это условие можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\int_0^1 \frac{\gamma_{\zeta, \delta}}{\delta^2} d\delta = \infty.$$

Ряд, фигурирующий в условии точки пика, совершенно аналогичен ряду Винера — Келдыша, расходимость которого, по известной теореме Келдыша, является критерием точки устойчивости

для задачи Дирихле в пространстве; единственная разница заключается в том, что гармоническая емкость заменяется аналитической. Разумеется, объединяя теоремы о возможности приближения в терминах функции $m(\zeta)$ или минимальной границы $R(E)$ с локальным критерием точки пика, можно снова получить необходимое и достаточное условие возможности приближения в терминах аналитической емкости. Однако в полученной на этом пути теореме не было бы ничего нового. Как и следовало ожидать, локальное условие точки пика оказалось промежуточным между условиями (А) и (В) теоремы Витушкина.

Пусть теперь E — произвольное ограниченное замкнутое множество. Рассмотрим общую задачу о приближении функций, непрерывных на E и аналитических на множестве внутренних точек E , посредством рациональных функций с полюсами вне E . Пусть $d_{\zeta, \delta}$ и $\gamma_{\zeta, \delta}$ имеют смысл, указанный выше; положим

$$d_\delta = \inf d_{\zeta, \delta}, \quad \gamma_\delta = \inf \gamma_{\zeta, \delta},$$

где нижние грани в отличие от предыдущего берутся по всем граничным точкам множества E (для нигде не плотных множеств числа d_δ и γ_δ совпадают с рассмотренными ранее).

Следующая теорема была установлена С. Н. Мергеляном в 1952 г. (одновременно с общей теоремой о приближении многочленами; метод ее доказательства проиллюстрирован выше на примере множеств со связным дополнением): если

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{d_\delta}{\delta} > 0,$$

то любая функция, непрерывная на множестве E и аналитическая на множестве внутренних точек E , допускает равномерное приближение на E посредством рациональных функций (с полюсами вне E). Аналогично устанавливается, что достаточным является и условие

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\gamma_\delta}{\delta} > 0.$$

Из приведенной теоремы вытекает, что приближение осуществимо для множеств E , дополнение к которым состоит из конечного числа компонент, или, более общо, диаметры дополнительных компонент которых ограничены снизу фиксированным положительным числом, зависящим только от E .

Пример замкнутой области $\bar{D}$, для которой приближение, вообще говоря, не имеет места, указал Е. П. Долженко. Такую область можно (несколько упрощая конструкцию Долженко) построить следующим образом. Пусть K_0 — открытый единичный круг, $e \subset K_0$ — жорданова дуга положительной плоской меры (или произвольное замкнутое нигде не плотное множество, не разбивающее плоскость и такое, что существует отличная от тождественной постоянной функция $\varphi(z)$, непрерывная на всей плоскости и аналитическая вне e). Замкнутую область $\bar{D}$ получим удалением из $K_0 \setminus e$ счетной системы открытых кружков $|z - z_i| < r_i$, находящихся на положительном расстоянии друг от друга и от единичной окружности, накапливающихся к e (точнее, $\{z_i\}' = e$) и таких, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i < \infty.$$

Тогда для любой функции $f(z)$, допускающей равномерное приближение на $\bar{D}$ посредством рациональных функций с полюсами вне $\bar{D}$,

$$\left(\int_{|z|=1} + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{|z-z_i|=r_i} \right) f(z) dz = 0.$$

В то же время для функции $\varphi_0(z)$, непрерывной на всей плоскости, аналитической вне e и такой, что $\varphi_0'(\infty) \neq 0$ (для рассматриваемых e такая функция существует), фигурирующая в последней формуле сумма интегралов равна

$$\int_{|z|=1} \varphi_0(z) dz = 2\pi i \varphi_0'(\infty) \neq 0$$



Е. П. Долженко.

(заметим, что выше интеграл по $|z| = 1$ берется против часовой стрелки, а по всем $|z - z_i| = r_i$ — по часовой стрелке).

Приведенный пример показывает, что на множестве E приближение может не иметь места, если его внутренняя граница достаточно «массивна» (внутренней границей множества называется совокупность тех его граничных точек, которые не являются граничными точками отдельных компонент дополнения; для построенной выше области $\bar{D}$ внутренней границей является множество e). Для некоторых специальных классов замкнутых областей и функций $f(z)$ Е. П. Долженко получил теоремы о возможности приближения в терминах емкости внутренней границы; при этом емкость определяется относительно соответствующих классов функций.

В 1962 г. С. Н. Мергелян рассмотрел задачу о приближении функций, удовлетворяющих дополнительным свойствам гладкости, в частности принадлежащих к классам Липшица, для произвольного множества E . Выяснилось, что для возможности приближения необходимо и достаточно, чтобы в любом круге дополнение к E было столь же «массивно», как и дополнение к множеству внутренних точек E ; при этом «массивность» должна измеряться с помощью емкости, тесно связанной с рассматриваемыми классами функций.

Пусть e — ограниченное замкнутое множество, α — положительное число. α -емкость $\gamma_\alpha(e)$ множества e определим как $\sup |f'(\infty)|$ в классе функций $f(z)$, заданных и удовлетворяющих условию Липшица порядка α на всей комплексной плоскости, аналитических вне множества e , ограниченных по модулю единицей и равных нулю в бесконечности. Если вместо условия Липшица ограничимся только требованием непрерывности функций $f(z)$ на всей плоскости, то соответствующую величину назовем C -емкостью и обозначим $\gamma_0(e)$.

Для произвольного ограниченного множества F положим $\gamma_\alpha(F) = \sup \gamma_\alpha(e)$ в классе всех замкнутых множеств e , принадлежащих F , $\alpha \geq 0$. Легко понять, что для открытых множеств G $\gamma_\alpha(G) = \gamma(G)$ при любом $\alpha \geq 0$. В общем случае (в частности, для замкнутых множеств) это не так: $\gamma_\alpha(F)$ может оказаться существенно меньше, чем $\gamma(F)$.

Пусть E — произвольное замкнутое ограниченное множество; через E^0 обозначим множество внутренних точек E . В дальнейшем аппроксимируемые функции будем считать определенными на всей плоскости; принадлежность функций к классу $\text{Lip } \alpha$ означает, что на всей плоскости эта функция удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > 0$. Для того чтобы любая функция класса $\text{Lip } \alpha$, $\alpha > 0$, аналитическая на множестве E^0 , допускала равномерное приближение на множестве E посредством рациональных функций с полюсами вне E (или аналитических на E функций), необходимо и достаточно, чтобы для любого круга K выполнялось равенство

$$\gamma_\alpha(K \setminus E) = \gamma_\alpha(K \setminus E^0).$$

Следующие два результата оттеняют специфику рассматриваемой задачи.

Для того чтобы любую функцию, принадлежащую к классу $\text{Lip } \alpha$ и аналитическую на E^0 , можно было равномерно приблизить на E посредством функций, принадлежащих к классу $\text{Lip } \beta$, $\beta > \alpha > 0$, и аналитических на E^0 , необходимо и достаточно, чтобы для любого круга K

$$\gamma_\alpha(K \setminus E^0) = \gamma_\beta(K \setminus E^0).$$

Каково бы ни было $\alpha > 0$, существует множество E такое, что не все функции класса $\text{Lip } \alpha$ допускают равномерное приближение на E посредством функций, модуль непрерывности которых есть $o(\delta^\alpha)$ (и те и другие функции предполагаются аналитическими на E^0).

Последнее утверждение относится к случаю, когда разрыв между классами аппроксимируемых и аппроксимирующих функций максимально сужается (по сравнению с основной задачей — о приближении непрерывных на E и аналитических на E^0 функций посредством аналитических на E функций); тем не менее приближение возможно не всегда.

Теорема о возможности приближения функций класса $\text{Lip } \alpha$, аналитических на E^0 , наводит на мысль о том, что решение задачи о приближении в основном случае должно формулироваться аналогично, с заменой γ_α символом γ_0 . Однако доказать это долгое время не удавалось.

Полное решение задачи о приближении в основном случае — для произвольных непрерывных на E и аналитических на E^0 функций — получено лишь в 1965, 1966 гг. А. Г. Витушкиным. Витушкин доказал следующую теорему: для того чтобы любая функция, непрерывная на множестве E и аналитическая на множестве внутренних точек E , допускала равномерное приближение на E посредством рациональных функций с полюсами вне E (или аналитических на E функций), необходимо и достаточно, чтобы для любого круга K выполнялось равенство $\gamma_0(K \setminus E) = \gamma_0(K \setminus E^0)$. Ему принадлежат также эквивалентные формулировки этой теоремы, более удобные для использования в качестве достаточных условий возможности приближения.

Одновременно А. Г. Витушкин и М. С. Мельников доказали ряд достаточных условий возможности приближения, формулируемых в геометрических терминах и существенно усиливающих известные ранее. Ими установлено, что приближение осуществимо, если каждая граничная точка множества E является граничной точкой какой-либо компоненты дополнения к E (внутренняя граница E — пустое множество), внутренняя граница E состоит из конечного числа точек (Витушкин), лежит на аналитической кривой (Мельников) или на кривой, составленной из конечного числа дуг Ляпунова (Витушкин). Если внутренняя граница имеет положительную C -емкость, то, как показывает пример Долженко, приближения может не быть; вопрос о том, достаточно ли для возможности приближения того, чтобы внутренняя граница имела нулевую C -емкость, пока остается открытым.

Для доказательства всех этих результатов потребовалось привлечение новых идей (разделение особенностей аналитических функций с помощью разбиения единицы специального вида; исследование поведения второго коэффициента в разложении аналитических функций

в окрестности бесконечно удаленной точки — А. Г. Витушкин) и доказательства важных свойств аналитической емкости (оценка интеграла Коши через аналитическую емкость множества особенностей функций, свойства полуаддитивности аналитической емкости — М. С. Мельников, А. Г. Витушкин).

По-видимому, новые подходы окажутся плодотворными при решении и других задач теории равномерных приближений, остающихся пока открытыми (локальная характеристика функций, допускающих приближение аналитическими функциями; характеристика континуумов таких, что в алгебре $R(E)$ справедливо свойство единственности, и др.).

Рассмотренные выше задачи о равномерном приближении аналитическими функциями во многих отношениях аналогичны задачам о равномерном приближении гармоническими функциями — на плоскости и главным образом в пространстве трех или большего числа переменных. Последние задачи возникли на базе далеко развитой теории потенциала и гармонических функций; они тесно связаны с узловыми проблемами этой теории, в первую очередь с проблемой устойчивости решений задачи Дирихле относительно внешних вариаций границы области. Этим в известной мере объясняется тот факт, что задачи о приближении гармоническими функциями были решены значительно раньше, чем соответствующие задачи для аналитического случая. И хотя отмеченная выше аналогия носит чисто внешний характер, полученные результаты оказали определенное влияние на исследования в теории приближения аналитическими функциями; в какой-то мере происходило и обратное влияние. В связи с этим мы кратко остановимся на основных результатах, относящихся к вопросу о возможности приближения гармоническими функциями.

Пусть $\mathcal{E}$ — ограниченное замкнутое подмножество трехмерного евклидова пространства R^3 . Основной вопрос заключается в том, при каких условиях, налагаемых на множество $\mathcal{E}$, любая функция, непрерывная на $\mathcal{E}$ и гармоническая на множестве внутренних точек $\mathcal{E}$, допускает равномерное приближение на $\mathcal{E}$ посредством функций, гармонических на $\mathcal{E}$ (т. е. гармонических в некоторой окрестности, зависящей от функции, множества $\mathcal{E}$).

Заметим, что эта задача эквивалентна задаче о приближении гармоническими «рациональными» функциями, точнее, линейными комбинациями элементарных гармонических функций вида

$$r_n^y(x) = \frac{h_n(x)}{|x - y|^{n+1}},$$

где $h_n(x)$ — однородный гармонический многочлен степени n , а множество $\{y\}$ совпадает с дополнением к $\mathcal{E}$ (достаточно, чтобы это множество имело по крайней мере одну точку в каждой компоненте дополнения к $\mathcal{E}$). В частности, если $\mathcal{E}$ не разбивает пространства, то задача о приближении гармоническими функциями эквивалентна задаче о приближении гармоническими многочленами.

Основные результаты, относящиеся к проблеме приближения гармоническими функциями, получены М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым. В 1941 г. М. В. Келдыш получил ответ на основной вопрос для случая замкнутых областей $\mathcal{E} = \bar{D}$; соответствующая теорема сформулирована в терминах устойчивости в $\bar{D}$ всякой разрешимой задачи Дирихле. Интересно отметить, что все принципиальные особенности общей задачи проявляются уже в случае приближения гармоническими многочленами на замкнутых областях $\mathcal{E} = \bar{D}$, не разбивающих пространства. Теорему Келдыша можно сформулировать так: для того чтобы любая функция, непрерывная на $\mathcal{E}$ и гармоническая на множестве внутренних точек $\mathcal{E}$, допускала равномерное приближение на $\mathcal{E}$ посредством функций, гармонических на $\mathcal{E}$, необходимо и достаточно, чтобы множество точек разрешимости задачи Дирихле совпадало с множеством ее точек устойчивости.

Позднее теорема Келдыша была перенесена на случай произвольных ограниченных замкнутых множеств $\mathcal{E}$ (Брело, Дени, Н. С. Ландкоф). По существу ее формулировка остается такой же. Однако в общем случае более удобно пользоваться понятием точек разреженности множества, введенного Брело. Точки, не являющиеся точками разрешимости, характеризуются как точки разреженности дополнения к $\mathcal{E}^0$, точки неустойчивости — как точки разреженности дополнения к $\mathcal{E}$; приближение осуществимо тогда и только тогда, когда всякая точка разреженности для дополнения к $\mathcal{E}$ является точкой разреженности и для дополнения к $\mathcal{E}^0$.

Не останавливаясь на определении всех этих понятий, приведем критерии, характеризующие их в терминах классической емкости.

Обозначим через $c(e)$ емкость (относительно ньютонова потенциала) множества e , $K_{x,\delta}$ — шар радиуса δ с центром в точке x . Положим

$$c_{x,\delta}^0 = c(K_{x,\delta} \setminus \mathcal{E}^0), \quad c_{x,\delta} = c(K_{x,\delta} \setminus \mathcal{E}).$$

Точка x (принадлежащая границе $\mathcal{E}$) является точкой разрешимости задачи Дирихле (для $\mathcal{E}$) тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 \frac{c_{x,\delta}^0}{\delta^2} d\delta = \infty$$

(критерий Винера). Аналогично точка $x \in \partial\mathcal{E}$ является точкой устойчивости задачи Дирихле (для $\mathcal{E}$) тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 \frac{c_{x,\delta}}{\delta^2} d\delta = \infty$$

(критерий Келдыша; первоначально и тот и другой критерий формулировались в терминах расходимости соответствующих рядов). Наконец, точка разреженности множества e характеризуется условием

$$\int_0^1 \frac{c(K_{x,\delta} \cap e)}{\delta^2} d\delta < \infty$$

(предполагается, что точка x принадлежит замыканию множества e). Тем самым необходимое и достаточное условие возможности приближения в общем случае заключается в том, чтобы для всех точек $x \in \partial \mathcal{E}$ (или, что то же самое, для всех $x \in R^3$) интегралы

$$\int_0^{\delta} \frac{c_{x,\delta}^0}{\delta^2} d\delta \text{ и } \int_0^{\delta} \frac{c_{x,\delta}}{\delta^2} d\delta$$

сходились и расходились одновременно.

Таким образом, основные задачи, связанные с возможностью приближения гармоническими функциями, были решены уже к середине 40-х годов. Для аналитического случая к этому времени был выяснен только вопрос о возможности приближения многочленами (и то не в общей постановке). Однако в отличие от гармонического случая теоремы о приближении многочленами от z еще не вскрывали основных закономерностей, присущих задаче о приближении аналитическими функциями на произвольных множествах. Необходимое условие возможности приближения многочленами — связность дополнения к E — автоматически гарантировало нужную «массивность» дополнения в окрестности граничных точек E ; в явном виде это требование и не формулировалось.

Исследование задачи о приближении аналитическими функциями на произвольных множествах E началось лишь в 50-х годах. Проследить, в какой мере при этом оказалась полезной аналогия с гармоническим случаем, лучше всего на частном случае нигде не плотных множеств.

Для нигде не плотных множеств $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}^0 = \emptyset$) из общей теоремы о приближении гармоническими функциями вытекает следующее утверждение: для того чтобы любая функция, непрерывная на $\mathcal{E}$, допускала равномерное приближение гармоническими на $\mathcal{E}$ функциями, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $x \in \mathcal{E}$

$$\int_0^{\delta} \frac{c_{x,\delta}}{\delta^2} d\delta = \infty.$$

Долгое время считали, что и для аналитического случая локальное требование «массивности» дополнения к E , необходимое и достаточное для возможности приближения, должно носить такой же характер — с заменой гармонической емкости аналитической. Поэтому весьма неожиданной оказалась теорема Витушкина. Выяснилось, что столь разные — с локальной точки зрения — условия, как (A):

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\gamma_{\xi,\delta}}{\delta^2} = \infty, \quad \xi \in E,$$

и (B):

$$\gamma_{\xi,\delta} \equiv \delta,$$

если они выполнены для всех $\xi \in E$, являются одновременно необходимыми и достаточными условиями возможности приближения. Эти условия и более прозрачны и более удобны (первое — как достаточное, второе — как необходимое условие), чем ожидавшийся интегральный кри-

терий. Разумеется, замеченное при этом свойство «неустойчивости» аналитической емкости позволяет искусственно сформулировать критерий возможности приближения и в интегральной форме, например в виде

$$\int_0 \frac{\gamma_{\xi, \delta}}{\delta^2} d\delta = \infty.$$

Однако этот критерий — как критерий возможности приближения — никакого интереса уже представлять не может (соответствующее условие является промежуточным между (А) и (В)).

Таким образом, форма решений задачи о возможности приближения непрерывных функций, с одной стороны, гармоническими, с другой — аналитическими функциями, оказалась совершенно различной. Однако появилась возможность дальнейшего исследования обеих задач.

Во-первых, теорема о приближении аналитическими функциями навела на мысль, что и гармоническая емкость может обладать свойством «неустойчивости»; тогда приведенный выше интегральный критерий возможности приближения в гармоническом случае должен допускать (формальное) усиление как с точки зрения достаточности, так и с точки зрения необходимости. Это предположение оправдалось. В 1963 г. А. А. Гончар установил теорему: каждое из следующих условий необходимо и достаточно для того, чтобы любая непрерывная на $\mathbb{E}$ функция допускала равномерное приближение на $\mathbb{E}$ посредством функций, гармонических на $\mathbb{E}$:

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{c_{x, \delta}}{\delta^3} = \infty \text{ для почти всех } x \in E, \quad (A^*)$$

$$c_{x, \delta} = \delta \text{ для любых } x \in R^3 \text{ и } \delta > 0, \quad (B^*)$$

для любого ограниченного открытого множества $G \subset R^3$

$$c(G \setminus \mathbb{E}) = c(G). \quad (C^*)$$

Тот факт, что условие (А*) влечет за собой условия (В*) и (С*), свидетельствует о том, что и классическая емкость обладает свойством «неустойчивости». Поскольку интегральное условие

$$\int_0 \frac{c_{x, \delta}}{\delta^2} d\delta = \infty$$

является промежуточным между условиями (А*) и (В*), то — как условие возможности приближения, но не как локальный критерий точек устойчивости (или точек неразреженности для дополнения к $\mathbb{E}$) — оно носит случайный характер. Приведенная теорема является прямым аналогом теоремы Витушкина; соответствующее утверждение справедливо и в пространстве R^m , $m \geq 3$ (в условии (А*) δ^3 надо заменить на δ^m и нельзя заменить на $\delta^{m+\alpha}$, $\alpha > 0$, в условии (В*) δ надо заменить на δ^{m-2} — емкость m -мерного шара радиуса δ ; условие (С*) остается справедливым в той же формулировке).

Во-вторых, и в аналитическом случае удалось естественно подойти к интегральному критерию возможности приближения; он представляет собой комбинацию теоремы о приближении в терминах функции $m(\zeta)$ или минимальной границы и локального условия точек пика.

Таким образом, аналогия между гармоническим и аналитическим случаями была полностью восстановлена. Различным оказался лишь порядок получения результатов. Однако это различие, как мы видели, сыграло весьма полезную роль в исследовании и гармонического, и аналитического случая, позволив глубже проникнуть в суть задачи.

2

Наилучшие приближения многочленами и рациональными функциями

Основные результаты, устанавливающие зависимость между внутренними свойствами функций действительного переменного и скоростью их приближения многочленами (алгебраическими и тригонометрическими), получены в классических работах Джексона и С. Н. Бернштейна. В дальнейшем, главным образом благодаря работам С. Н. Бернштейна, были вскрыты самые разнообразные связи, существующие между структурными свойствами функций и их конструктивными свойствами, в первую очередь скоростью стремления к нулю их наилучших приближений многочленами. В настоящее время эта проблематика занимает центральное место в так называемой конструктивной теории функций действительного переменного.

Рассмотрим соответствующие результаты для функций комплексного переменного. Введем необходимые для дальнейшего обозначения. Пусть E — ограниченное замкнутое множество, не разбивающее плоскость, $f(z)$ — произвольная функция, непрерывная на E и аналитическая на множестве внутренних точек E , $P_n(f, E)$ — наилучшее приближение функции $f(z)$ на множестве E посредством многочленов от z степени не выше n :

$$P_n(f, E) = \inf_{\{P_n(z)\}} \max_{z \in E} |f(z) - p_n(z)|,$$

где нижняя грань берется в классе всех многочленов степени не выше n (всюду в дальнейшем $p_n(z)$ — многочлен степени не выше n). Согласно общей теореме о приближении многочленами, для рассматриваемых E и $f(z)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(f, E) = 0.$$

Формулируя результаты, связанные с наилучшими приближениями многочленами от z , будем, как правило, предполагать, что E — континуум (дополнение к E — односвязная область в расширенной плоскости); уже в этом случае проявляются все основные особенности теории наилучших приближений в комплексной плоскости. Через $\varphi(z)$ обозначим функцию, конформно отображающую дополнение к E на внешность



Днепропетровский государственный университет им. 300-летия воссоединения Украины с Россией.

единичного круга так, что $\varphi(\infty) = 0$, $\varphi'(\infty) > 0$. Линию уровня модуля отображающей функции $|\varphi(z)| = \rho$, $\rho > 1$, обозначим через $L_\rho = L_\rho(E)$, внутренность кривой L_ρ — через $D_\rho = D_\rho(E)$.

Эти понятия нетрудно ввести и для произвольного ограниченного замкнутого множества E , дополнение к которому связно и регулярно (в смысле задачи Дирихле); если $G(z)$ — функция Грина для дополнения к E с особенностью в бесконечно удаленной точке, то $L_\rho = \{z : G(z) = \ln \rho\}$. Большинство формулируемых ниже теорем также переносится на этот случай.

Первые результаты, полученные в комплексном случае, относятся к задаче о скорости приближения аналитических на множестве функций, решенной С. Н. Бернштейном в 1912 г. для случая, когда $E = [a, b]$ — отрезок действительной прямой. В наиболее общей форме (для произвольного континуума E) соответствующие теоремы были доказаны Уолшем в 1926 г.

Если функция $f(z)$, $z \in E$, допускает аналитическое продолжение в область $D_R(E)$, $R > 1$, то существует последовательность многочленов $p_n(z)$ такая, что для любого $R_1 < R$

$$\max_{z \in E} |f(z) - p_n(z)| \leq \frac{c(R_1)}{R_1^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Если для функции $f(z)$, $z \in E$, существует последовательность многочленов $p_n(z)$ такая, что для любого $R_1 < R$ справедливы последние неравенства, то последовательность $p_n(z)$ равномерно сходится внутри $D_R(E)$ и, следовательно, функция $f(z)$ допускает аналитическое продолжение в эту область.

Таким образом, любая последовательность многочленов, достаточно быстро (со скоростью геометрической прогрессии) сходящаяся на E , необходимо сходится и в некоторых точках вне E — в точках области $D_R(E)$; это свойство Уолш называет свойством *сверхсходимости*.

Формулировка теоремы Бернштейна — Уолша в терминах наилучших приближений приводит к конструктивной характеристике класса функций, определенных на E и допускающих аналитическое продолжение в область $D_R(E)$: для того чтобы функция $f(z)$ при $z \in E$ допускала аналитическое продолжение в область $D_R(E)$, $R > 1$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{P_n(f, E)} \leq \frac{1}{R}.$$

В частности, для аналитичности функций $f(z)$ на E необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{P_n(f, E)} < 1.$$

Несколько позднее (примерно с 1935 г.) начали рассматривать в комплексном случае более тонкие проблемы, связанные с изучением зависимости между дифференциальными свойствами функций на границе множества (модуль непрерывности, условие Липшица, количество производных) и скоростью их приближения многочленами. Одним из первых результатов в этом направлении является теорема, доказанная Куртисом (необходимость), Уолшем и Севеллом (достаточность).

Пусть D — жорданова область, ограниченная аналитической кривой. Для того чтобы функция $f(z)$, $z \in \bar{D}$, имела в $\bar{D}$ k -ю непрерывную производную $f^{(k)}(z)$, удовлетворяющую условию Липшица порядка α , $0 < \alpha < 1$, необходимо и достаточно, чтобы

$$P_n(f, \bar{D}) = O\left(\frac{1}{n^{k+\alpha}}\right).$$

Эта теорема еще не отражает специфику комплексного случая; она совершенно аналогична соответствующим теоремам о наилучших приближениях функций действительного переменного тригонометрическими многочленами. Особенности комплексного случая проявились при рассмотрении множеств E более общего вида (в частности, жордановых областей, границы которых имеют «особенности» — угловые точки, входящие и выходящие «острия» и т. п.).

Задача о скорости приближения функций, определенных в замкнутых областях с «особенностями», а также на произвольных континуумах со связным дополнением, рассматривалась С. Н. Мергеляном в конце 40-х — начале 50-х годов. Им было выявлено существенное влияние свойств самого множества E на связь между свойствами функции $f(z)$ и скоростью стремления к нулю ее наилучших приближений многочленами и установлены количественные соотношения, связывающие $f(z)$, E и $P_n(f, E)$. Приведем некоторые из результатов С. Н. Мергеляна.

Полное решение задачи о возможности равномерного приближения многочленами позволило рассмотреть задачу о скорости приближе-

ния в общей постановке: для произвольного континуума E , не разбивающего плоскость, и функции $f(z)$, непрерывной на E и аналитической на множестве внутренних точек E , оценить скорость стремления к нулю последовательности $P_n(f, E)$. Эта скорость зависит от поведения функции $f(z)$ и свойств множества E . Свойства функции, влияющие на порядок приближения, уже отмечались выше. Это прежде всего ее модуль непрерывности $\omega(\delta)$, количество имеющихся производных и другие показатели гладкости. Принципиальное значение имело выявление тех свойств множества, которые в общем случае влияют на порядок наилучшего приближения.

Рассмотрим линию уровня $L_{1+x}(E)$, $x > 0$, и определим функцию $d(\zeta, x)$ в точке $\zeta \in E$ как расстояние точки ζ до кривой L_{1+x} ; пусть $d(x) = \sup d(\zeta, x)$, где верхняя грань берется по всем точкам ζ , принадлежащим границе множества E . В результате каждому континууму E ставится в соответствие определенная функция $d(x) > 0$, стремящаяся к нулю при $x \rightarrow 0$; при этом всегда существует постоянная d , не зависящая от x и такая, что $d(x) > dx$. Например, единичному кругу соответствует функция $d(x) \equiv x$, отрезку $(-1, +1)$ — функция $d(x) \sim x$ при $x \rightarrow 0$, множеству, являющемуся объединением отрезков $\arg z = \frac{2\pi}{n}k$, $|z| \leq 1$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, — функция $d_n(x) \sim dx^{\frac{2}{n}}$.

Для замкнутой жордановой области с гладкой границей функция $d(x)$ заключена в пределах

$$d_1 x < d(x) < d_2 x^{1-\gamma},$$

где $\gamma > 0$ — произвольно малое число; если граница — аналитическая кривая, то $d(x) \sim d_0 x$. Скорость стремления к нулю $d(x)$ характеризует степень «разбросанности» множества и является одной из его геометрических характеристик. Оказывается, что свойства множества, влияющие на порядок наилучшего приближения, сосредоточены в функции $d(x)$, точнее, в скорости ее стремления к нулю при $x \rightarrow 0$.

Прямую теорему о наилучшем приближении в общем случае можно сформулировать следующим образом: существует постоянная C , не зависящая от n и такая, что

$$P_n(f, E) < c\omega\left[d\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right], \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким образом, порядок наилучшего приближения определяется величиной $\omega\left[d\left(\frac{1}{n}\right)\right]$, которая явно указывает на характер зависимости $P_n(f, E)$ как от функции, так и от множества. Разумеется, нельзя ожидать, что оценка наилучшего приближения, справедливая в столь общем случае, будет отличаться особой точностью; однако анализ показывает, что она вполне удовлетворительно характеризует порядок убывания чисел $P_n(f, E)$.

Выделим случай областей с кусочно-гладкой границей. Пусть D — жорданова область, граница которой состоит из конечного числа гладких дуг, образующих между собой ненулевые углы с наименьшим внешним раствором $\pi\lambda$.

Если функция $f(z)$ аналитична в D , имеет в замкнутой области $\bar{D}$ непрерывные производные до k -го порядка включительно и $\omega_k(\delta)$ обозначает модуль непрерывности $f^{(k)}(z)$ в $\bar{D}$, то для произвольного $\gamma > 0$ справедлива оценка

$$P_n(f, \bar{D}) < \frac{C}{n^{k\lambda(1-\gamma)}} \omega_k\left(\frac{1}{n^{\lambda(1-\gamma)}}\right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где C не зависит от n . При этом существуют функции $f(z)$ с отмеченными выше свойствами и постоянная C такие, что

$$P_n(f, \bar{D}) > \frac{C}{n^{k\lambda(1+\gamma)}} \omega_k\left(\frac{1}{n^{\lambda(1+\gamma)}}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

В частности, для областей с гладкой границей,

$$P_n(f, \bar{D}) < \frac{C}{n^{k(1-\gamma)}} \omega_k\left(\frac{1}{n^{1-\gamma}}\right),$$

эти оценки точны в том смысле, что, какова бы ни была функция $\gamma(n)$, убывающая быстрее всех функций $n^{-(1-\gamma)}$, $\gamma > 0$, найдутся область с гладкой границей и функция с указанными выше свойствами, для которых

$$P_n(f, D) > [\gamma(n)]^k \omega_k[\gamma(n)].$$

Рассмотрим обратные теоремы. Эти теоремы позволяют судить о свойствах функций по данной скорости стремления к нулю наилучших приближений $P_n(f, E)$. Уже в классическом случае наилучших приближений на отрезке было замечено, что одна и та же скорость приближения влечет за собой различные свойства функций в различных точках множества. Например, скорость порядка $\frac{1}{n^{1+\gamma}}$, где $\gamma > 0$, гарантирует дифференцируемость функции на любом отрезке, внутреннем к данному, в то время как на всем отрезке эта скорость гарантирует лишь условие Липшица порядка $\frac{1}{2}$; для того чтобы функция была дифференцируемой на всем отрезке, нужно потребовать, чтобы наилучшие приближения убывали со скоростью порядка $\frac{1}{n^{2+\gamma}}$. Анализ этого явления для произвольного континуума показал, что определенная скорость стремления к нулю $P_n(f, E)$ накладывает на функцию $f(z)$ вблизи точки $\zeta \in E$ тем большие ограничения, чем медленнее убывает функция $d(\zeta, x)$ в этой точке.

Пусть ζ — граничная точка E , E_ζ — замкнутое множество, принадлежащее E и обладающее тем свойством, что отношение расстояния любой точки E_ζ до ζ к расстоянию этой же точки до дополнения к E ограничено сверху для всех точек E_ζ . Пусть для данной точки ζ такое множество существует и число A определяется соотношением

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln P_n(f, E)}{\ln d\left(\zeta, \frac{1}{n}\right)}.$$

Тогда, каково бы ни было $A' < A$, $A' = k + \alpha$, k — целое, $0 < \alpha < 1$, функция $f(z)$ имеет на множестве E_ζ непрерывные производные (по E_ζ) до k -го порядка включительно, причем $f^{(k)}(z)$ удовлетворяет на E_ζ условию Липшица порядка α . Эта теорема иллюстрирует отмеченный выше принцип локализации в обратных теоремах о наилучших приближениях.

Из обратных теорем, относящихся ко всему множеству в целом, отметим следующий результат: каков бы ни был континуум E , неравенство

$$P_n(f, E) < \frac{C}{n^{2+\gamma}}, \quad \gamma > 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

гарантирует дифференцируемость $f(z)$ по E во всех точках E .

Доказательство обратных теорем, так же как и в действительном случае, основывается на оценке производной многочлена по известной оценке модуля самого многочлена. Если многочлен $p_n(z)$ степени n на континууме E удовлетворяет неравенству

$$|p_n(z)| \leq M, \quad z \in E,$$

то, по известной лемме Бернштейна — Уолша,

$$|p_n(z)| \leq MR^n, \quad z \in \overline{D_R(E)}.$$

Поэтому

$$|P'_n(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-z|=d\left(z, \frac{1}{n}\right)} \frac{p_n(t)}{(t-z)^2} dt \right| \leq \frac{CM}{d\left(z, \frac{1}{n}\right)}, \quad z \in E.$$

Аналогично для производных высшего порядка получаем

$$|p_n^{(k)}(z)| \leq \frac{C_k M}{\left[d\left(z, \frac{1}{n}\right) \right]^k}, \quad z \in E.$$

Если для точки ζ существует определенное выше множество E_ζ , то в каждой точке $z \in E_\zeta$

$$|p_n^{(k)}(z)| \leq \frac{C_k M}{\left[d\left(\zeta, \frac{1}{n}\right) \right]^k};$$

это соображение приводит к доказательству сформулированной выше обратной теоремы.

В общем случае чем меньше $d\left(z, \frac{1}{n}\right)$, тем хуже оценка производной многочлена в точке z . Для того чтобы получить оценки производных, справедливые на всем континууме E , необходимо перейти к функции

$$d^*(x) = \inf d(\zeta, x), \quad x > 0,$$

где $\inf$ берется по всем граничным точкам множества E . Тогда

$$|p_n^{(k)}(z)| \leq \frac{C_k M}{\left[d^* \left(\frac{1}{n}\right)\right]^k}$$

для всех $z \in E$.

Таким образом, в прямых теоремах существенную роль играет функция $d(x) = \sup d(\zeta, x)$, в обратных же теоремах (если их формулировать не в локальной форме, а для всего множества E) аналогичную роль играет функция $d^*(x) = \inf d(\zeta, x)$. То, что хорошо для прямых утверждений (линии уровня L_{1+x} близко примыкают к E для малых x), плохо для утверждений обратных, и наоборот. Разница между $d(x)$ и $d^*(x)$ и приводит обычно к разрыву между утверждениями прямых и обратных теорем о наилучших приближениях. В частности, для отрезка $[-1, +1]$, как отмечалось выше, $d(x) \sim x$, в то время как $d^*(x) \sim \frac{x^2}{2}$ (при этом $\inf d(\zeta, x)$ по любому внутреннему к $[-1, +1]$

отрезку Δ имеет порядок $c_\Delta x$, где c_Δ не зависит от x).

Чтобы получить условия, налагаемые на скорость приближения, одновременно необходимые и достаточные для того, чтобы функция обладала определенными дифференциальными свойствами, нужно отказаться от формулировок теорем в терминах наилучших приближений и прямые и обратные теоремы необходимо формулировать так, чтобы скорость приближения в точке $z \in E$ зависела от положения точки z на множестве E ; тогда не будет нужды переходить к $\sup$ или $\inf$ функции $d(\zeta, x)$ и теоремы можно будет формулировать непосредственно в терминах этой функции.

Первые прямые теоремы для действительного случая, в которых скорость приближения зависит от положения точки на отрезке, были установлены С. М. Никольским в 1946 г. В дальнейшем, главным образом благодаря работам А. Ф. Тимана и В. К. Дзядыка, на этом пути были получены конструктивные характеристики основных классов функций действительного переменного и тем самым устранен разрыв между теоремами Джексона и Бернштейна о приближении алгебраическими многочленами на отрезке действительной оси.

Заметим, что эти работы являлись «вещественными» как по форме, так и по существу. Связь с функцией $d(\zeta, x)$ пока оставалась невыясненной; в теоремах фигурировало ее конкретное выражение для отрезка $[-1, +1]$. Для комплексного случая основные результаты в этом направлении были получены В. К. Дзядыком (1959, 1960 гг.). Для весьма широких классов континуумов E , содержащих, во всяком случае, жордановы области с кусочно-гладкой границей, кусочно-гладкие жордановы дуги и т. д., Дзядык доказал следующее утверждение: для того чтобы функция $f(z)$, непрерывная на E и аналитическая на множестве внутренних точек E , имела на E непрерывную k -ю производную, удовлетворяющую условию Липшица порядка α , $0 < \alpha < 1$, необходимо и достаточно, чтобы для любого натурального n существо-

вал многочлен $p_n(z)$ такой, что

$$|f(z) - p_n(z)| < C \left[d\left(z, \frac{1}{n}\right) \right]^{h+\alpha}, \quad z \in E.$$

Доказательство необходимости (построение аппроксимирующих многочленов) основывается на изучении некоторых особых интегралов специального типа. Для доказательства достаточности потребовалось обобщение приведенной выше оценки производных многочлена. В. К. Дзядык показал, что для широких классов множеств E эта оценка справедлива и в случае, когда вместо постоянной M рассматривается произвольная положительная непрерывная функция $M(z)$.

Теорема Дзядыка содержит, очевидно, сформулированные выше теоремы о наилучших приближениях для областей с аналитической границей и кусочно-гладкой границей.

Вернемся к оценкам для скорости приближения аналитических функций.

Для оценки сверху чисел $P_n(f, E)$ существенное значение имеет неравенство для $P_n(f, E)$ в том частном случае, когда функция $f(z)$ аналитическая и ограничена в области $D_R(E)$. Приведенное ниже уточнение прямой теоремы Бернштейна — Уолша находит приложение и в других задачах теории приближений.

Если $f(z)$ — аналитическая в области $D_R(E)$ функция, то по теореме Бернштейна — Уолша

$$P_n(f, E) \leq \frac{C(R_1)}{R_1^n}, \quad R_1 < R,$$

где $C(R_1)$ не зависит от n , но зависит от R_1 . Важно выявить характер этой зависимости в общем случае и получить неравенство, которое кроме R , n и

$$M = \max_{z \in \bar{D}_R} |f(z)|$$

содержало бы только абсолютные постоянные.

Допустим, что диаметр E равен единице, а числа r и ρ удовлетворяют условию $1 < r < \rho < R$. Тогда соотношение

$$p(z) - f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{t \in L_R} \int_{u \in L_\rho} \left[\frac{\varphi(u)}{\varphi(t)} \right]^n \frac{f(t) du dt}{(u-t)(u-z)}, \quad z \in D_r,$$

определяет многочлен $p(z)$ степени $n-1$, для которого в области D_r справедливо неравенство

$$|f(z) - p(z)| < CM \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \frac{R^\lambda}{(R-\rho)^2 (\rho-r)^2 (\rho-1)(R-1)},$$

где C и λ — абсолютные постоянные. Отсюда, в частности, следует, что при очевидных ограничениях на R справедливо следующее утверждение: какова бы ни была функция $f(z)$, аналитическая и ограниченная в $D_R(E)$,

$$P_n(f, E) < CM n^\nu R^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где C и ν — абсолютные постоянные, причем $\nu \leq 6$.

Это неравенство установил С. Н. Мергелян намеченным выше методом. Позднее аналогичный результат был получен А. В. Игнатъевой и Б. А. Вострецовым с помощью частных сумм разложения функции $f(z)$ в ряд по многочленам Фабера.

Пусть $f(z)$ — аналитическая в области $D_R(E)$ функция и ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Phi_k(z)$$

представляет собой разложение функции $f(z)$ по многочленам Фабера $\Phi_k(z)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Согласно хорошо известной теореме Фабера, этот ряд сходится к $f(z)$ равномерно внутри области $D_R(E)$. Оказывается, что при этом

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^n c_k \Phi_k(z) \right| < CM \left[\frac{R}{R-r} \left(\frac{r}{R} \right)^{n+1} + \frac{n^4}{R^n} \right]$$

для всех z , принадлежащих $\overline{D}_r$, $1 < r < R$. Отсюда, в частности, вытекает, что на континууме E

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^n c_k \Phi_k(z) \right| < CM n^4 R^{-n}.$$

Большие преимущества разложений в ряды Фабера функций, аналитических на E , давно известны. Система полиномов Фабера составляет базис в пространстве аналитических в $D_R(E)$ функций, универсальный в том отношении, что он не зависит от индекса R , определяющего область аналитичности $D_R(E)$. Разложения аналитических в $D_R(E)$ функций в ряды по полиномам Фабера сходятся со скоростью, близкой к скорости сходимости многочленов наилучшего приближения. Весь класс аналитических в $D_R(E)$ функций можно определить как совокупность всевозможных рядов вида $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_k(z)$, сходящихся на E со скоростью $C(R_1) R_1^{-n}$ при любом $R_1 < R$.

Разложение по базисной системе полиномов Фабера представляет собой аналитический аппарат, позволяющий изображать для достаточно «хороших» множеств E не только аналитические, но и непрерывные на E функции; при этом то или иное свойство гладкости может быть охарактеризовано соответствующей скоростью сходимости разложения по базисной системе Фабера (по этому поводу см. работы А. И. Маркушевича, С. Я. Альпера и В. В. Иванова, П. К. Суетина, а также монографию В. И. Смирнова и Н. А. Лебедева; интересные результаты содержатся в работе С. Я. Альпера, исследовавшего скорость приближения функций в замкнутых жордановых областях с достаточно правильной границей посредством средних арифметических частных сумм рядов по полиномам Фабера).

В то же время полиномиальные разложения Фабера не обладают достаточной гибкостью для изображения функций во всех тех точках, где эта функция аналитическая; область сходимости рядов Фабера во всех

случаях совпадает с областью, ограниченной одной из линий уровня L_R . Эти ряды (так же как и степенные ряды, непосредственным обобщением которых они являются) слишком чувствительны по отношению к расположению особых точек функции. Как только некоторая линия L_R содержит хотя бы одну особенность функции, пусть даже единственную во всей плоскости, так сразу ряды Фабера оказываются непригодными для изображения функции во внешности L_R — там эти ряды заведомо расходятся.

Другое обстоятельство связано со скоростью сходимости рядов Фабера на E ; порядок сходимости также определяется местонахождением ближайшей к E особенности $f(z)$ и почти не реагирует на расположение области аналитичности $f(z)$ в остальной части. Между



С. Я. Альпер.

тем естественно было бы ожидать, что если область аналитичности функций содержит D_R , имеет с D_R общие граничные точки, а в некоторых частях выходит далеко за границу D_R , то разложения таких функций должны сходиться на E существенно быстрее, чем разложения функций, аналитических только в D_R . Сказанное относится не только к разложениям по многочленам Фабера, но и к последовательностям многочленов наилучшего приближения.

Причина подобной негибкости полиномиального аппарата для представления функций заключается в характере поведения полиномов вблизи бесконечно удаленной точки, описываемой соотношением

$$\mathfrak{M}_n(z) \sim |\varphi(z)|^n, \quad z \notin E, \quad n \rightarrow \infty,$$

в котором левая часть определяется как $\sup |p_n(z)|$ в классе всех полиномов степени не выше n , подчиненных условию

$$|p_n(z)| \leq 1, \quad z \in E.$$

Пусть ζ — фиксированная точка вне E . Оказывается, справедливы неравенства

$$\frac{a}{\mathfrak{M}_{n+1}(\zeta)} \leq P_n\left(\frac{1}{\zeta - z}, E\right) \leq \frac{A}{\mathfrak{M}_{n+1}(\zeta)},$$

где постоянные a и A определяются соотношениями

$$\frac{1}{a} = \max_{z \in E} |\zeta - z|, \quad \frac{1}{A} = \min_{z \in E} |\zeta - z|.$$

Теоремы о наилучшем приближении любой функции, аналитической на E , являются следствием этих неравенств; они могут быть получены

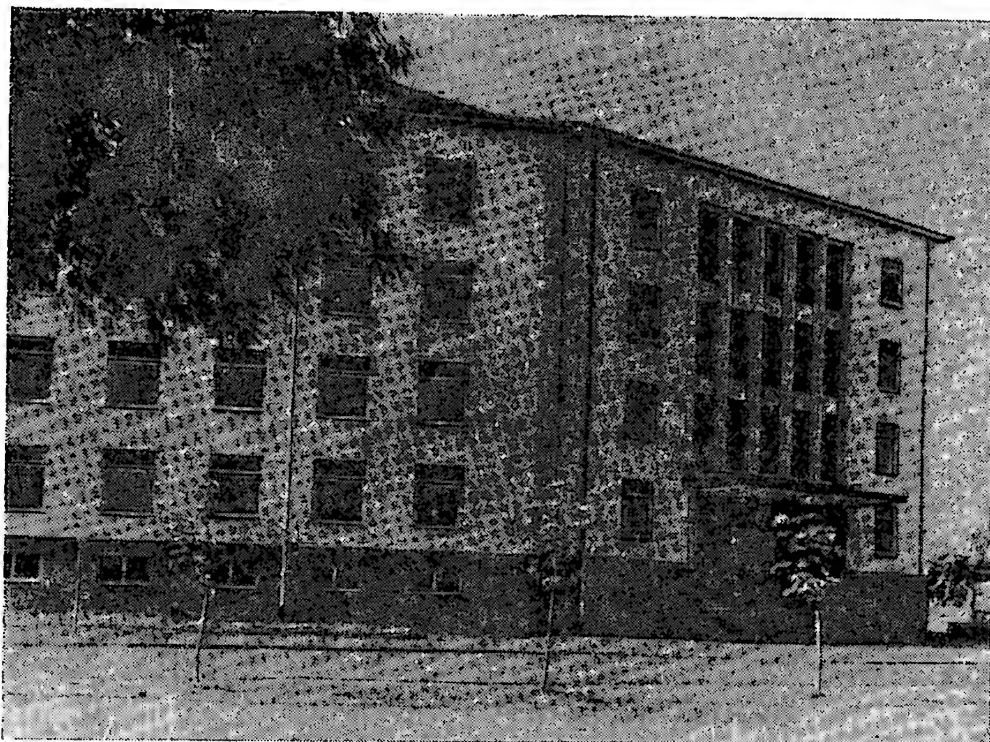
из представления функции интегралом Коши с применением неравенств к ядру Коши. Соотношение

$$P_n\left(\frac{1}{\xi-z}, E\right) \sim \frac{C}{M_{n+1}(\xi)} \sim \frac{C}{|\varphi(\xi)|^{n+1}}$$

подтверждает и объясняет определяющую роль линий уровня в оценках наилучшего приближения, а следовательно, и в теоремах об областях сходимости и скорости сходимости рядов по полиномам Фабера.

Пусть D — произвольная односвязная область, содержащая E ; $A(D)$ — класс функций, аналитических в области D . Из изложенного выше следует, что если требуется построить систему функций $\{\psi_k(z)\}$, аналитических в D и составляющих базис в классе $A(D)$, приспособленный для наилучшего представления этих функций на E , то заведомо необходимо отказаться от поисков этого базиса среди полиномов и ограничиться требованием $\psi_k(z) \in A(D)$.

Соответствующий базис, не обладающий уже теми недостатками, которые были отмечены выше для полиномов Фабера, построен В. Д. Ерохиным в 1958 г. в связи с решением задачи А. Н. Колмогорова об оценке ε -энтропии (см. ниже). Построение Ерохина основывается на его замечании о возможности конформного отображения области D на некоторую область D^* так, что континуум E переходит в множество E^* , для которого граница D^* служит линией уровня $L_R(E^*)$; поэтому $D^* = L_R(E^*)$. Коль скоро существование такой области установлено, построение искомого базиса не представляет труда:



Институт физики и математики Академии наук Литовской ССР.

этим базисом является обычная система полиномов Фабера для дополнения к E^* , перенесенная в область D посредством упомянутого отображения D^* на D . Точнее, если $t = t(z)$ отображает D на D^* , а $z = \psi(t)$ — обратная функция, то

$$\psi_k(z) = \varphi_k[t(z)], \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\varphi_k(t)$ — полиномы Фабера для дополнения к E^* .

Для разложения функции $f(z) \in A(D)$ в ряд по системе $\psi_k(z)$ справедливы оценки, совершенно аналогичные соответствующим оценкам для разложений по полиномам Фабера в случае $D = D_R(E)$. Аналогичные результаты получены В. Д. Ерохиным и в случае, когда E разбивает плоскость, а область D многосвязна.

Возвратимся к замечанию об ограниченных возможностях системы полиномов Фабера как аппарата для представления аналитических функций. На основании изложенного выше можно прийти к выводу, что впечатление о недостаточной гибкости полиномов Фабера в сущности неправильно. Действительно, полиномы Фабера доставляют в известном смысле наилучший базис не только в случае областей, ограниченных некоторой линией уровня дополнения к E , но и в самом общем случае; этим базисом служат либо сами полиномы Фабера от z , либо те же полиномы от функции $t(z)$, определяемой областью $D \setminus E$ почти однозначно.

Тот факт, что обобщенная базисная система полиномов Фабера является в некотором отношении наилучшей, вытекает из решения задачи А. Н. Колмогорова об оценке ε -энтропии, полученного В. Д. Ерохиным с помощью полиномов Фабера от функции $t(z)$. Остановимся на этой задаче, так как в последнее время некоторые результаты, непосредственно связанные с теорией приближения функций, формулируются в терминах ε -энтропии функциональных классов.

Пусть E — произвольный континуум со связным дополнением, D — односвязная область, содержащая E . Рассмотрим компактное множество $A_M(D)$ функций из $A(D)$, для которых $|f(z)| \leq M$, $z \in D$. Система функций $\{a_n(z)\}$ из $A(D)$ называется ε -сетью в классе $A_M(D)$ по отношению к E , если для любой функции $f(z) \in A_M(D)$ найдется по крайней мере одна функция $a_n(z)$, для которой

$$|f(z) - a_n(z)| \leq \varepsilon, \quad z \in E.$$

Пусть $N_\varepsilon(M, E, D)$ — наименьшее число функций из $A(D)$, которые могут составить ε -сеть в классе $A_M(D)$. Задача заключается в асимптотической оценке величины

$$H_\varepsilon(E, D) = \ln N_\varepsilon(M, E, D)$$

при фиксированном M и $\varepsilon \rightarrow 0$. Величина $H_\varepsilon(E, D)$ называется ε -энтропией класса $A(D)$ (относительно E).

Асимптотическая формула, полученная В. Д. Ерохиным, имеет вид

$$H_\varepsilon(E, D) \sim \frac{1}{\ln R} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^2,$$

где R — модуль двусвязной области $D \setminus E$.

Возвращаясь к вопросу о приближении аналитических функций многочленами от z , заметим, что приведенные выше неравенства оказываются полезными в тех случаях, когда заранее известен индекс R наиболее широкой области $D_R(E)$, содержащейся в области D аналитичности $f(z)$. Если же по заданной области D затруднительно определить, какие именно области D_R содержатся в D , то можно пользоваться неравенством, в котором знаменатель прогрессии выражен непосредственно в терминах геометрических свойств D . В основе доказательства этого неравенства лежит метод вывода полюсов с оценками, предложенный М. В. Келдышем в 1945 г.

Пусть непрерывная функция $\rho(s)$, где $0 < \rho(s) < 1$, $0 \leq s < l$, такова, что любую граничную точку ζ области D можно соединить с достаточно удаленной окружностью (охватывающей D) кривой, натуральное уравнение которой имеет вид

$$z = z_\zeta(s), \quad 0 \leq s \leq l_\zeta < l, \quad z_\zeta(0) = \zeta,$$

так, что расстояние точки $z_\zeta(s)$ до E превосходит $\rho(s)$ при всех s , $0 \leq s < l_\zeta$. Тогда для некоторой абсолютной постоянной $c > 0$

$$P_n(f, E) < Mq^n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$q = \exp \left\{ -c \exp \left[-5 \int_0^l \frac{ds}{\rho(s)} \right] \right\}.$$

А. Л. Шагинян, используя найденную им новую оценку для гармонической меры, получил неравенство, которое в ряде случаев является более точным, чем последняя оценка. Если граница области D — спрямляемая кривая, $z = z(s)$ — ее натуральное уравнение и $r(s)$ — расстояние точки $z(s)$ до множества E , то результат А. Л. Шагиняна заключается в том, что

$$P_n(f, E) < M \exp \left\{ -cn \exp \left[-\alpha \int_0^l \frac{ds}{r(s)} \right] \right\}.$$

Упомянутый выше метод М. В. Келдыша позволил получить ряд существенных результатов в различных областях теории приближений (впервые он был применен М. В. Келдышем при исследовании проблемы полноты системы многочленов в $H_2(D)$ для некаратеодориевых областей D ; см. § 5). Сущность этого метода заключается в следующем.

Рассматривается функция, имеющая единственную особенность — полюс в точке a , и замкнутая кривая L , охватывающая точку a . Требуется равномерно приблизить эту функцию на L посредством рациональной функции, которая также имеет единственную особенность — полюс в точке b внутри L , и, что самое главное, оценить модуль аппроксимирующей функции внутри L и вне некоторой окрестности точки b .

Схема метода вывода полюсов строится по хорошо известной идее, лежащей в основе доказательства классической теоремы Рунге о приближении аналитических функций. Точка a соединяется с b ли-

нией Γ , расположенной целиком внутри L . На Γ выбирается достаточно плотная система точек $z_1 = a, z_2, \dots, z_m = b$, после чего исходная функция последовательно заменяется многочленами от $(z - z_2)^{-1}, \dots, (z - z_m)^{-1}$ с проведением каждый раз оценок близости последующей функции к предыдущей, а также оценок их модуля вне окрестности соответствующего полюса z_i .

Чтобы получить неравенства Келдыша, необходимо сопровождать последовательное перемещение полюсов достаточно точными оценками возникающих при этом функций и отклонений между ними. Приведем точную формулировку.

Пусть

$$z = z(s), \quad 0 \leq s \leq s_0, \quad z(0) = a, \quad z(s_0) = b,$$

есть натуральное уравнение кривой Γ , $\rho(s)$ — расстояние от точки $z(s)$ до L ; R_s — область, составленная из всех кругов $|z - z(t)| < \rho(t)$ для значений t в пределах от s до s_0 . В качестве исходной функции рассмотрим ядро Коши $(z - a)^{-1}$. Каково бы ни было $\varepsilon < 0$, существует $p\left(\frac{1}{z-b}\right)$ — многочлен от $(z - b)^{-1}$, удовлетворяющий на L , а следовательно, и всюду вне L неравенству

$$\left| \frac{1}{z-a} - p\left(\frac{1}{z-b}\right) \right| < \varepsilon$$

и, кроме того, всюду вне R_s неравенству

$$\left| p\left(\frac{1}{z-b}\right) \right| < \exp \left\{ [1 + |\ln \varepsilon \rho(0)|] \exp \left(c \int_0^s \frac{dt}{\rho(t)} \right) \right\},$$

где c — абсолютная постоянная, $\pi < c < 5$.

В начале 50-х годов появились работы А. А. Гончара, в которых изучаются связи между структурными свойствами функций (как вещественного, так и комплексного переменного) и скоростью их приближения посредством рациональных функций (без каких-либо ограничений на расположение полюсов). За последние 10—15 лет эта проблематика в Советском Союзе получила существенное развитие (А. А. Гончар, Е. П. Долженко)⁹. В последние годы важные результаты были получены также зарубежными математиками (в первую очередь следует отметить работу американского математика Д. Ньюмена о скорости рациональной аппроксимации функции $|x|$ на отрезке $[-1, +1]$). А. А. Гончар увязывает вопросы наилучшего приближения рациональными функциями с проблемой обобщения понятий аналитической функции и аналитического продолжения, поставленной Э. Борелем. В частности, он получил одно из возможных решений задачи о квазианалитическом продолжении аналитических функций через жорданову дугу, обсуждавшейся в работах Вейерштрасса и Бореля.

⁹ Подробный обзор результатов, полученных в этом направлении, см. А. А. Г о н ч а р. Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций. — В кн.: Труды Международного конгресса математиков. «Мир», М., 1968.

В работах советских математиков, в первую очередь в исследованиях М. М. Джрбашяна и его учеников, а также С. Н. Мергеляна, Г. Ц. Тумаркина и др., изучаются вопросы приближения и представления функций посредством рациональных функций с фиксированными полюсами: построение систем рациональных функций Фабера и изучение разложений аналитических функций по этим системам, разложение функций в ряды Фурье по ортонормированным системам рациональных функций с заданными полюсами и свойства функций.

3

Весовые равномерные приближения многочленами

В задачах о равномерных приближениях полиномами на неограниченных замкнутых множествах естественно ввести в рассмотрение весовую функцию $h(z)$, убывающую к нулю при $z \rightarrow \infty$ достаточно быстро, и измерять близость многочлена к функции величиной

$$\sup_{z \in E} h(z) |f(z) - P(z)|,$$

предполагая, что функция $f(z)$ непрерывна и ограничена на E .

Задаче о характеристике условий, накладываемых на функцию $h(z)$ и гарантирующих полноту в указанном выше смысле, в случае, когда E — действительная ось, посвящено много исследований. Постановка задачи и первые результаты принадлежат (1924 г.) С. Н. Бернштейну. Ряд исследований, в которых установлены как достаточные, так и необходимые критерии полноты, выполнены С. Н. Бернштейном, Н. И. Ахиезером, К. И. Бабенко, А. Л. Шагиняном, М. М. Джрбашяном, С. Н. Мергеляном. Мы не будем останавливаться на истории этой проблемы и приведем лишь вкратце некоторые результаты, полученные для действительной оси, а затем перейдем к комплексной плоскости.

Пусть $\mathcal{M}_h$ — класс всех многочленов, удовлетворяющих неравенству $h(x) |P(x)| \leq 1$ на действительной оси, и $\mathcal{M}_h(E)$ — этот же класс для произвольного множества E ; N — класс функций $h(x)$, допускающих представление вида

$$h(x) = h(0) \exp \left\{ - \int_0^x \frac{\omega(t)}{t} dt \right\},$$

где $\omega(t) > 0$ не убывает при $t \rightarrow \infty$. Нижнюю огибающую всех тех функций класса N , которые на оси $-\infty < x < +\infty$ мажорируют $h(x)$, обозначим через $\tilde{h}(x)$, а функцию $h^*(x)$ определим соотношением

$$h^*(x) = \frac{1 + |x|}{M_h(x)}, \quad M_h(z) = \sup_{P \in \mathcal{M}_h} |P(z)|.$$

Обе функции — $h(x)$ и $h^*(x)$ являются результатом регуляризации $h(x)$ посредством соответственно логарифмически вогнутых функций и многочленов.

В ряде работ различными методами установлено, что расходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln h(x)}{1+x^2} dx$$

является условием, необходимым для полноты, а расходимость такого же интеграла, но составленного для функции $\tilde{h}(x)$ — условием, достаточным для полноты. Это приводит к тому, что в классе функций $h(x)$ из N расходимость указанного интеграла необходима и достаточна для полноты.

Попытки дать интегральные необходимые и достаточные условия полноты непосредственно в терминах функции $h(x)$ без каких-либо ограничений на правильность ее убывания при $|x| \rightarrow \infty$ не увенчались успехом. Это объясняется тем, что в вопросе о полноте с весом $h(x)$ все зависит от поведения функции $M_{\frac{h}{1+|t|}}(x)$ или, что примерно

одно и то же, от поведения функции $h^*(x)$. Как показал С. Н. Мергелян, необходимое и достаточное условие полноты состоит в том, чтобы всюду вне действительной оси

$$M_{\frac{h}{1+|t|}}(z) = \infty.$$

Таким образом, все зависит от поведения истинной или достижимой мажоранты семейства многочленов $M_{\frac{h}{1+|t|}}$.

Условие

$$|P(x)| < \frac{1+|x|}{h(x)}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

определяющее класс $M_{\frac{h}{1+|t|}}$, формально предоставляет возможность многочленам этого класса в каждой точке действительной оси принимать значения, по модулю сколь угодно близкие к значениям функции $\frac{1+|x|}{h(x)}$. Однако в случае нерегулярно убывающих функций $h(x)$ эту возможность многочлены не везде могут реализовать. В силу аналитичности и правильности своего поведения вблизи бесконечно удаленной точки, многочлены из $M_{\frac{h}{1+|t|}}$ часто оказываются ограниченными функцией, которая в отдельных частях действительной оси может быть значительно меньше первоначально заданной функции $\frac{1+|x|}{h(x)}$. Поэтому каждая функция $\frac{1+|x|}{h(x)}$ порождает некоторую новую функцию $\frac{1+|x|}{h^*(x)}$. Новая функция является истинной или наилучшей мажорантой рассматриваемого класса многочленов, а переход от $h(x)$ к $h^*(x)$ — естественным процессом регуляризации первоначально заданного веса в соот-

ветствии с природой рассматриваемой задачи. При этом поведение функций $h(x)$ и $h^*(x)$ в отношении полноты одинаково: какова бы ни была функция $h(x)$, из полноты многочленов с весом $h(x)$ следует полнота с весом $h^*(x)$, и наоборот.

Полное решение аппроксимационной проблемы С. Н. Бернштейна для произвольной функции $h(x) \geq 0$ принадлежит (1954 г.) С. Н. Мергеляну: для полноты системы полиномов с весом $h(x)$ необходимо и достаточно, чтобы расходился интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln h^*(x)}{1+x^2} dx$$

или эквивалентный ему интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sup |P(x)|}{1+x^2} dx,$$

в котором верхняя грань берется по всевозможным многочленам $P(x)$, удовлетворяющим условию

$$h(x)|P(x)| \leq 1 + |x|, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Как показывают примеры, эта теорема перестает быть верной, если в ее формулировке вместо $h^*(x)$ брать $h(x)$. Таким образом, только при регуляризации $h(x)$ посредством многочленов, но не логарифмически вогнутых функций оказалось возможным дать решение задачи в общем случае.

С. Н. Мергелян показал также, что, как только функция $h(x)$ становится такой, что полноты нет, все функции $f(x)$, аппроксимируемые с весом $h(x)$ многочленами, допускают аналитическое продолжение на всю плоскость до целых функций не выше 1-го порядка минимального типа. Следовательно, любая функция $f(x)$, не являющаяся целой функцией 1-го порядка минимального типа, может служить резольвентой в задаче о весовой полноте. Это предложение вытекает из того, что, какова бы ни была измеримая функция $h(x)$, $0 \leq h(x) \leq 1$, возможны лишь два случая: или

$$M_h(z) = \infty, \quad \operatorname{Im} z \neq 0,$$

или существует функция $\varepsilon(r) \rightarrow 0$, при $r \rightarrow \infty$ зависящая лишь от $h(x)$ и такая, что на всей плоскости

$$\ln M_h(z) < C + |z| \varepsilon(|z|),$$

где C не зависит от z .

Если весовая функция $h(x)$ правильно убывает при $|x| \rightarrow \infty$, например, если $h(x)$ принадлежит к определенному выше классу N , то свойство полноты не изменяется вследствие некоторых «возмущений» веса, замедляющих его убывание. При замене $h(x) \in N$ функцией $(1 + |x|^p) h(x)$, $p > 0$ — любое число, или, что еще хуже, функцией $\sqrt[p]{h(x)}$ полнота не нарушается. Интересно сопоставить это с устойчивостью полноты для произвольной весовой функции $h(x)$, $0 \leq h(x) \leq 1$,

без каких-либо ограничений на регулярность ее поведения и убывания. С. Н. Мергеляном показано, что по существу никакой устойчивости нет: как бы медленно ни возрастала к $+\infty$ при $|x| \rightarrow \infty$ функция $\mu(x) > 0$, существует функция $h(x)$, $0 \leq h(x) \leq 1$, такая, что система многочленов полная с весом $h(x)$ и неполная с весом $\mu(x)h(x)$; изменение значений весовой функции только в одной точке может нарушить полноту — существует пара функций $h_1(x)$, $h_2(x)$, таких, что $h_1(x) = h_2(x)$, $x \neq x_0$, но, однако, многочлены полные с весом $h_1(x)$ и неполные с весом $h_2(x)$. Представление о том, что для полноты необходимо, чтобы функция $h(x)$ убывала к нулю достаточно быстро при $|x| \rightarrow \infty$, нуждается в существенном уточнении. Об этом свидетельствует следующее предложение: как бы медленно ни убывала функция $\varphi(|x|) > 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, если только выполнены условия

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) |x|^n = 0, \quad n > 0,$$

то существует функция $h(x)$, убывающая не быстрее $\varphi(x)$,

$$\overline{\lim}_{|x| \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{\varphi(x)} = \infty,$$

и такая, что система многочленов полная с весом $h(x)$.

В силу теоремы Мюнтца удаление любой конечной системы целых степеней x не нарушает полноты оставшихся целых неотрицательных степеней x на любом конечном отрезке. В случае весовых приближений дело обстоит иначе: существуют функции $h(x)$, обладающие тем свойством, что система всех многочленов от x полная с весом $h(x)$, однако этот вес оказывается недостаточным для полноты системы всех тех многочленов, которые не содержат какой-либо фиксированной степени x .

Выше мы рассматривали только возможность полноты с весом и не касались скорости приближения с весом в случае, когда эти приближения невозможны. Приведем некоторые результаты о наилучшем весовом приближении.

Пусть $L = \{z : |\arg z| = \frac{\pi}{2\alpha}, \alpha \leq 1\}$ и функция $p(r) = -\ln h(r)$ четная, непрерывная и строго возрастающая. Через $q(r)$ обозначим функцию, обратную $p(r)$. М. М. Джрбашян установил, что для любого целого $k \geq 1$, $r > 0$ и многочлена $P_n(z)$ степени не выше n из класса $\mathcal{M}_h(L)$

$$\sup_{z \in L} h(z) |P_n^{(k)}(z)| < C \left[\int_1^n \frac{dt}{[q(t)]^\alpha} \right]^{\frac{k}{\alpha}}, \quad h(z) \equiv h(|z|),$$

при всех достаточно больших n (C не зависит от n). Эта теорема позволила ему получить следующую обратную теорему о наилучшем приближении с весом: если интеграл

$$\int_1^\infty \frac{p(r)}{r^{1+\omega}} dr, \quad \omega = \frac{\alpha}{2\alpha-1},$$

расходится и для некоторого $s > 0$ и любого целого $n \geq 1$ найдется многочлен $P_n(z)$ с условием

$$\sup_{z \in L} h(z) |f(z) - P_n(z)| < C \left\{ \int_1^n \frac{dt}{|q(t)|^\alpha} \right\}^{-s},$$

то всюду на L , кроме точки $z = 0$, функция $f(z)$ имеет m производных, причем на каждой конечной части L вне $z = 0$ $f^{(m)}(z) \in \delta - \text{Lip}$ при $\delta < 1$ и $\omega(f^{(m)}, x) < Cx \ln \frac{1}{x}$ при $\delta = 1$ ($s = m + \delta$, m — целое, $0 < \delta \leq 1$).

Предполагая, что при некотором $a > 1$

$$x \frac{p'(x)}{p(x)} \geq a, \quad -\infty < x < +\infty,$$

М. М. Джрбашян установил также прямые теоремы о наилучшем весовом приближении. Из них отметим следующую: если функция $f(x)$ имеет k -ю производную, равномерно непрерывную на действительной оси с модулем непрерывности $\omega(\delta)$, то для любого $n > 0$ найдется многочлен степени n с условием

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} h(x) |f(x) - P_n(x)| < C v_n^{-k} \omega(v_n^{-1}),$$

где $v_n = \int_1^n \frac{dt}{q(t)}.$

Прямые теоремы о наилучших приближениях с весом при более общих условиях, накладываемых на вес, получены В. А. Гоняном. Приведенная ниже теорема дает оценку наилучшего приближения при минимальных возможных предположениях о весе, т. е. при единственном условии, что система полиномов полная с весом $h(x)$.

Пусть $f(x)$ — непрерывная на действительной оси и стремящаяся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$ функция, причем $\omega(\delta)$ — ее модуль непрерывности,

$$\omega(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)|,$$

по всем парам чисел x_1, x_2 с условием

$$\frac{|x_1 - x_2|}{(1 + |x_1|)(1 + |x_2|)} \leq \delta.$$

Зафиксировав произвольную точку a , $\text{Im } a \neq 0$, и достаточно малое $r > 0$, рассмотрим число

$$P_n = \min_{|z-a| \leq r} M_{n, \frac{h}{1+|t|}}(z),$$

где $M_{n, \varphi}(z) = \sup P|(z)|$ в классе всех многочленов степени не больше n , принадлежащих $\mathcal{M}_\varphi$. Для любого $n \geq 0$ существует многочлен $P_n(z)$ степени n такой, что

$$h(x) |f(x) - P_n(x)| < C \omega\left(\frac{1}{\ln p_n}\right), \quad -\infty < x < +\infty,$$

C не зависит от n .

Рассмотрим весовую полноту на произвольных множествах в комплексной плоскости. Остановимся сначала на некоторых общих результатах.

Прежде всего естественно выяснить, для каких замкнутых множеств E существует весовая функция $h(z) > 0$, обеспечивающая полноту в классе всех непрерывных на E функций $f(x)$, таких, что $f(z) \rightarrow 0, z \rightarrow \infty$. Оказывается, что необходимое и достаточное условие состоит в том, чтобы множество E можно было представить в виде суммы расширяющих замкнутых ограниченных множеств нигде не плотных и имеющих связное дополнение. В то же время общий необходимый и достаточный признак полноты с данным весом $h(z) \geq 0$, справедливый для любого замкнутого и нигде не плотного множества E , состоит в том, чтобы

$$M_{\frac{h}{1+|z|}}(z) = \infty, \quad z \in CE.$$

Рассматривая поиски метрических условий полноты, связанных с той или иной скоростью убывания $h(z)$ в зависимости от E , и сохраняя общность предположений относительно E , можно отметить следующий результат. Пусть E — произвольное замкнутое нигде не плотное множество и $G_0, G_1, \dots, G_n, \dots$ — области, дополнительные к E . Если целая функция $G(z)$ удовлетворяет условиям

$$|G(z)| \leq 1, \quad z \in E,$$

$$\sup |G(z)| > 1, \quad z \in G_k, \quad k \geq 0,$$

и $H(r) = \max |G(z)|, |z| \leq 2r$, то система многочленов полная при любом весе $h(z)$, удовлетворяющем требованию

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in E}} h(z) [H(|z|)]^n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Заметим, что для существования веса $h(z) > 0$ с полнотой на E множество E необходимо должно быть таким, что все компоненты G_k его дополнения неограничены, откуда уже следует существование функции $G(z)$, удовлетворяющей условиям этой теоремы.

Несмотря на свою общность, указанный критерий в различных частных классах множеств приводит к условиям полноты, недалеким от точных. Например, если E — действительная ось и в качестве $G(z)$ можно взять $\cos z$, то полнота будет при любом весе всегда $e^{-|x| \lambda(|x|)}$, где $\lambda(r)$ — произвольная функция с условием $\lambda(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$; если E — две параллельные прямые на расстоянии l друг от друга и ось OX можно считать их осью симметрии, то в качестве $G(z)$ подходит функция $\exp \exp \frac{\pi z}{l}$ и определяемый вес имеет вид

$$\exp \left\{ -\lambda(|z|) \exp \frac{\pi}{l} |z| \right\}.$$

Приведем еще некоторые критерии полноты для частных классов множеств, полученные М. М. Джрбашьяном.

Если замкнутое нигде не плотное множество E разбивает плоскость на конечное число областей, каждая из которых содержит угол раствора $\frac{\pi}{\alpha}$, то для полноты в классе всех таких множеств с весом $h(z) \equiv h(|z|) \in N$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln h(x)}{x^{1+\alpha}} dx = -\infty.$$

Для полноты на луче это условие приобретает вид

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln h(x)}{x^{\frac{3}{2}}} dx = -\infty,$$

а для полноты системы многочленов на системе параллельных прямых, минимальное расстояние между которыми равно l , необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_1^{\infty} e^{-\frac{\pi}{l}x} \ln h(x) dx = -\infty.$$

Необходимость в этих теоремах следует из критерия нормальности семейств аналитических функций, доказанного А. Л. Шагиняном в весьма общем случае. Приведем его формулировку.

Пусть G — произвольная односвязная и неограниченная область с границей Γ , функция $m(\zeta) \geq 1$ определена и непрерывна на Γ , а $\mathfrak{M}_{m(\zeta)}$ — семейство всех функций, аналитических в G , непрерывных в замкнутой области $\bar{G}$ (кроме, может быть, бесконечно удаленной точки) и удовлетворяющих неравенствам

$$|f(\zeta)| \leq m(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma,$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in G}} |z|^{-1} \ln [1 + |f(z)|] = 0.$$

Через $\mu(z, G, e)$ обозначим гармоническую меру в точке $z \in G$ относительно области G граничного борелевского подмножества e . Теорема Шагиняна гласит, что если

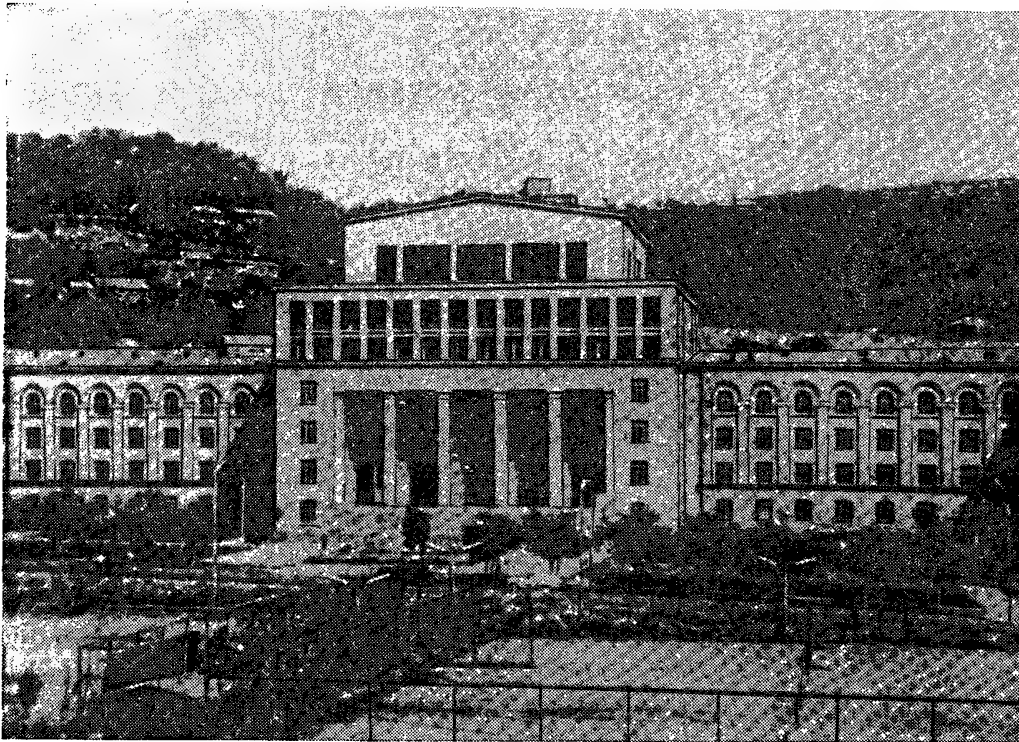
$$\inf_{z \in G} \int_{\Gamma}^+ \ln m(\zeta) d\mu(z, G, e) < \infty,$$

то семейство функций $\mathfrak{M}_{m(\zeta)}$ нормально в G . Отсюда, в частности, вытекает, что если G — одна из дополнительных к E областей, то из неравенства

$$\inf_{z \in G} \int_{\Gamma}^+ \ln h(\zeta) d\mu(z, G, e) < \infty$$

следует

$$M_{\frac{h}{1+|t|}}(z) < \infty, \quad z \in G,$$



Ереванский государственный университет.

т. е. неполнота системы многочленов с весом $h(\zeta) > 0$; относительно этого веса предполагается лишь его непрерывность.

В данном параграфе введение весовой функции при рассмотрении равномерных приближений многочленами обуславливалось неограниченностью множества. Второй причиной введения веса даже для ограниченных множеств является несвязность их дополнения. Весовая функция в этом случае должна достаточно быстро убывать вблизи некоторых точек множества, как бы «разрывая» его на части, дополнение к которым уже связно. Скорость убывания веса при этом существенно зависит от структуры множества вблизи тех его точек, для которых вес убывает. Не останавливаясь на многочисленных результатах в этом направлении, сформулируем одну теорему.

Пусть кривая L , гомеоморфная окружности, имеет во всех своих точках, кроме $z = 0$, касательную, угол которой с осью OX изменяется достаточно гладко, а в точке $z = 0$ составляет угол раствора $\frac{\pi}{\alpha}$, $\alpha \geq 1$; функция $h(\zeta) \equiv h(|\zeta|)$, $\zeta \in L$, непрерывна и достаточно правильно стремится к нулю при $\zeta \rightarrow 0$. Для полноты системы многочленов на L с весом $h(\zeta)$ в классе всех непрерывных на L функций необходимо и достаточно, чтобы интеграл $\int_0^{\alpha-1} \ln h(r) dr$ расходился.

Равномерные приближения целыми функциями

Во всех теоремах о равномерном приближении многочленами замкнутые множества, на которых осуществляется приближение, необходимо должны быть ограниченными. Если тем не менее нас интересует вопрос о равномерном приближении без веса на множествах, простирающихся до бесконечности, то естественно расширить класс аппроксимирующих функций и рассматривать вместо многочленов их наиболее прямое обобщение — класс целых функций.

В настоящем параграфе рассматриваются основные результаты, полученные в области равномерного и наилучшего приближения целыми функциями. Исследования, относящиеся к случаю аппроксимации на действительной оси, ведут свое начало от классических работ С. Н. Бернштейна. Развитые им в работах 20-х годов, а также в дальнейших исследованиях методы специфичны для действительной области и тесно связаны с изучением экстремальных свойств многочленов и целых функций конечной степени. Весьма плодотворным оказался переход в комплексную область к произвольным замкнутым множествам и к целым функциям произвольного роста. Основы теории равномерных приближений целыми функциями в комплексной области были заложены в работах М. В. Келдыша, относящихся к концу 30-х — началу 40-х годов. Мы остановимся лишь на основных результатах, специфичных для комплексного переменного.

Как и в случае приближений многочленами, рассмотрим сначала условия, обеспечивающие возможность равномерных приближений любой непрерывной функции (множество E поэтому заведомо будет предполагаться нигде не плотным), а затем — аппроксимацию на множествах с внутренними точками.

Первым результатом приближения целыми функциями в направлении теоремы типа теоремы Лаврентьева для многочленов была установленная в 1926 г. следующая теорема Карлемана: для любой непрерывной функции $f(z)$, определенной на спрямляемой линии Жордана L без кратных точек, которая начинается и оканчивается на бесконечности, и любой непрерывной функции $\varepsilon(r) > 0$, произвольно быстро стремящейся к нулю при $r \rightarrow \infty$, найдется целая функция $G(z)$ такая, что

$$|f(z) - G(z)| < \varepsilon(|z|), \quad z \in L.$$

Если сохранить аналогию со случаем многочленов, то это утверждение является эквивалентом теоремы Вейерштрасса для отрезка и из него следует важный вывод о том, что расширение класса аппроксимирующих функций от многочленов до всех целых функций приводит к существенно новому обстоятельству — оказывается возможным не только равномерное приближение, но и приближение в более сильном смысле, с касанием на бесконечности сколь угодно высокого порядка. Порядок этого касания характеризуется скоростью убывания $\varepsilon(r)$ при $r \rightarrow \infty$.

После незначительных усиления теоремы Карлемана, полученных его учениками, долгое время оставался нерешенным вопрос об описании всех тех множеств E , на которых имеет место приближение любой непрерывной функции целыми функциями с касанием произвольно высокого порядка. Такие множества принято называть множествами Карлемана. Исчерпывающее решение этого вопроса было дано в 1939 г. М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым.

Будем говорить, что замкнутое множество E удовлетворяет условию B , если существует растущая к бесконечности при $t \rightarrow \infty$ функция $r(t)$, такая, что любую точку ζ дополнения к E можно соединить с бесконечно удаленной точкой линией Жордана, расположенной вне E и вне круга $|z| \leq r(\zeta)$. Теорема Келдыша — Лаврентьева формулируется так: для того чтобы континуум E был множеством Карлемана, необходимо и достаточно, чтобы E не содержал внутренних точек и удовлетворял условию B . Н. У. Аракелян распространил это утверждение на любые замкнутые не обязательно связные множества.

Из доказательства сформулированной теоремы следует, что класс замкнутых множеств E , на которых любая непрерывная функция допускает обычную равномерную аппроксимацию, тождествен классу множеств, на которых возможна аппроксимация со сколь угодно высоким порядком касания на бесконечности, т. е. классу множеств Карлемана, так что в этом смысле здесь осуществляется принцип «все или ничего». Вместе с тем следует подчеркнуть, что сформулированная теорема важна для теории функций вообще, поскольку из нее вытекают по существу весьма тонкие теоремы о поведении аналитической функции вблизи существенно особой точки. Она полностью описывает множества, на которых целая функция асимптотически может быть совершенно свободной, т. е. может сколь угодно хорошо следовать в своем поведении за любой непрерывной функцией.

В общем случае, когда множество E содержит внутренние точки, а функция $f(z)$ непрерывна на E и аналитична внутри E , ожидать сколь угодно высокого касания аппроксимирующих целых функций заведомо невозможно. В самом деле, каждой неограниченной области D и аналитической в D функции $\varphi(z)$ соответствует некоторый (зависящий лишь от D) возможный порядок убывания к нулю $\varphi(z)$ при $z \rightarrow \infty$, $z \in D$. Если функция $\varphi(z)$ убывает быстрее этой предельной скорости (которая, например, для полуплоскости равна $e^{-a|z|}$, $a > 0$ — любое), то $\varphi(z) = 0$. Таким образом, из неравенства

$$|f(z) - G(z)| < \varepsilon(|z|), \quad z \in E,$$

при быстром убывании $\varepsilon(r)$ следует $f(z) \equiv G(z)$, $z \in D$, что, очевидно, верно не для всех аппроксимируемых функций $f(z)$.

Учитывая это замечание, следует отдельно рассматривать две различные (но связанные между собой) задачи:

а) описать все множества и функции, для которых возможна аппроксимация вида

$$|f(z) - G(z)| \leq \varepsilon, \quad z \in E;$$

б) определить в зависимости от E убывающие к нулю функции $\varepsilon(r)$, для которых возможна аппроксимация вида

$$|f(z) - G(z)| \leq \varepsilon(|z|), \quad z \in E.$$

М. В. Келдыш доказал, что для континуума E с условием B и функции $f(z)$, непрерывной на E и аналитической внутри E , первая задача имеет положительное решение. Полное решение этой задачи принадлежит Н. У. Аракелян. Он доказал, что для возможности равномерных приближений целыми функциями на данном замкнутом множестве E любой функции $f(z)$, непрерывной на E и аналитической внутри E , необходимо и достаточно, чтобы E удовлетворяло условию B . Эта теорема является аналогом общей теоремы о равномерных приближениях многочленами и содержит последнюю как частный случай, поскольку ограниченные множества, удовлетворяющие условию B , всегда имеют связное дополнение.

Рассмотрим вторую задачу — об асимптотической аппроксимации. Заметим, что еще в первых работах М. В. Келдыша, посвященных этим вопросам, была использована простая схема рассуждений, позволяющая свести вторую задачу к первой посредством построения целой функции, не имеющей нулей на E и убывающей к нулю при $z \rightarrow \infty$, $z \in E$, с возможно более высокой скоростью. Приведем эту схему.

Пусть $\omega(z)$ — такая целая функция, а $f(z)$ — аппроксимируемая функция. К отношению $\frac{f(z)}{\omega(z)}$ применим теорему, дающую решение первой задачи:

$$\left| \frac{f(z)}{\omega(z)} - G_1(z) \right| < \varepsilon, \quad z \in E.$$

Если положить $G(z) = \omega(z) G_1(z)$, то в искомой асимптотической аппроксимации

$$|f(z) - G(z)| < \varepsilon |\omega(z)|, \quad z \in E,$$

порядок касания будет определяться убывающей к нулю функцией

$$\varepsilon(r) = \max_{|z|=r} |\omega(z)|.$$

Говоря об асимптотическом приближении на произвольных множествах, следует подчеркнуть, что весьма неожиданным и интересным оказалось обнаруженное М. В. Келдышем существование порядка касания, универсального для любого континуума с условием B . Соответствующий результат можно сформулировать так: если континуум E удовлетворяет условию B , а функция $f(z)$ непрерывна на E и аналитическая внутри E , то для любых $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ найдется целая функция $G(z)$, удовлетворяющая неравенству

$$|f(z) - G(z)| < \varepsilon \exp(-|z|^{\frac{1}{2}-\eta}), \quad z \in E.$$

Эта теорема, если рассматривать все континуумы с условием B , близка к точной, так как существуют множества, а именно замыкания некоторых областей, граница которых представляет жорданову линию

без кратных точек, начинающуюся и оканчивающуюся на бесконечности, и функция $f(z)$ описанного типа такие, что теорема перестает быть справедливой, если в правой части находится любая функция $\psi(r)$, для которой

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \psi(r)}{r^{\frac{1}{2}}} = -\infty,$$

или если положить $\psi(r) = e^{-a\sqrt{r}}$, где $a > 0$ — любое число.

М. В. Келдыш показал, что в различных частных классах множества E порядок касания может быть значительно улучшен. Например, если множество E с условием B расположено внутри угла $|\arg z| \leq \frac{\alpha}{2}$, то

касание характеризуется функцией $\varepsilon \exp \left\{ -|z|^{\frac{\pi}{\alpha} - \eta} \right\}$; если же E находится внутри полосы $|y| \leq \frac{\pi}{2}$, то в правой части неравенства можно записать

$$\varepsilon \exp \{ -\exp [(1 - \eta)|z|] \},$$

где $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ — любые числа, причем все эти оценки в соответствующих классах множеств близки к точным.

Как показал в 1956 г. М. М. Джрбашян, для полуплоскости условие, налагаемое на порядок касания, необходимое и достаточное для возможности асимптотической аппроксимации, состоит в сходимости интеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln \varepsilon(r)}{r^2} dr.$$

При этом накладываются некоторые естественные ограничения на правильность убывания $\varepsilon(r)$ при $r \rightarrow \infty$.

В последние годы Н. У. Аракелян получил результаты, предельно уточняющие сформулированные выше теоремы и завершающие по существу то направление в теории приближений целыми функциями, которое было развито в упомянутых исследованиях М. В. Келдыша. Приведем в качестве примера один из результатов Н. У. Аракеяна.

Пусть E — замкнутое множество. Для того чтобы любая функция $f(z)$, непрерывная на E и аналитическая внутри E , допускала асимптотическое приближение с касанием $\varepsilon(r)$, удовлетворяющим условию

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln \varepsilon(r)}{r^{\frac{3}{2}}} dr > -\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы E удовлетворяло условию B или совпадало со всей плоскостью. Если только

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln \varepsilon(r)}{r^{\frac{3}{2}}} dr = -\infty,$$

то существуют замкнутое множество E с условием B и функции $f(z)$, аналитические на всем E , кроме $z = \infty$, для которых приближение вида

$$|f(z) - G(z)| < \varepsilon(|z|), \quad z \in E,$$

невозможно ни при каком выборе целой функции $G(z)$.

До сих пор мы рассматривали возможность приближений целыми функциями безотносительно к аппроксимирующим целым функциям, в частности к их росту на всей плоскости при $z \rightarrow \infty$. Остановимся теперь кратко на результатах, касающихся оценки роста приближающих целых функций. Подобные результаты являются комплексным аналогом теорем о наилучшем приближении на оси, однако ввиду их большой общности они теряют ту почти совершенную точность, которая характерна теоремам о приближениях на действительной оси целыми функциями конечной степени.

Рост аппроксимирующих целых функций зависит в общем случае от множества E , свойств функции $f(z)$ (таких, как их рост при $z \rightarrow \infty$, дифференциальные свойства или свойства непрерывности на E и т. п.), числа ε или функции $\varepsilon(r)$ (в случае асимптотического приближения). В упоминавшихся выше работах М. В. Келдыша и Н. У. Аракеляна даны решения ряда основных задач в этом направлении. Эти решения потребовали создания существенно новых, по сравнению с действительным случаем, методов и чрезвычайно сложных конструкций. Приведем формулировки некоторых типичных результатов.

Пусть функция $f(z)$ аналитическая в угле $|\arg z| \leq \frac{\alpha}{2}$, число ρ удовлетворяет неравенству $0 \leq \rho \leq \frac{\pi}{\alpha}$ и ε и δ — произвольные положительные числа. Обозначим:

$$M(r) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|, \quad |z| \leq r, \quad |\arg z| \leq \frac{\alpha}{2},$$

$$\mathcal{M}(r) = \max_{|z| \leq r} |G(z)|.$$

Существует целая функция $G(z)$, удовлетворяющая неравенству

$$|f(z) - G(z)| < \varepsilon e^{-|z|^\rho}$$

в угле $|\arg z| \leq \frac{\alpha}{2} - \delta$ и такая, что ее рост оценивается неравенством

$$\ln \mathcal{M}(r) < (1+r)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}} \left[K + k \max_{t \leq kr+1} \frac{t^\rho + \ln^+ M(t)}{(1+t)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}} \right],$$

где k — постоянная, зависящая от δ , а K — постоянная, зависящая от ε и δ . Можно построить также целую функцию $G(z)$, осуществляющую такое же приближение функции $f(z)$, рост которой ограничен неравенством

$$\ln \mathcal{M}(r) < (r+\delta)^\kappa [K + k(r+\delta)^\rho + k \ln^+ M(r+\delta)],$$

где κ — большее из чисел $2, \frac{\pi}{2\pi-\alpha}$.

Если же областью аналитичности функции $f(z)$ является полоса $|y| \leq \frac{\pi}{2}$, то для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $\rho > 0$ существует целая функция $G(z)$, удовлетворяющая в полосе $|y| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ неравенству

$$|f(z) - G(z)| < \varepsilon e^{-|z|^\rho}$$

и такая, что

$$\ln M(r) < [1 + r(\ln r)^2] [K + k \ln r + k(r \ln r)^\rho + k \ln M(kr \ln r + K)],$$

где k — зависит от ε , а K — от ε и δ . Существует также функция G , осуществляющая такое же приближение функции $f(z)$, для которой справедливо неравенство

$$\ln M(r) < (r + \delta)^2 [K + k(r + \delta)^2 + k \ln M(r + \delta)].$$

В предыдущем утверждении порядок касания можно значительно увеличить, соответственно усилится и рост $G(z)$. Точнее говоря, в условиях предыдущей теоремы порядок касания может иметь вид

$$|f(z) - G(z)| < \varepsilon \exp \{-\exp |z|\}, \quad |y| \leq \frac{\pi}{2} - \delta,$$

а рост $G(z)$ ограничивается неравенством

$$\ln M(r) < K[(r + \delta)^2 \ln M(r + \delta) + e^{(1+\delta)r}].$$

В этих теоремах предполагалась аналитичность функции $f(z)$ в более широкой области, чем то множество, на котором происходит приближение. Можно, однако, ослабить ограничение, накладываемое на функцию $f(z)$, допустив лишь ее непрерывную дифференцируемость на замкнутом множестве. Например, для угла $E_\alpha = \{z : |\arg z| \leq \frac{\alpha}{2}, \alpha \leq \pi\}$ Н. У. Аракелян доказал, что если функция $f(z)$ имеет непрерывную производную на E_α и

$$M(r) = \max_{\substack{z \in E_\alpha \\ |z| \leq r}} |f(z)|, \quad \mu(r) = \max_{\substack{|z| \leq r \\ |\arg z| = \frac{\alpha}{2}}} |z^{1-\rho} f'(z)|,$$

где $\rho = \frac{\pi}{2\pi - \alpha}$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно построить целую функцию $G(z)$, удовлетворяющую неравенству

$$|f(z) - G(z)| < \varepsilon, \quad z \in E_\alpha,$$

и такую, что для нее справедлива оценка

$$\ln |G(z)| < ct^\rho \left[\frac{1}{\varepsilon^\rho} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\mu(t)}{\varepsilon} \ln \frac{\mu(t)}{\varepsilon} \ln \frac{t\mu(t)M(t)}{\varepsilon} \right],$$

где $t = 1 + 2|z|$.

Из последней теоремы вытекает следствие, перекликающееся с соответствующей теоремой для действительной оси: если функция $f(z)$ аналитическая внутри E_α , непрерывна на E_α и такова, что функция

$f(z^{\frac{1}{\rho}})$ равномерно непрерывна на множестве $E_{\alpha\rho}$, то $f(z)$ может быть равномерно аппроксимирована на E_{α} целыми функциями порядка не больше ρ .

В заключение заметим, что в этом параграфе мы не касались обширных исследований по равномерному и наилучшему приближению целыми функциями, специфических для действительного случая и относящихся к приближению на действительной оси. Помимо основополагающих исследований С. Н. Бернштейна следует отметить чрезвычайно интересные работы в этом направлении, выполненные М. Г. Крейном, Н. И. Ахиезером, С. М. Никольским и другими советскими математиками.

5

Приближения многочленами и рациональными функциями в интегральных метриках

Пусть D — область в плоскости комплексного переменного z ; $h(z)$ — неотрицательная ограниченная функция, определенная и непрерывная в области D . Обозначим через $H_p(D, h)$, где $p \geq 1$, класс всех функций, аналитических в D и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{(p,D,h)} = \left(\int_D \int h(z) |f(z)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty;$$

в частности, для $h(z) \equiv 1$ положим $H_p(D, 1) = H_p(D)$. Функцию $h(z)$ назовем весовой функцией или просто весом. Метрика в пространстве $H_p(D, h)$ вводится как

$$\|f - g\|_{(p,D,h)};$$

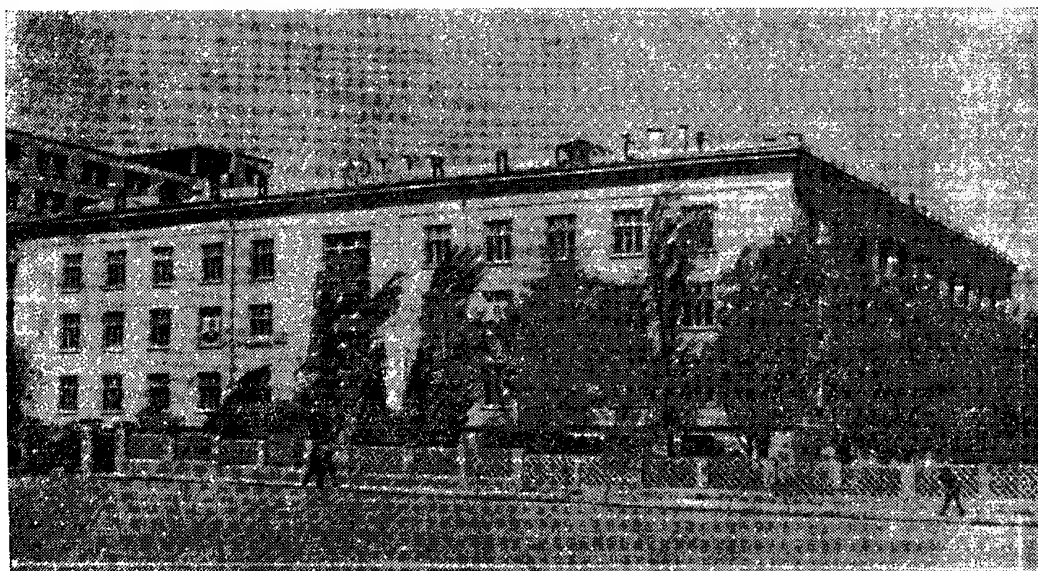
близость функций при этом измеряется, по существу, величиной интеграла

$$\int_D \int h(z) |f(z) - g(z)|^p dx dy.$$

Будем говорить, что функция $f(z) \in H_p(D, h)$ допускает приближение многочленами в метрике пространства $H_p(D, h)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется многочлен $p(z)$ такой, что

$$\int_D \int h(z) |f(z) - p(z)|^p dx dy < \varepsilon.$$

Если любая функция $f(z) \in H_p(D, h)$ допускает приближение многочленами в метрике пространства $H_p(D, h)$, то говорят, что система многочленов полная в области D в смысле p -средних по площади с весом $h(z)$, или, короче, полная в пространстве $H_p(D, h)$.



Институт математики и механики Академии наук Азербайджанской ССР.

Задача о полноте системы многочленов в пространстве $H_p(D, h)$ допускает естественные обобщения. Вместо области D можно рассматривать произвольное измеримое относительно плоской меры множество E , вместо системы многочленов — произвольное множество функций, принадлежащих $H_p(E, h)$.

Наибольший интерес представляет случай $p = 2$. В этом случае $H_2(D, h)$ — гильбертово пространство и задача о приближении тесно связана с вопросом о разложении функций в ряды Фурье по ортонормированным системам.

Пусть $g_1(z), \dots, g_n(z), \dots$ — произвольная система линейно независимых функций, принадлежащих $H_2(D, h)$. Линейные комбинации функций системы $\{g_n\}$

$$p_n(z) = \sum_{i=1}^n a_i^{(n)} g_i(z), \quad n = 1, 2, \dots,$$

однозначно определяемые условиями $a_i^{(n)} > 0, n = 1, 2, \dots$, и

$$\int_D \int h(z) p_n(z) \overline{p_m(z)} dx dy = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m, \end{cases}$$

составляют систему функций, ортогональных и нормированных по площади D относительно веса $h(z)$.

Система функций $\{g_n\}$ называется полной в D при весе $h(z)$ (в пространстве $H_2(D, h)$), если выполнено какое-либо из следующих эквивалентных между собой условий.

1. Для любой функции $f(z) \in H_2(D, h)$

$$\inf_{\{c_i\}} \int_D \int h(z) \left| f(z) - \sum_{i=1}^n c_i g_i(z) \right|^2 dx dy = 0,$$

где нижняя грань берется по всевозможным $c_1, \dots, c_n$, $n = 1, 2, \dots$; другими словами, множество всевозможных конечных линейных комбинаций функций системы $\{g_n\}$ полное в $H_2(D, h)$ в смысле ранее данного определения.

2. Если для некоторой функции $f(z) \in H_2(D, h)$

$$\int_D \int h(z) f(z) \overline{g_n(z)} dx dy = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

то $f(z) \equiv 0$, $z \in D$.

3. Для любой функции $f(z) \in H_2(D, h)$ ряд Фурье $f(z)$ по системе $\{p_n\}$ сходится к $f(z)$ в смысле средних квадратичных с весом $h(z)$, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D \int h(z) \left| f(z) - \sum_{i=1}^n a_i p_i(z) \right|^2 dx dy = 0,$$

где a_i — коэффициенты Фурье функции $f(z)$ относительно системы $\{p_i\}$, определяемые по формуле

$$a_i = \int_D \int h(z) f(z) \overline{p_i(z)} dx dy, \quad i = 1, 2, \dots$$

В частности, если система степеней $\{z^n\}$, или, что то же самое, система многочленов z , полная в пространстве $H_2(D, h)$, то любая функция $f(z) \in H_2(D, h)$ разлагается в ряд Фурье по ортонормированной системе многочленов, сходящийся к $f(z)$ по норме пространства $H_2(D, h)$; в случае $h(z) \neq 0$, $z \in D$, этот ряд сходится к $f(z)$ равномерно на любом ограниченном и замкнутом подмножестве D . Тем самым проблема полноты тесно связана с важным вопросом об аналитическом изображении функций. Полнота или неполнота заданной системы функций зависит от двух факторов: области D и весовой функции $h(z)$.

Мы остановимся в основном на результатах, относящихся к проблеме полноты системы многочленов от z , или системы целых неотрицательных степеней z , в пространстве $H_2(D, h)$. Все наиболее важные результаты в этом направлении получены благодаря исследованиям М. В. Келдыша, А. И. Маркушевича, А. Л. Шагиняна, М. М. Джрбашяна и других советских ученых. Заметим, что большой круг вопросов, связанных с теорией ортогональных многочленов, не отражен в настоящем разделе, так как нашей задачей является изложение лишь тех результатов, которые непосредственно связаны с теорией приближений и проблемой полноты.

Рассмотрим сначала вопрос о приближении многочленами в среднем по площади конечной области D при отсутствии веса в пространстве $H_2(D)$. Первый результат в этом направлении был получен Карлеманом в 1922 г. Карлеман заметил, что из результатов Линделефа о конформных отображениях следует полнота системы многочленов в пространстве $H_2(D)$ для жордановых областей D . Следующий важный результат о полноте был установлен в 1934 г. А. И. Маркушевичем и,

независимо от него, Фаррелем; он относится к классу так называемых областей Каратеодори.

Пусть D — ограниченная односвязная область, D_∞ — та из дополнительных к $\bar{D}$ областей, которая содержит бесконечно удаленную точку. Область D называется областью Каратеодори, если граница D совпадает с границей области D_∞ . Легко понять, что область Каратеодори совпадает с множеством внутренних точек своего замыкания, т. е. не содержит в составе своей границы континуумов, являющихся разрезами. Обратно: если выполнено это условие и, кроме того, дополнение к $\bar{D}$ связно, то D является областью Каратеодори. Заметим, что дополнительное условие связности дополнения к $\bar{D}$ не является необходимым для областей Каратеодори; хорошо известен построенный Брауэром пример счетного числа ограниченных областей D_n ($n = 1, 2, \dots$) с одной и той же границей Γ , являющейся одновременно границей для каждой из областей D_∞ .

Теорема Маркушевича — Фарреля: если D — область Каратеодори, то система многочленов полная в пространстве $H_2(D)$; другими словами, для любой функции $f(z) \in H_2(D)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется многочлен $p(z)$ такой, что

$$\iint_D |f(z) - p(z)|^2 dx dy < \varepsilon.$$

Учитывая сделанные выше замечания, получаем утверждение: любая функция $f(z)$, принадлежащая пространству $H_2(D)$ в области D типа Каратеодори, разлагается в ряд Фурье по ортонормированной системе многочленов, сходящийся к $f(z)$ в среднем по площади D и равномерно внутри D (на любом замкнутом подмножестве D).

Существенное обобщение теоремы Маркушевича — Фарреля получено недавно С. О. Синаняном.

Пусть E — ограниченное замкнутое множество, $H_2(E)$ — пространство функций, измеримых на E и аналитических во внутренних точках E , для которых

$$\iint_E |f(z)|^2 dx dy < \infty.$$

Используя метод, с помощью которого была доказана общая теорема о равномерном приближении многочленами (усреднение, аппроксимация ядра Коши), С. О. Синанян доказал следующую теорему: если граница множества E совпадает с границей неограниченной компоненты дополнения к E , то для любой функции $f(z) \in H_2(E)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется многочлен $p(z)$ такой, что

$$\iint_E |f(z) - p(z)|^2 dx dy < \varepsilon.$$

Рассмотренные теоремы о приближении справедливы не только при $p = 2$, но и при любом $p > 0$.

Приведенные теоремы дают достаточные условия полноты, формулируемые исключительно в терминах топологических свойств области D . Рассмотрим теперь примеры областей, не являющихся областями Каратеодори. Прежде всего отметим, что система многочленов неполная в многосвязных областях, а также в односвязных областях, имеющих континуальные разрезы плоской нулевой меры; это легко следует из того, что последовательность многочленов, сходящаяся в среднем по площади области D , необходимо равномерно сходится внутри D .

Гораздо более содержателен пример некаратеодориевых областей типа «луночки». Так называют любую область, ограниченную двумя внутренне соприкасающимися кривыми Жордана L (внешняя) и l (внутренняя). Область, для которой $L = \{z : |z| = 1\}$ и $l = \left\{z : \left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\right\}$, обозначим Δ_0 . Любая область типа «луночки» топологически эквивалентна Δ_0 . Именно на примере таких областей М. В. Келдыш впервые (1939 г.) обнаружил связь между полнотой системы многочленов и метрическими свойствами областей, не принадлежащих классу Каратеодори. Он доказал, что существует область типа «луночки», в которой система многочленов полная, и область также типа «луночки», в которой система многочленов неполная.

Большой цикл исследований, в которых выявлены основные особенности теории средних квадратичных приближений в некаратеодориевых областях, провели А. Л. Шагинян и М. М. Джрбашян. Модельной задачей в их первых работах этого цикла была достаточно правильная область Δ типа «луночки», а в качестве метрической характеристики степени «некаратеодориевости» области Δ принималась «толщина» Δ вблизи кратной граничной точки $z = 1$, т. е. линейная мера $\sigma(r)$ пересечения окружности $|z - 1| = r$ с областью Δ . Найденная ими точная количественная грань, отделяющая области типа «луночки» с неполнотой от соответствующих областей с полнотой, определяется следующей теоремой: для того чтобы система многочленов была полной в области Δ , необходимо и достаточно, чтобы интеграл $\int_0^1 \ln \sigma(r) dr$ расходился.

На этом же примере областей, топологически эквивалентных области Δ_0 , А. Л. Шагинян показал связь между свойствами полноты и компактности.

Если взять множество $\mathcal{M}$ всех многочленов от z с условием

$$\int_{\Delta} |p(z)|^2 dx dy \leq 1$$

и рассмотреть мажоранту

$$M_{\Delta}(z) = \sup_{p(z) \in \mathcal{M}} |p(z)|$$

этого семейства многочленов, то для любой области Δ типа Δ_0 на линии L и всюду вне ее $M_{\Delta}(z) = \infty$, а в области Δ всегда $M_{\Delta}(z) < \infty$; функция $M_{\Delta}(z)$ ограничена на каждом замкнутом подмножестве Δ .

Что же касается поведения $M_{\Delta}(z)$ в остальной части плоскости, т. е. внутри l , то здесь все зависит от метрических свойств Δ вблизи кратной граничной точки: если интеграл от $\ln \sigma(r)$ расходится, то внутри l $M_{\Delta}(z) = \infty$; если же этот интеграл сходится, то в области, ограниченной L , и в частности внутри l , $M_{\Delta}(z) < \infty$, причем в этом случае функция $M_{\Delta}(z)$ ограничена на каждом компакте, лежащем внутри L . Это означает, что семейство многочленов $\mathcal{M}$ компактно внутри L в том и только в том случае, когда система многочленов неполная в Δ . Следующее утверждение эквивалентно предыдущему: для полноты системы полиномов в Δ необходимо и достаточно, чтобы $M_{\Delta}(z) = \infty$, $z \notin \Delta$. Свойство компактности, или нормальности, семейств аналитических функций, более общих по сравнению с многочленами, изучено в весьма общей форме А. Л. Шагиняном. Им же установлены метрические критерии нормальности, которые играют важную роль при исследовании различных задач теории приближений, позволяя устанавливать необходимые условия полноты.

Для односвязных и ограниченных областей D произвольной природы доказано следующее утверждение: для полноты в D необходимо, чтобы для любой граничной точки ζ и любого $\varepsilon > 0$ были совместимы неравенства

$$\int_D |p(z)|^2 dx dy < \varepsilon, \quad \max_{|z-\zeta| \leq \varepsilon} |p(z)| > 1,$$

где $p(z)$ — многочлен, т. е. чтобы семейство многочленов $\mathcal{M}(D)$ не было компактным ни в одной из областей, содержащих граничные точки D . Это же условие является, по-видимому, и достаточным. Указанное обстоятельство — проявление наблюдающейся во многих вопросах теории приближений эквивалентности свойств компактности и полноты семейств аналитических функций.

Связь между полнотой и компактностью можно проследить также в равномерных приближениях полиномами и рациональными функциями. Даже изложенные выше наиболее сильные результаты о приближении полиномами и рациональными функциями, где речь идет о точках пика и аналитической емкости при соответствующем уточнении понятия компактности применительно к этим постановкам, являются по существу выражением таких связей. Зависимость между полнотой и компактностью носит весьма общий и глубокий характер, однако до настоящего времени накопленные факты не объединены общей концепцией и истинные причины таких связей не вскрыты с должной общностью.

Метрическое условие полноты системы многочленов в достаточно широком классе областей установлено М. В. Келдышем в 1945 г. В основе его построений лежит упоминавшийся выше метод вывода полюсов с оценками. Приведем формулировку полученного на основании результата М. В. Келдыша более общего критерия полноты; этот критерий относится к произвольной ограниченной и односвязной области.

Пусть S — окружность, охватывающая $\bar{D}$. Система многочленов полная в D , если существует счетное множество точек ζ_k , $k = 1, 2, \dots$

замыкание которого содержит границу D и которое обладает следующим свойством: каждой точке ζ этого множества соответствует число $\delta_0(\zeta) > 0$ такое, что для любого $\delta < \delta_0(\zeta)$ точку ζ можно соединить с S спрямляемой линией l при условии

$$\text{mes}_2 D_\delta(l) < \exp \left\{ - \exp 5 \cdot \frac{\text{дл. } l}{\delta} \right\},$$

где $D_\delta(l)$ — часть области D , заключенная в δ -окрестности l . Этот критерий можно улучшить, если рассматривать различные частные классы областей. Однако во всем классе односвязных областей он не может быть существенно улучшен. Как показывают примеры, теорема перестает быть справедливой, если правую часть заменить при любом $\alpha > 0$ выражением

$$\exp \left\{ - \exp \left(\frac{\text{дл. } l}{\delta} \right)^{1-\alpha} \right\}.$$

Доказательство общего критерия полноты проводится по типичной в этих вопросах схеме рассуждений. На последовательности замкнутых множеств, расширяющихся к области D , функция $f(z)$ приближается равномерно по теореме Рунге, а среднее квадратичное уклонение на остальной части D , где приближающие многочлены могут быть большими, оказывается малым в силу того, что площадь части области, попадающей в окрестность границы, незначительна. Этими же соображениями подтверждается решающее значение метрических свойств области для возможности полноты, что можно выразить следующим утверждением: каждой односвязной и ограниченной области D соответствует топологически эквивалентная ей область D^* , в которой система полиномов полная. Класс же Каратеодори, по-видимому, является наиболее широким классом областей, которые допускают единую топологическую характеристику, обеспечивающую полноту.

Остановимся теперь кратко на вопросах, связанных с приближением в среднем по площади посредством рациональных функций.

Теорема Маркушевича — Фарреля позволила установить полноту системы рациональных функций в пространстве $H_2(D)$ для конечносвязных областей D типа Каратеодори.

Пусть D — ограниченная область; граница ее состоит из непересекающихся континуумов $K_1, \dots, K_n$, из которых K_1 охватывает все остальные. Многосвязная область D называется областью Каратеодори, если K_1 является границей той из дополнительных к $\bar{D}$ областей, которая содержит точку $z = \infty$, и для любого K_i , $i = 2, \dots, n$, можно указать такую точку z_i , чтобы граница области, дополнительной к $\bar{D}$ и содержащей z_i , совпадала с K_i . Пусть D — область такого типа. Для любой функции $f(z) \in H_2(D)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует рациональная функция $r(z)$ с полюсами в точках $z_1 = \infty, z_2, z_3, \dots, z_n$ такая, что

$$\int_D \int |f(z) - r(z)|^2 dx dy < \varepsilon.$$

Исследование рассматриваемых вопросов существенно продвинуто С. О. Синяным. Ему удалось успешно применить к задачам о

приближении в среднем методы, развитые ранее для случая равномерных приближений многочленами и рациональными функциями. Полученные результаты также оказались во многом аналогичными соответствующим результатам для равномерного случая.

Задача рассматривается в общей постановке — для произвольного ограниченного замкнутого множества E и пространства $H_p(E)$. Полное решение задачи о возможности приближения рациональными функциями получено для нигде не плотных множеств E (в этом случае $H_p(E) = L_p(E)$); необходимое и достаточное условие формулируется в терминах введенной Синяным p -емкости и аналогично условию теоремы Витушкина для случая равномерного приближения рациональными функциями. Для множеств E , которые могут иметь внутренние точки, Синянян получил достаточное условие возможности приближения, которое также формулируется в терминах p -емкости. Не останавливаясь на подробном изложении этих результатов, приведем лишь одно следствие из них, формулируемое в геометрических терминах и существенно усиливающее предыдущую теорему.

Пусть для любого $\delta > 0$ в δ -окрестности каждой граничной точки множества E существует жорданова дуга, принадлежащая дополнению к E и имеющая диаметр, превосходящий $c \cdot \delta$ (c — постоянная, одна и та же для всех $\delta > 0$ и граничных точек E). Тогда для любой функции $f(z) \in H_2(E)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется рациональная функция $r(z)$ с полюсами вне E такая, что

$$\iint_E |f(z) - r(z)|^2 dx dy < \varepsilon.$$

Заметим, что в общей постановке — для произвольных ограниченных областей D (тем более для произвольных ограниченных замкнутых множеств E) — задачи о необходимых и достаточных условиях полноты систем многочленов и рациональных функций в $H_2(D)$ или $H_2(E)$ в настоящее время остаются нерешенными.

Переходя к вопросам полноты системы многочленов при наличии весовой функции, заметим, что в этом случае полнота зависит от двух факторов: свойств области D и весовой функции $h(z)$. Однако даже в простейшем случае, когда D является кругом, вопрос об условиях, накладываемых на $h(z)$ и обеспечивающих полноту, весьма далек от сколько-нибудь удовлетворительного решения. Имеющиеся разрозненные результаты лишь указывают на сложность задачи и повышают интерес к ней.

Большой интерес вызывает пример функции $h(z) \in H_2(|z| < 1)$, которая является квадратом модуля аналитической в круге $K(0, 1)$ функции, не обращающейся здесь в нуль, и для которой система многочленов неполная в $K(0, 1)$ с весом $h(z)$. Первый пример такого рода был приведен М. В. Келдышем в 1945 г. Оказалось, что в качестве такой функции можно взять

$$h(z) = \left| \exp \frac{z+1}{z-1} \right|, \quad |z| < 1.$$

Достаточное условие весовой полноты в произвольных ограниченных односвязных областях получено М. В. Келдышем в 1941 г.

Пусть D — ограниченная односвязная область, $h(z) > 0$ — весовая функция, определенная в D . Обозначим: $\varphi(z)$ — функция, конформно отображающая D на круг $|w| < 1$, $\psi(w)$ — функция, обратная $\varphi(z)$. Если система многочленов полная в круге $|w| < 1$ при весе $h[\psi(w)]$, то будем говорить, что весовая функция $h(z)$ удовлетворяет условию A . Легко понять, что условие A еще не обеспечивает полноты в области D ; например, вес $h(z) \equiv 1$ удовлетворяет этому условию, однако в круге с радиальным разрезом система многочленов неполная. Дополнительное ограничение, налагаемое на $h(z)$ и гарантирующее полноту, состоит в требовании достаточно быстрого убывания $h(z)$ при аппроксимации к граничным точкам области D . Приведем теорему Келдыша. Пусть $d(z)$ — расстояние точки $z \in D$ до границы D , $S(r)$ — плоская мера множества всех точек области D , для которых $d(z) < 2r$. Если функция $h(z)$ удовлетворяет условию A и выполняется соотношение

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{[d(z)]^2}{S[d(z)]} \ln \ln \frac{1}{h(z)} = \infty,$$

то система многочленов полная в D относительно веса $h(z)$.

Порядок убывания веса вблизи границы, характеризующийся условием этой теоремы, нельзя существенно понизить, если рассматривать весь класс односвязных областей. Если же ограничиться рассмотрением различных специальных классов областей, то в некоторых случаях порядок убывания веса, гарантирующий полноту в данном классе, можно существенно понизить. Например, если через g_0 обозначить простейшую некаратеодориеву односвязную область — единичный круг с радиальным разрезом $\arg z = 0$, то для полноты системы многочленов в g_0 достаточно, чтобы

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{\ln \ln \ln \frac{1}{h(z)}}{\ln \frac{1}{d(z)}} > 1;$$

если же левая часть этого неравенства меньше единицы, то полнота не имеет места.

Заметим, что для круга с радиальным разрезом (так же как и для ряда других характерных некаратеодориевых областей) М. М. Джрбашян получил точный интегральный критерий полноты. А. Л. Шагинян установил методом интерполяции близкие к точным достаточные, а также необходимые условия полноты. В 1949 г. М. М. Джрбашян, пользуясь методом интегральных преобразований, уточнил эти достаточные условия. Сопоставление его результатов с полученными ранее А. Л. Шагиняном необходимыми условиями привело к необходимым и достаточным условиям полноты в различных задачах, в частности в задаче о весовой полноте в g_0 .

Предположим, что весовая функция $h(z)$, определенная в области g_0 и убывающая вблизи точек радиуса $\arg z = 0$, принимает постоянные

значения на радиусах: $h(re^{i\theta}) = H(\theta)$. При некоторых естественных ограничениях, накладываемых на функцию $H(\theta)$, справедливо следующее утверждение: для полноты системы многочленов в пространстве $H_2(g_0, h)$ необходимо и достаточно, чтобы интеграл $\int_0^{2\pi} \ln \ln \frac{1}{H(\theta)} d\theta$ расходился.

До сих пор мы рассматривали вопрос о полноте системы многочленов в ограниченных областях. Переходя к изложению соответствующих результатов для неограниченных областей, рассмотрим сначала случай $h(z) \equiv 1$. Необходимое в этом случае требование, чтобы любой многочлен принадлежал $H_2(D)$, уже накладывает на область D ограничения очевидного характера.

Впервые задачу о полноте в неограниченных областях рассмотрел (1941 г.) А. Л. Шагинян. Отметим следующие его результаты.

Существует область D , замыкание которой совпадает со всей плоскостью и в которой система многочленов полная. Более того, для любой области G существует область D , замыкание которой совпадает с замыканием G и в которой система многочленов полная. Интересно сравнить это утверждение со следующим почти очевидным замечанием: для любой области G существует область D^* , замыкание которой совпадает с замыканием G , причем система многочленов неполная ни в D^* , ни в какой-либо ее порции, содержащей граничные точки D^* .

Следующая теорема характеризует простой класс неограниченных областей, в которых система многочленов неполная: пусть a, b, c, d, p — произвольные положительные числа, причем $p < \frac{1}{2}$. Система многочленов неполная в области, лежащей в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и ограниченной линиями

$$y = ae^{-bx^p}, \quad y = ce^{-dx^p}.$$

Метрические теоремы о полноте в неограниченных областях установил М. М. Джрбашян. Приведем одну из его теорем — для случая, когда область расположена внутри некоторого угла.

Пусть D — неограниченная область, совпадающая с множеством внутренних точек своего замыкания и имеющая связное дополнение, а $l(r) > 0$ — функция, достаточно правильно растущая к $+\infty$ при $r \rightarrow \infty$. Через $\sigma(R)$ обозначим линейную меру пересечения области D с окружностью $|z| = R$. Пусть в дополнении к области D содержится некоторый угол с раствором $\frac{\pi}{\alpha} \left(\frac{1}{2} < \alpha < \infty \right)$, а функция $l(r)$ растет настолько быстро, что интеграл

$$\int \frac{l(r)}{r^{1+\alpha}} dr$$

расходится. Если функция $\sigma(r)$, характеризующая толщину области D вблизи бесконечности, такова, что

$$\sigma(r) < e^{-l(r)},$$

то система многочленов полная в области D .

Следовательно, если область D уместается внутри угла с раствором $\pi \left(2 - \frac{1}{\alpha}\right)$, то толщина области вблизи $z = \infty$ должна быть величиной порядка e^{-R^α} ; чем меньше раствор наибольшего угла, свободного от точек области D , тем «тоньше» должна быть область вблизи бесконечно удаленной точки, для того чтобы в ней имела место полнота. М. М. Джрбашян доказал, что для полноты нет надобности требовать, чтобы функция $\sigma(R)$ была мала при всех значениях R ; можно допустить при некоторых R произвольные значения $\sigma(R)$, лишь бы такие значения составляли множество, достаточно разреженное вблизи бесконечно удаленной точки.

Приведенное условие полноты не только достаточно, но в известном смысле и необходимо; необходимость условия теоремы установлена А. Л. Шагиняном.

Не останавливаясь подробно на результатах, относящихся к весовой полноте в неограниченных областях, приведем формулировку одной из теорем в этом направлении.

Через Δ_α обозначим угол с раствором $\pi \left(2 - \frac{1}{\alpha}\right)$, $\frac{1}{2} < \alpha < \infty$. Для полноты системы многочленов в Δ_α с весом вида $e^{-p(r)}$, $rp'(r) \uparrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$, в классе аналитических в Δ_α функций, для которых

$$\int_{\Delta_\alpha} \int e^{-p(r)} |f(re^{i\theta})|^2 r dr d\theta < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\int \frac{p(r)}{r^{1+\alpha}} dr = \infty.$$

Достаточность условий теоремы доказана М. М. Джрбашяном, необходимость — А. Л. Шагиняном.

Можно было бы привести аналогичные критерии для неограниченных областей других специальных классов, например для достаточно «правильных» областей, расположенных в полосе, внутри параболы и т. п.

Выше рассмотрены результаты, связанные с приближением в среднем по площади области. Вкратце изложим теперь результаты, относящиеся к вопросам приближения в среднем на спрямляемых кривых.

Пусть γ — замкнутая спрямляемая жорданова кривая, g — внутренность кривой γ , E_2 — совокупность функций, аналитических в области g и таких, что

$$\int_{L_n} |f(z)|^2 dz < C(f), \quad ds = |dz|,$$

для любой последовательности спрямляемых кривых L_n , сходящихся изнутри к кривой γ . Функции класса E_2 имеют почти всюду на γ угловые предельные значения, поэтому можно считать, что всякая функция

из E_2 определена и на γ (например, равна нулю в тех точках γ , в которых $f(z)$ не имеет предельных значений).

Вопрос о приближении функции $f(z)$ класса E_2 в среднем по кривой γ , т. е. вопрос о справедливости соотношения

$$\inf_{\gamma} \int |f(z) - p(z)|^2 ds = 0$$

в классе многочленов $\{p(z)\}$, рассматривался В. И. Смирновым в 1928 г. Эта его работа явилась началом исследований по приближению в среднем на кривых и в областях. В. И. Смирнов доказал, что для возможности приближения функций класса E_2 в среднем по кривой γ посредством многочленов от z необходимо и достаточно, чтобы функция $\ln |\psi'(w)|$ выражалась в круге $|w| < 1$ интегралом Пуассона через свои предельные значения на окружности $|w| = 1$. Здесь $\psi(w)$ — функция, осуществляющая конформное отображение круга $|w| < 1$ на область g . Области g , удовлетворяющие указанному условию, называются областями Смирнова или областями типа S .

В 1936 г. М. В. Келдыш показал, что условие Смирнова необходимо и достаточно и для того, чтобы

$$\inf_{\gamma} \int |f(z) - p(z)|^p ds = 0,$$

где $f(z) \in E_p$ (определение класса E_p совершенно аналогично определению класса E_2), $p > 0$ — любое число. Области Смирнова являются, например, звездообразные области, области с кусочно-аналитической границей и ненулевыми углами и др. Наиболее широкие условия геометрического характера, достаточные для того, чтобы область g являлась областью Смирнова, получены Г. Ц. Тумаркиным.

В. И. Смирнов показал, что области типа S можно характеризовать также следующим образом. Для того чтобы в классе E_1 функций, аналитических в g и представимых в g интегралом Коши, из неравенства $|f(z)| \leq M$, справедливого почти всюду на γ , всегда следовало, что всюду в g $|f(z)| \leq M$, необходимо и достаточно, чтобы g была областью типа S .

Пример области g со спрямляемой границей, не удовлетворяющей условию Смирнова, был построен в 1937 г. М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым. Построенная ими область обладает, в частности, тем свойством, что при ее отображении на круг любая дуга границы области переходит в дугу окружности этой же длины. Тем самым были установлены основные факты, относящиеся к полноте системы многочленов z , ортонормированных по спрямляемому контуру без веса.

Вопросы среднего квадратичного приближения многочленами на кривых при наличии весовой функции впервые рассматривал Г. Сеге в 1921 г. Им было установлено необходимое и достаточное условие, которое налагается на функцию $h(z)$ и обеспечивает аппроксимацию вида

$$\inf_{\{p(z)\}} \int_{-1}^1 h(z) |f(z) - p(z)|^2 ds = 0$$

в классе $L_2(|z| = 1, h)$ функций $f(z)$, интегрируемых с квадратом модуля при весе $h(z)$ на единичной окружности. Это условие заключается в расходимости интеграла

$$\int_{|z|=1} \ln h(z) dz.$$

Интересно проявляется в этой постановке связь между полнотой и компактностью. Оказывается, что для полноты системы многочленов с весом $h(z)$ на окружности $|z| = 1$ необходимо и достаточно, чтобы $M_h(z) = \infty$, $|z| \neq 1$, где $M_h(z) = \sup |p(z)|$ в классе всех многочленов $p(z)$, подчиненных условию

$$\int_{|z|=1} h(z) |p(z)|^2 ds \leq 1.$$

При этом в случае неполноты указанное семейство полиномов равномерно ограничено на каждом замкнутом подмножестве вида $|z| \leq \rho < 1$, т. е. компактно внутри единичного круга.

Пусть γ — произвольная замкнутая спрямляемая жорданова кривая, s — длина дуги кривой γ , отсчитываемая от некоторой фиксированной точки этой кривой, $\sigma(s)$ — неубывающая функция ограниченной вариации на γ . Более общий вопрос заключается в выяснении условий, которые надо наложить на $\sigma(s)$ для того, чтобы соотношение

$$\inf_{\{p(z)\}} \int_{\gamma} |f(z) - p(z)|^p d\sigma(s) = 0$$

выполнялось для любой функции $f(z)$ класса $L_p(\gamma, d\sigma)$:

$$\int_{\gamma} |f(z)|^p d\sigma(s) < \infty, \quad p > 0.$$

Для случая, когда γ — единичная окружность, ответ на этот вопрос был получен А. Н. Колмогоровым и М. Г. Крейном при $p = 2$, Н. И. Ахиезером — при $p \geq 1$ и Г. Ц. Тумаркиным — при любом $p > 0$; условие заключается в том, чтобы

$$\int_{|z|=1} \ln \sigma'(s) ds = -\infty.$$

Для спрямляемых кривых γ общего вида соответствующий вопрос рассматривался в работах В. И. Смирнова, П. П. Коровкина и других советских математиков в связи с изучением многочленов, ортогональных на спрямляемых кривых. В. И. Смирнов и П. П. Коровкин охарактеризовали класс аналитических в области g функций, граничные значения которых допускают приближение в среднем степени $p = 2$ с весом; на вес налагались некоторые ограничения. Менее полные результаты были получены в случае $p \neq 2$. Я. Л. Геронимус установил необходимое и достаточное условие полноты системы многочленов в пространстве $L_p(\gamma, d\sigma)$ при $p \geq 1$.

Наиболее полные результаты в рассматриваемом направлении принадлежат Г. Ц. Тумаркину. Им получена исчерпывающая характеристика замыкания системы многочленов в пространстве $L_p(\gamma, d\sigma)$ при любом $p > 0$. Для полноты системы многочленов в пространстве $L_p(\gamma, d\sigma)$, где $p > 0$ — любое число, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{\gamma} \ln \sigma'(s) |\varphi'(z) dz| = -\infty,$$

где $\varphi(z)$ — функция, конформно отображающая область g на единичный круг $|w| < 1$. Если это условие не выполнено, то замыканию системы многочленов в $L_p(\gamma, d\sigma)$ принадлежат те и только те функции этого пространства, которые почти всюду на γ совпадают с граничными значениями аналитических в g функций определенного класса. Г. Ц. Тумаркин исследовал также возможное поведение в области g многочленов, сходящихся к данной функции $f(z)$ в пространстве $L_p(\gamma, d\sigma)$, $p > 0$. В случае неполноты соответствующая последовательность равномерно сходится внутри g к аналитической функции, о которой говорилось выше. В случае полноты для любой функции $f(z) \in L_p(\gamma, d\sigma)$ и любой аналитической в области g функции $F(z)$ найдется последовательность многочленов z , сходящаяся в пространстве $L_p(\gamma, d\sigma)$ к функции $f(z)$ и равномерно внутри g к функции $F(z)$.

Задачу о полноте системы многочленов естественно рассматривать и для неограниченных кривых. Пусть Γ — жорданова кривая (в расширенной комплексной плоскости), которая начинается и оканчивается в бесконечно удаленной точке и каждая ограниченная часть которой спрямляема. Вопрос ставится так: с какой скоростью должна убывать функция $h(r)$ при $r \rightarrow \infty$ для того, чтобы соотношение

$$\inf_{\{p(z)\}} \int_{\Gamma} h(|z|) |f(z) - p(z)|^2 ds = 0$$

выполнялось в классе всех функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{\Gamma} h(|z|) |f(z)|^2 ds < \infty.$$

Результаты, полученные в этом направлении, вполне аналогичны рассмотренным выше соответствующим результатам для случая равномерных приближений с весом на неограниченных кривых.



Г. Ц. Тумаркин.

6

Полнота систем аналитических функций

Остановимся на результатах, относящихся к вопросам равномерного приближения внутри области посредством различных систем аналитических функций.

Пусть D — область в комплексной плоскости, $\{f_\alpha(z)\}$ — произвольная система функций, аналитических в D . Будем говорить, что система $\{f_\alpha(z)\}$ полная в области D (в смысле равномерной сходимости внутри D), если для любой аналитической в D функции $f(z)$, любого ограниченного замкнутого множества $E \subset D$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется линейная комбинация

$$\mathcal{P}(z) = a_1 f_{\alpha_1}(z) + \dots + a_n f_{\alpha_n}(z)$$

такая, что

$$|f(z) - \mathcal{P}(z)| < \varepsilon, \quad z \in E.$$

В дальнейшем будем предполагать, что D — односвязная область (в конечной плоскости).

Исчерпывающее решение вопроса о полноте (в указанном смысле) системы многочленов от z (или, что то же самое, системы степеней $\{z^n\}$, $n = 0, 1, \dots$) дает классическая теорема Рунге (см. § 1). Теорему Рунге можно сформулировать так: система многочленов от z полная в произвольной односвязной области D . Аналогично можно сформулировать и теорему Рунге о равномерном приближении аналитических функций рациональными; в этом случае область уже не обязательно должна быть односвязной. Рассмотрим результаты, относящиеся к вопросам полноты систем аналитических функций, которые не являются, вообще говоря, многочленами или рациональными функциями от z .

Первый результат в этом направлении был получен Карлеманом в 1923 г. Карлеман рассмотрел систему степеней

$$z^{\lambda_1}, z^{\lambda_2}, \dots, z^{\lambda_n}, \dots,$$

где $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Он показал, что эта система полная в любом угле с вершиной в начале координат, имеющем раствор $2\pi d$, где

$$d = \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln R} \cdot \sum_{\lambda_k < R} \frac{1}{\lambda_k}.$$

В частности, для систем $\{z^{2n}\}$ и $\{z^{2n+1}\}$ $d = \frac{1}{2}$; следовательно, системы четных и нечетных степеней z полные в любой полуплоскости, ограниченной прямой, проходящей через начало координат. Очевидно, что эти системы уже не будут полными в любом угле, имеющем раствор больше π .

При доказательстве своей теоремы Карлеман основывался на следующем критерии полноты: для того чтобы система $\{f_n(z)\}$, $n = 1, 2, \dots$

$\{f_n(z)\}$ — аналитические функции в односвязной области D) была полной в D , необходимо и достаточно, чтобы из равенств

$$\int_L q(z) f_n(z) ds = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где L — любой замкнутый контур из D , а $q(z)$ — функция с интегрируемым квадратом на L , следовало, что функция $q(z)$ равна нулю почти всюду на L . Для системы $\{z^{\lambda_n}\}$ соответствующие равенства имеют вид

$$\int_L q(z) z^{\lambda_n} ds = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

откуда следует, что целая функция

$$F(\lambda) = \int_L q(z) z^\lambda ds$$

обращается в нуль в точках $\lambda = \lambda_n, n = 1, 2, \dots$. Условия теоремы позволяют вывести отсюда, что $F(\lambda) \equiv 0$; наконец, на основании того, что $F(n) = 0$ и система $\{z^n\}$ полная в D , снова используя критерий, получаем равенство $q(z) = 0$ почти всюду на L . Это доказывает теорему Карлемана.

Заметим, что результат Карлемана можно сформулировать в терминах полноты системы $\{e^{\lambda_n z}\}$ в полосе ширины $2\pi d$, параллельной вещественной оси.

В свое время результат Карлемана не привлек внимания математиков. Вопросы полноты различных систем аналитических функций начали усиленно разрабатывать после появления в 1938 г. работы А. О. Гельфонда, посвященной этой проблематике. Применяв интерполяционный метод, А. О. Гельфонд получил результаты о полноте в той или иной области системы функций вида

$$f(\lambda_0 z), \quad f(\lambda_1 z), \quad \dots, \quad f(\lambda_n z), \quad \dots,$$

где $f(z)$ — фиксированная аналитическая (в частности, целая) функция, а $\{\lambda_n\}$ — заданная последовательность, вообще говоря, комплексных чисел.

Идея метода Гельфонда состоит в следующем. Для функции $f(z)$ как функции переменного t запишем интерполяционную формулу Ньютона

$$f(zt) = \sum_{k=0}^n A_k \omega_k(t) + R_n(z, t), \quad \omega_k(t) = (t - \lambda_0) \dots (t - \lambda_{k-1}),$$

где

$$A_k = \sum_{s=0}^k \frac{f(\lambda_s z)}{\omega'_{k+1}(\lambda_s)}, \quad R(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\omega_{n+1}(t)}{\omega_{n+1}(\zeta)} \cdot \frac{f(z\zeta) d\zeta}{\zeta - t}$$

и C — окружность с центром в начале координат, внутри которой лежат все точки $\lambda_0, \dots, \lambda_n$. Дифференцируя p раз по переменному t выражение

для $f(zt)$ и полагая $t = 0$, получаем

$$z^p f^{(p)}(0) - \sum_{k=0}^n A_k \omega_k^{(p)}(0) = R_n^{(p)}(z, 0).$$

Сумма, стоящая в левой части последнего равенства, представляет собой линейную комбинацию первых n функций системы $f(\lambda_k z)$. При определенных условиях удастся показать, что правая часть этого равенства стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. В предположении, что $f^{(p)}(0) \neq 0$, отсюда следует возможность равномерного приближения внутри области степеней z^p посредством линейных комбинаций функций системы $\{f(\lambda_k z)\}$, а значит и полнота системы $\{f(\lambda_k z)\}$.

Сформулируем один из результатов А. О. Гельфонда, полученных этим методом. Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ_1 и типа $\sigma_1 > 0$, $f^{(n)}(0) \neq 0$, $n = 0, 1, \dots$; пусть числа λ_n таковы, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} = \sigma.$$

Если $\rho_1 < \rho$, то система $\{f(\lambda_n z)\}$ полная во всей плоскости; если $\rho_1 = \rho$, то эта система полная в круге

$$|z| < R = \left(\frac{\sigma}{\rho \sigma_1} \cdot 2^{1-\rho} \int_0^1 \frac{dx}{2 - x^{\frac{1}{\rho}}} \right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Заметим, что R возрастает с возрастанием σ ; при $\sigma = \infty$ и $R = \infty$. В частности, применяя этот результат к функции $f(z) = e^z$ (в этом случае $\rho_1 = \sigma_1 = 1$), устанавливаем, что если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|} = \infty,$$

то система $\{e^{\lambda_n z}\}$ полная во всей плоскости.

Исследование проблем полноты получило дальнейшее продвижение в работах (1943, 1945 гг.) А. И. Маркушевича. Сочетая методы теории функций и функционального анализа, А. И. Маркушевич установил общий критерий полноты (названный им принципом двойственности), который автоматически позволяет получать из теорем единственности для аналитических функций теоремы полноты и наоборот. Остановимся на этом критерии.

Пусть E_R , где $0 < R \leq \infty$, — совокупность всех функций, аналитических в круге $|z| < R$. Положим

$$\omega(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}}, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = c < R.$$

Функция $\omega(t)$ аналитическая при $|t| > c$, $\omega(\infty) = 0$. Выражение

$$L(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=c} \omega(z) f(z) dz, \quad c < \rho < R,$$

определяет линейный функционал в пространстве E_R . Верно и обратное утверждение: любой линейный функционал в пространстве E_R представляется в виде такого интеграла.

Пусть $F(z, t)$ — функция двух комплексных переменных, аналитическая по совокупности этих переменных в области $|z| < R, |t| < P$. Разлагая ее в ряд по степеням t , получаем

$$F(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n(z) \cdot t^n, \quad |t| < P,$$

где $\mathcal{P}_n(z)$ ($n = 0, 1, \dots$) — аналитические функции в круге $|z| < R$.

Линейные функционалы в пространствах E_R и E_P будем в дальнейшем обозначать соответственно L и Λ . Рассмотрим последовательность Λ_n , $n = 0, 1, \dots$, линейных функционалов в E_P . Имеем

$$\Lambda_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r_n} \omega_n(t) \varphi(t) dt, \quad q_n < |t| < P,$$

где

$$\omega_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m^{(n)}}{t^{m+1}}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|a_m^{(n)}|} = q_n < P.$$

Положим

$$f_n(z) = \Lambda_n[F(z, t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r_n} \omega_n(t) F(z, t) dt, \quad n = 0, 1, \dots$$

А. И. Маркушевич исследует вопрос о полноте системы $\{f_n(z)\}$ в классе функций, допускающих равномерное приближение внутри круга $|z| < R$ посредством линейных комбинаций функций системы $\{\mathcal{P}_n(z)\}$. Точнее, пусть A_R — совокупность всех таких функций, B_R — совокупность всех функций, допускающих равномерное приближение внутри круга $|z| < R$ посредством линейных комбинаций функций системы $\{f_n(z)\}$. Поскольку

$$f_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(n)} \mathcal{P}_m(z), \quad |z| < R, \quad n = 0, 1, \dots,$$

и ряд равномерно сходится внутри круга $|z| < R$, класс B_R содержится в классе A_R . Система $\{f_n(z)\}$ называется относительно полной в классе A_R , если $B_R = A_R$. Наибольший интерес представляет случай, когда $A_R = E_R$; в этом случае относительная полнота означает полноту системы $\{f_n(z)\}$ в круге $|z| < R$ в обычном смысле.

Чтобы сформулировать критерий Маркушевича, введем еще одно понятие. Пусть Ω — совокупность функций вида

$$\varphi(t) = L_z[F(z, t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \omega(z) F(z, t) dz, \quad c < r < R.$$

Будем говорить, что последовательность линейных функционалов $\{\Lambda_n\}$ пространства E_P обладает свойством относительной единственности

на Ω , если из того, что $\varphi(t) \in \Omega$ и $\Lambda_n(\varphi) = 0, n = 0, 1, \dots$, следует, что $\varphi(t) \equiv 0$.

Принцип двойственности А. И. Маркушевича заключается в следующем: система функций $\{f_n(z)\} = \{\Lambda_n[F(z, t)]\}$ является относительно полной в A_R тогда и только тогда, когда система функционалов $\{\Lambda_n\}$ обладает свойством относительной единственности на Ω .

Рассмотрим два конкретных примера. Пусть

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

является целой функцией порядка ρ , типа $\sigma \neq 0, \infty$ и

$$F(z, t) = \psi(zt), \quad |z| < R, \quad |t| < P = \infty.$$

В этом случае $\mathcal{P}_n(z) = a_n z^n$. Пусть $a_n \neq 0$ для $n = k_1, k_2, \dots$ и только для этих n . Тогда класс A_R состоит из аналитических в круге $|z| < R$ функций, представимых в виде

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{k_n}.$$

В качестве Λ_n рассмотрим функционалы $\Lambda_n(\varphi) = \varphi(\lambda_n), n = 0, 1, \dots$, где $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ — некоторая последовательность комплексных чисел. Имеем

$$f_n(z) = \Lambda_n[F(z, t)] = \psi(\lambda_n z), \quad n = 0, 1, \dots$$

Для функции $\varphi(t)$ из Ω справедливы равенства

$$\Lambda_n(\varphi) = \varphi(\lambda_n), \quad \varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \omega(z) \psi(zt) dz, \quad c < r < R.$$

Из принципа двойственности вытекает: для того чтобы система $\psi(\lambda_n z)$ была относительно полной в A_R , необходимо и достаточно, чтобы из равенств $\varphi(\lambda_n) = 0, n = 0, 1, \dots$, следовало $\varphi(\lambda) \equiv 0$. Вопрос о полноте сводится к теоремам единственности для аналитических функций. Известно, что если $F(z)$ — целая функция порядка ρ_1 и типа σ_1 , $F(z) \not\equiv 0$ и $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — ее нули, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|^{\rho_1}} \leq \sigma_1 \rho_1.$$

Функция $\varphi(\lambda)$ растет медленнее целой функции порядка ρ и типа σR^ρ . Поэтому, если $\varphi(\lambda_n) = 0$, причем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} \geq \sigma \rho R^\rho,$$

то $\varphi(\lambda) \equiv 0$. Следовательно, если выполнено последнее условие, то система $\psi(\lambda_n z)$ полная в A_R . В частности, система

$$\{e^{\lambda_n z}\}, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|} = \infty,$$

полная на всей комплексной плоскости — в пространстве $E_R, R = \infty$.

Пусть теперь $F(z, t) = \psi(z + t)$, $\psi(z)$ — целая функция и $\Lambda_n(\varphi) = \varphi(\lambda_n)$. Будем считать, что $|z| < R = \infty, |t| < P = \infty$. Имеем $\mathcal{P}_n(z) = \psi^{(n)}(z)$ и $\varphi(t) \in \Omega$,

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \omega(z) \psi(z+t) dz, \quad c < r < R,$$

$\varphi(t)$ — целая функция. Если последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет по крайней мере одну конечную предельную точку, то из условий $\Lambda_n(\varphi) = \varphi(\lambda_n) = 0$ вытекает, что $\varphi(\lambda) \equiv 0$. Следовательно, система $\{\psi(z + \lambda_n)\}$ полная в A_R . Отсюда, в свою очередь, вытекает, что системы $\{\psi^{(n)}(z)\}$ и $\{\psi(z + \lambda_n)\}$ полные или неполные в E_R одновременно.

Отметим еще одно следствие теоремы Маркушевича. Для того чтобы система $\{f_n(z)\}$ была полной в круге $|z| < R$, необходимо и достаточно, чтобы из условий

$$\int_{|z|=r} \omega(z) f_n(z) dz = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad c < r < R,$$

где

$$\omega(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{z^{m+1}}, \quad \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|c_m|} = c < R,$$

следовало $\omega(z) \equiv 0$.

Б. Я. Левин установил аналогичную теорему для произвольной односвязной области D .

Последнюю теорему можно сформулировать также в терминах решений бесконечной системы линейных уравнений.

Для полноты системы $\{f_n(z)\}$,

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} z^k, \quad n = 0, 1, \dots,$$

в круге $|z| < R$ необходимо и достаточно, чтобы система

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} c_k = 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

в классе

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} < R$$

имела единственное решение $c_k = 0, k = 0, 1, \dots$

Этот критерий был установлен исходя из других соображений также М. Г. Хаплановым, использовавшим его при исследовании конкретных систем.

Отмеченные критерии полноты вместе с теми или иными теоремами единственности для аналитических функций применялись для исследования полноты различных систем $\{f(\lambda_n z)\}$, $\{f^{(n)}(z)\}$, $\{f(z + \lambda_n)\}$ и других видов И. И. Ибрагимовым, Б. Я. Левиным, А. Ф. Леонтьевым, И. Ф. Лохиным, Ю. А. Казьминым и др.

Остановимся на задаче, рассмотренной А. Ф. Леонтьевым. Пусть система $\{f_n(z)\}$ полная во всей плоскости и $F(z)$ — целая функция. Тогда существует последовательность линейных комбинаций $\mathcal{P}_n(z)$ функций рассматриваемой системы, которая сходится к $F(z)$ на всей плоскости, равномерно на любом ограниченном множестве. Ясно, что такая последовательность не единственна; существует бесконечное множество различных последовательностей $\{\mathcal{P}_n(z)\}$, каждая из которых сходится к одной и той же функции $F(z)$. Задача состоит в том, чтобы из всех таких последовательностей выбрать последовательность $\mathcal{P}_n(z)$, имеющую в некотором смысле наименьший рост.

Чтобы уточнить постановку задачи, введем понятие порядка последовательности. Число ρ называется порядком последовательности $\mathcal{P}_n(z)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $r_0(\varepsilon)$, не зависящее от n , такое, что выполняется неравенство

$$|\mathcal{P}_n(z)| < \exp(|z|^{\rho+\varepsilon}), \quad |z| > r_0(\varepsilon), \quad n = 1, 2, \dots,$$

и не существует меньшего числа ρ с таким свойством. Например, последовательность многочленов

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

имеет порядок $\rho = 1$ (хотя каждый из многочленов имеет порядок, равный нулю).

Теперь задачу можно сформулировать более точно: среди последовательностей $\{\mathcal{P}_n(z)\}$, сходящихся к $F(z)$, выбрать последовательности с наименьшим порядком и оценить этот порядок. А. Ф. Леонтьев получил решение этой задачи в случае системы $\{f(\lambda_n z)\}$. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

$a_n \neq 0$ — целая функция порядка ρ и $\{\lambda_n\}$ — последовательность комплексных чисел, такая, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|^{\rho_1}} = \infty, \quad \rho_1 > \rho.$$

Из указанных выше результатов А. О. Гельфонда и А. И. Маркушевича вытекает, что при этих условиях система $\{f(\lambda_n z)\}$ полная во всей плоскости. Пусть $F(z)$ — целая функция порядка ω . Используя интерполя-

ционный метод Гельфонда, Леонтьев показал, что существует последовательность

$$\mathcal{P}_n(z) = \sum_{k=1}^{p_n} a_{n,k} f(\lambda_k z), \quad n = 1, 2, \dots,$$

которая сходится к $F(z)$ и порядок которой не превосходит величину

$$\max \left\{ \omega, \frac{\rho_1 \rho}{\rho_1 - \rho} \right\}.$$

При этом указанная граница, вообще говоря, не может быть понижена.

М. А. Евграфов предложил общий подход, позволяющий исследовать полноту систем аналитических функций, «близких» к системе степеней $\{z^n\}$ (или к какой-либо другой системе, полнота которой заранее известна). В основе рассуждений лежит использование интегральных уравнений в комплексной плоскости.

Пусть $K(z, t)$ — ядро, аналитическое в области $|z| < R$, $|t| > r$, $r < R$. Рассмотрим оператор

$$L(F) \equiv \Phi(z) = F(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_C K(z, t) F(t) dt,$$

где $F(z)$ — функция, аналитическая в круге $|z| < R$, C — окружность $|t| = \rho$, $r < \rho < R$. Оператор $L(F)$ отображает пространство функций, аналитических в круге $|z| < R$, в себя; легко видеть, что это отображение непрерывно (в топологии, порождаемой равномерной сходимостью внутри круга $|z| < R$). Если окажется, что оператор $L(F)$ непрерывно обратим (любой функции $\Phi(z)$, аналитической в $|z| < R$, соответствует единственное решение интегрального уравнения, аналитическое в этом же круге, причем обратное отображение также непрерывно), то очевидно, что соответствующие друг другу системы $\{F_n(z)\}$ и $\{\Phi_n(z)\}$ будут одновременно полными или неполными в круге $|z| < R$. Следовательно, если заранее известно, что система $\{F_n(z)\}$ полная, то полная и система $\{\Phi_n(z)\}$.

М. А. Евграфов, в частности, показал, что если

$$K(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(z)}{t^{n+1}},$$

$$\varepsilon_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{n,k} z^k, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\varepsilon_{n,k}| R^{k-n} < 1,$$

то соответствующий оператор $L(F)$ непрерывно обратим в любом круге $|z| < r$, $r < R$. В этом случае функциям $F_n(z) = z^n$ соответствуют функции $\Phi_n(z) = z^n + \varepsilon_n(z)$. Поскольку система $\{z^n\}$ полная в $|z| < R$, то и близкая к ней система $\{z^n + \varepsilon_n(z)\}$ полная в этом круге; при этом близость характеризуется условием, наложенным на $\varepsilon_{n,k}$ выше. Приведенный подход носит весьма общий характер и применим не только в случае круга $|z| < R$.

Ближкие по идее рассуждения применял Б. Я. Левин для установления полноты системы решений дифференциального уравнения 2-го



А. Ф. Леонтьев.

порядка. Рассмотрим уравнение

$$y'' + P(x)y = \lambda^2 y,$$

где λ — параметр, а функция $P(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0, \alpha]$ действительной оси. Пусть $f(x)$ — решение этого уравнения, а $\varphi(x)$ — решение уравнения $y'' = \lambda^2 y$, удовлетворяющие в точке $x = 0$ одним и тем же начальным условиям. Тогда справедливо соотношение

$$f(x) = \varphi(x) + \int_{-x}^x K(x, q) \varphi(q) dq,$$

где $K(x, q)$ — функция, непрерывная в области $x \in [0, \alpha]$, $q \in [-x, x]$ и не зависящая от $f(x)$.

Б. Я. Левин доказал, что если $P(x)$ — целая функция, то ядро $K(x, q)$ — целая функция комплексных переменных x и q ; оператор, определяе-

мый последним соотношением, является оператором Вольтерра, он непрерывно обратим в любой односвязной области D , симметричной относительно начала. Систему функций $\{\varphi_n(x)\}$, полную в такой области D , он переводит в систему функций $\{f_n(x)\}$, также полную в D . Например, система $\{\varphi_n(x) = e^{\lambda_n x}\}$, где $\lambda_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = \sigma$, полная в полосе $|\operatorname{Im} x| < \pi\sigma$ (что следует уже из теоремы Карлемана). Поэтому в полосе $|\operatorname{Im} x| < \pi\sigma$ будет полной и система $\{f_n(x) = y(x, \lambda_n)\}$, где $y(x, \lambda_n)$ — решение уравнения $y'' + P(x)y = \lambda_n^2 y$, соответствующее начальным условиям $y(0, \lambda_n) = 1$, $y'(0, \lambda_n) = \lambda_n$.

Эти рассуждения справедливы не только в том случае, когда $P(x)$ — целая функция. А. Ф. Леонтьев показал, что если коэффициент $P(x)$ является аналитической функцией в области G , выпуклой и симметричной относительно начала, то ядро $K(x, g)$ является аналитической функцией в области $x \in G$, $q \in G$. Поэтому предыдущие выводы справедливы (для областей D , содержащихся в G) и в данном случае.

Если система $\{f_n(z)\}$ неполная в области D , то возникает вопрос о характеристике тех функций $\mathcal{P}(z)$, $z \in D$, которые представимы равномерно сходящимися внутри D последовательностями линейных комбинаций вида

$$\mathcal{P}_n(z) = \sum_{k=1}^{p_n} a_{n,k} f_k(z), \quad n = 1, 2, \dots$$

Общие свойства таких последовательностей и их предельных функций изучаются обычно с помощью некоторых функциональных уравнений, которым они удовлетворяют. При этом проблема разбивается на две:

первая состоит в построении по заданной системе $\{f_n(z)\}$ соответствующего функционального уравнения, вторая — в изучении свойств общего решения этого уравнения.

А. Ф. Леонтьев исследовал с этой точки зрения классическую систему $\{e^{\lambda_n z}\}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — комплексные числа, удовлетворяющие условию $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|}} = \sigma < \infty$ (выше отмечалось, что при $\sigma = \infty$ система $\{e^{\lambda_n z}\}$ полная во всей плоскости). В этом случае соответствующая последовательность $\mathcal{P}_n(z)$ является последовательностью полиномов Дирихле:

$$\mathcal{P}_n(z) = \sum_{k=1}^{p_n} a_{n,k} e^{\lambda_k z}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Обозначим через $L(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ какую-нибудь целую функцию экспоненциального типа, обращающуюся в нуль в точках $z = \lambda_n, n = 1, 2, \dots$; в качестве $L(z)$ можно взять, например, функцию $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$. Тогда функциональным уравнением, о котором говорилось выше, будет уравнение

$$M(y) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k y^{(k)}(z) = 0.$$

В самом деле, частными решениями этого уравнения являются функции $e^{\lambda_n z}, n = 1, 2, \dots$. Основываясь на этом, можно показать, что если функция $L(z)$ растет не быстрее функции 1-го порядка типа τ , а последовательность $\mathcal{P}_n(z)$ полиномов Дирихле равномерно сходится в круге $|z - z_0| < R$, то предельная функция $\mathcal{P}(z)$ этой последовательности удовлетворяет уравнению $M(y) = 0$ в достаточно малой окрестности точки z_0 .

Отметим некоторые свойства решений полученного дифференциального уравнения бесконечного порядка. Пусть это уравнение порождено характеристической функцией

$$L(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$$

1-го порядка типа $\tau \leq \lambda\sigma$. Положим

$$L_n(z) = \prod_{k=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)$$

и обозначим через $M_n(y)$ соответствующий этой функции оператор типа $M(y)$.

Пусть A_p — множество точек, принадлежащих области аналитичности функции $\mathcal{P}(z)$ вместе со своей $\lambda\sigma$ -окрестностью, A_{p,z_0} — связная компонента множества A_p , содержащая точку z_0 (мы предполагаем, что

последовательность $\mathcal{P}_n(z)$ равномерно сходится в круге $|z - z_0| < R$, $R > \rho\sigma$, и, следовательно, точка z_0 принадлежит A_P). Оказывается, что

$$M_n(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n a_k L_n(\lambda_k) e^{\lambda_k z}, \quad z \in A_{P, z_0},$$

где $a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,k}$ (пределы существуют). Левая часть последнего равенства при $n \rightarrow \infty$ стремится к функции $\mathcal{P}(z)$. Следовательно,

$$\mathcal{P}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k L_n(\lambda_k) e^{\lambda_k z}, \quad z \in A_{P, z_0}.$$

Это представление можно рассматривать как способ суммирования ряда, который ставится в соответствие функции $\mathcal{P}(z)$ по правилу

$$\mathcal{P}(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z};$$

при этом сам ряд может расходиться всюду на плоскости.

Если все $a_k = 0$, то $\mathcal{P}(z) \equiv 0$. Например, если $\lambda_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, и функция $\mathcal{P}(z)$ аналитическая и ограничена в полосе $|\operatorname{Im}(z - z_0)| < R$, $R > \rho\sigma$, то в точках прямой $\operatorname{Im}(z - z_0) = 0$ выражение $|M_n(\mathcal{P})|$ ограничено при каждом n . Последнее возможно только в случае, когда все $a_k = 0$. Отсюда следует теорема типа теоремы Лиувилля: если предельная функция последовательности полиномов Дирихле $\mathcal{P}_n(z)$, равномерно сходящейся в круге $|z - z_0| < R$, $R > \rho\sigma$, аналитическая и ограничена в полосе $|\operatorname{Im}(z - z_0)| < R$, то $\mathcal{P}(z) \equiv 0$. В этой теореме условие ограниченности функции $\mathcal{P}(z)$ в полосе можно ослабить, заменив его требованием, чтобы функция $\mathcal{P}(z)$ в указанной полосе росла при $\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty$ не быстрее $|e^{\mu z}|$, где $0 < \mu < \lambda_1$.

Отметим, наконец, одно из свойств самой последовательности полиномов Дирихле $\mathcal{P}_n(z)$. Если эта последовательность сходится в круге $|z - z_0| < R$, $R > \rho\sigma$ и $\lambda_n > 0$, то она необходимо сходится и в некоторой бесконечной области G , содержащей область $\{x < -t_0, y < e^{-\alpha x}\}$ при любом α , $0 < \alpha < \frac{1}{\sigma}$, и любом достаточно большом $t_0 > 0$. Все эти результаты принадлежат А. Ф. Леонтьеву.

А. О. Гельфонд применил другой метод для представления и исследования решений дифференциального уравнения $M(y) = 0$. Положив

$$Q(z, q) = \sum_{|\lambda_k| < q} a_k e^{\lambda_k z}$$

(справа стоит частная сумма формального разложения функции $\mathcal{P}(z)$, отмеченного выше), он нашел представление и оценку разности $\mathcal{P}(z) - Q(z, q)$. Из этой оценки вытекает, что если на некоторой системе окружностей $|z| = q_n$ ($q_1 < q_2 < \dots < q_n \rightarrow \infty$) функция $L(z)$ допускает оценку снизу, например

$$|L(z)| > e^{-l|z|},$$

то в некоторой области $Q(z, q_n) \rightarrow \mathcal{P}(z)$; другими словами, к функции $\mathcal{P}(z)$ сходится некоторая последовательность частных сумм ее формального разложения.

Все указанные результаты формулируются в более законченной форме для случая, когда $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ положительны и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = \sigma$.

Аналогичные методы применимы и к исследованию систем $\{f_n(z)\}$ в более общем случае, когда $f_n(z) = f(\lambda_n z)$, $f(z)$ — целая функция, $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — последовательность комплексных чисел. Если $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ — целая функция конечного порядка ρ нормального типа τ , причем $a_n \neq 0$, $n = 0, 1, \dots$, то предполагается, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|} = (\tau \rho)^{\frac{1}{\rho}} > 0, \quad \underline{\tau} \leq \tau.$$

и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} = \sigma < \infty$$

(эти условия связаны с тем, что при $\underline{\tau} = 0$ система $\{f(\lambda_n z)\}$ может оказаться полной во всей плоскости, а при $\sigma = \infty$ она всегда будет таковой). Не останавливаясь на конкретных результатах, приведем только функциональное уравнение, которому в рассматриваемом случае удовлетворяет функция $\mathcal{P}(z)$, предельная для последовательности линейных комбинаций функций системы $\{f(\lambda_n z)\}$. Это уравнение сначала было получено А. Ф. Леонтьевым в интегральной форме. Затем в совместной работе А. О. Гельфонда и А. Ф. Леонтьева оно было истолковано как уравнение бесконечного порядка в обобщенных производных.

Если $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, то обобщенной производной в смысле Гельфонда — Леонтьева функции $F(z)$ (относительно $f(z)$) называется выражение

$$D_f^m F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+m} \frac{a_k}{a_{k+m}} z^k.$$

Если $f(z) = e^z$, то обобщенные производные совпадают с обычными. Отметим, что при любом λ $D_f^m f(\lambda z) = \lambda^m f(\lambda z)$.

Пусть $L(z)$ — целая функция порядка ρ конечного типа, обращающаяся в нуль в точках λ_n , $n = 1, 2, \dots$, например

$$L(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^m}{\lambda_k^m}\right),$$

где m — целое, $m > \rho$. Искомым функциональным уравнением является уравнение

$$M(y) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k D_f^k y = 0.$$

Если последовательность

$$\mathcal{P}_n(z) = \sum_{k=1}^{P_n} a_{n,k} f(\lambda_k z), \quad n = 1, 2, \dots,$$

равномерно сходится в круге

$$|z| < R, \quad R > \left(\frac{\pi\sigma}{\tau \sin \frac{\pi\varphi}{m}} \right)^{\frac{1}{\rho}},$$

то предельная функция $\mathcal{P}(z)$ в достаточно малой окрестности начала удовлетворяет последнему уравнению.

Дифференциальные уравнения бесконечного порядка в обобщенных производных изучались в дальнейших работах. Аналогичные уравнения построены и для некоторых других систем аналитических функций.

Мы рассмотрели вопрос о возможности представления аналитических функций в виде пределов последовательностей линейных комбинаций функций той или иной системы $\{f_n(z)\}$, в первую очередь системы $\{e^{\lambda_n z}\}$. Во многих исследованиях изучались также ряды по соответствующим системам, главным образом ряды Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}.$$

В целом эти исследования стоят в стороне от рассматриваемого нами круга вопросов. Поэтому остановимся только на некоторых результатах А. Ф. Леонтьева по вопросу о представлении произвольных аналитических функций рядами типа Дирихле, полученных в 1964—1966 гг.

Рассмотрим ряд Дирихле

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad \lambda_1 \neq 0, \quad |\lambda_n| \uparrow \infty,$$

где λ_n , вообще говоря, — комплексные числа, удовлетворяющие условию $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{|\lambda_n|} = 0$. Известно, что при этом условии открытая область сходимости ряда совпадает с открытой областью его абсолютной сходимости. Вопрос ставится так: существует ли область D , в которой произвольная функция $f(z)$, аналитическая в D или $\bar{D}$, разлагается в ряд Дирихле рассматриваемого вида. Этот вопрос принципиально отличен от вопроса о полноте системы $\{e^{\lambda_n z}\}$ в области D . В частности, если λ_n расположены на одном луче (например, $\lambda_n > 0$) или двух лучах, ответ на этот вопрос отрицательный (хотя полнота при этом может быть всюду на плоскости). Однако при некоторых $\{\lambda_n\}$ можно указать область D такую, что произвольная аналитическая в $\bar{D}$ функция $f(z)$ допускает разложение в ряд Дирихле, равномерно сходящийся внутри D к $f(z)$. В частности, это возможно уже в случае, когда λ_n определенным образом выбраны на трех лучах. Сформулируем результаты А. Ф. Леонтьева.

Пусть $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа и $h(\varphi)$ — ее индикатриса роста; предположим, что $h(\varphi) > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, и на некоторой системе окружностей $|\lambda| = r_k$, $r_k \uparrow \infty$, справедлива оценка

$$\ln |L(re^{i\varphi})| > [h(\varphi) - \varepsilon]r, \quad r = r_k, \quad \varepsilon > 0, \quad k > K(\varepsilon).$$

Пусть $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с функцией $L(\lambda)$, $\bar{D}$ — наименее выпуклое замкнутое множество, содержащее все особенности функции $\gamma(t)$, D — множество внутренних точек $\bar{D}$. Из условия $h(\varphi) > 0$ следует, что D — непустое множество; оно содержит, например, точку $z = 0$.

Рассмотрим произвольную функцию $f(z)$, аналитическую на $\bar{D}$. Пусть C — выпуклый замкнутый контур, охватывающий $\bar{D}$ и принадлежащий области аналитичности функции $f(z)$. Положим

$$\omega_f(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[f(\xi) (\xi - \eta) e^{\mu\eta} d\eta \right] \gamma(\xi) d\xi;$$

интегрирование по η производится по прямолинейному отрезку, соединяющему точки 0 и ξ . Пусть λ_1, λ_2 — различные нули функции $L(\lambda)$, расположенные в порядке неубывания модулей, $p_1, p_2, \dots$ — их кратности. Если C_ν — замкнутый контур, внутри которого лежит λ_ν и нет других нулей функции $L(\lambda)$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\nu} \frac{\omega_f(\mu) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu = \mathcal{P}_\nu(z) e^{\lambda_\nu z},$$

где $\mathcal{P}_\nu(z)$ — многочлен степени меньшей p_ν .

Основной результат заключается в следующем. В области D справедливо представление

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{r_{k-1} < |\lambda_\nu| < r_k} \mathcal{P}_\nu(z) e^{\lambda_\nu z} \right), \quad r_0 = -1,$$

причем ряд сходится абсолютно и равномерно внутри D . Если все нули λ_n простые и в каждом кольце $r_{k-1} < |\lambda| < r_k$ имеется только по одному нулю, получаем

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad a_n = \frac{\omega_f(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}, \quad z \in D.$$

Последнее представление справедливо, например, если

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^3}{n^3} \right), \quad \{\lambda_n\} = \bigcup_{k=0}^2 \left\{ n e^{\frac{2k\pi i}{3}} \right\};$$

при этом область D является правильным треугольником с вершинами в точках $a e^{\frac{\pi i}{3}}$, $-a$, $a e^{-\frac{\pi i}{3}}$ ($a = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$). Здесь λ_n расположены на трех лучах.

Пусть функция $L(\lambda)$ такова, что в соответствующей области D справедливо представление аналитических функций в виде ряда Дирихле. Из изложенного выше следует, что представление данной функции $f(z)$ не единственно. В самом деле, если, например, $a_1 \neq 0$, то функция $L_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{-1} L(\lambda)$ обладает, как и $L(\lambda)$, всеми необходимыми свойствами, но $L_1(\lambda_1) \neq 0$. Поэтому в области D

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n e^{\lambda_n z}.$$

Отсюда, в частности, следует, что существуют ряды Дирихле с ненулевыми коэффициентами a_n и показателями $\lambda_n \rightarrow \infty$, равномерно сходящиеся внутри некоторой области к функции, тождественно равной нулю.

Заметим, что при формулировке основного результата можно исходить из данной выпуклой замкнутой области $\bar{D}$ — по ней строить функцию $L(\lambda)$ и соответствующее ей разложение для произвольной функции $f(z)$, аналитической в $\bar{D}$.

Приведем еще один результат А. Ф. Леонтьева, относящийся к вопросу о представлении целых функций и близкий по своему характеру к рассмотренному выше.

Пусть $L(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ — целая функция конечного порядка $\rho > 1$, удовлетворяющая следующему условию: имеется система окружностей $|\lambda| = r_k$, $r_k \uparrow \infty$, такая, что $\ln |L(re^{i\varphi})| > r^{\rho-\varepsilon}$, $r = r_k$, $\varepsilon > 0$, $k > K(\varepsilon)$. Пусть, как и выше, $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — различные нули $L(\lambda)$, $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$, $p_1, p_2, \dots$ — их кратности. Для произвольной целой функции $f(z)$ порядка $s < \frac{\rho}{\rho-1}$ положим

$$\omega_f(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n [f^{(n-1)}(0) + \mu f^{(n-2)}(0) + \dots + \mu^{(n-1)} f(0)];$$

нетрудно убедиться в том, что $\omega_f(\mu)$ — целая функция. Исходя из этой функции по тем же формулам, что и выше, строятся выражения $\mathcal{P}_v(z) e^{\lambda_v z}$, $v = 1, 2, \dots$. Справедлива следующая теорема: для целой функции $f(z)$ порядка $s < \frac{\rho}{\rho-1}$ выполняется представление

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z), \quad f_k(z) = \sum_{r_{k-1} < |\lambda_v| < r_k} \mathcal{P}_v(z) e^{\lambda_v z}, \quad r_0 = -1,$$

причем ряд сходится абсолютно и равномерно внутри комплексной плоскости. Более того, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для любых z верна оценка

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^n f_k(z) \right| < C(\varepsilon) \exp(|z|^{p+\varepsilon} - r_n^{\rho-\varepsilon}),$$

$$p = \frac{\rho}{\rho-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для достаточно правильных $L(\lambda)$ получаем разложение функций $f(z)$ в ряд Дирихле.

В работах А. Ф. Леонтьева и его учеников изложенные результаты перенесены на ряды по более общим системам вида $\{f(\lambda_n z)\}$.

Мы рассмотрели далеко не все разделы теории приближений, в развитие которых советские ученые внесли значительный вклад. Из направлений и результатов, не рассмотренных в нашем разделе, в первую очередь отметим следующие:

1) вопросы существования и единственности функций наилучшего приближения, характеристические свойства экстремальных функций в различных задачах теории наилучших приближений (многие работы С. Н. Бернштейна, А. Н. Колмогорова, Н. И. Ахиезера, М. Г. Крейна, С. М. Никольского, и др.);

2) теорию ортогональных многочленов;

3) вопросы точечной сходимости аналитических и гармонических функций (результаты, полученные М. В. Келдышем, М. А. Лаврентьевым, С. Н. Мергеляном).

Функции многих комплексных переменных

1

Интегральные представления

В классической теории голоморфных функций одного комплексного переменного $f(z)$ существенную роль играет интегральная формула Коши, выражающая значения $f(z)$ внутри области D через ее значения на границе ∂D этой области. Обобщением интеграла Коши на случай голоморфных функций многих переменных является интеграл Мартинелли — Бохнера. Полученные интегральные представления существенно отличаются от интеграла Коши. Источником возникновения их явились формула обращения Темлякова

$$f(e^{it}, u) = -\Phi(u, 0, 0) + \int_0^1 \frac{d}{du} \{u [\Phi(\tau u, -i(1-\tau)ue^{-it}, (1-\tau)ue^{-it}) + \\ + \Phi(\tau u, -i(1-\tau)ue^{it}, -(1-\tau)ue^{it})]\} d\tau$$

и формула Уиттекера

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}, u) dt$$

для гармонической функции $\Phi(x, y, z)$, голоморфной в точке $(0, 0, 0)$, где $u = x + i(y \cos t + z \sin t)$. А. А. Темляковым доказаны следующие три теоремы.



А. А. Темляков.

Теорема 1. Если D — ограниченная, полная двоякокруговая область с центром в точке $(0, 0) \in D$, граница которой $\psi(w, \bar{w}, z, \bar{z}) = 0$ дважды непрерывно дифференцируема и аналитически выпукла извне ($L(\psi) > 0$, $L(\psi)$ — определитель Леви), то граница ∂D определяется параметрически уравнениями

$$|w| = r_1(\tau), \quad |z| = r_2(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

где $r_1(\tau)$, $r_2(\tau)$ — единственная пара непрерывных функций, удовлетворяющая условиям

$$r_1(0) = 0, \quad r_1(1) < \infty, \quad r_1'(\tau) > 0,$$

$$r_2(\tau) = R_2 \exp \left[- \int_0^\tau \frac{\tau}{1-\tau} d \ln r_1(\tau) \right]. \quad (117)$$

Обратно: если $r_1(\tau)$ и $r_2(\tau)$ удовлетворяют условиям (117), то существует двойной степенной ряд, для которого величины $r_1 = r_1(\tau)$, $r_2 = r_2(\tau)$ ($0 \leq \tau \leq 1$) являются сопряженными радиусами сходимости, т. е. область $D \ni (0, 0)$, ограниченная гиперповерхностью (117), есть ограниченная, полная двоякокруговая область, граница которой дважды непрерывно дифференцируема и аналитически выпукла извне.

Из интегральных представлений Темлякова для этих областей D с характеристикой

$$0 < \sup_{0 < \tau < 1} \frac{d \ln r_1(\tau)}{d \ln \tau} < \infty$$

наибольшее развитие и приложение получили представления, данные им для функций, голоморфных в двоякокруговых областях с характеристикой

$$0 < \sup_{0 < \tau < 1} \frac{d \ln r_1(\tau)}{d \ln \tau} \leq 1.$$

Эти области характеризуются в «абсолютной четвертьплоскости» ($|w|$, $|z|$) тем, что 1) кривая

$$|w| = r_1(\tau), \quad |z| = r_2(\tau) \quad (0 < \tau < 1) \quad (118)$$

является огибающей прямых

$$\frac{\tau}{r_1(\tau)} |w| + \frac{1-\tau}{r_2(\tau)} |z| = 1, \quad 0 < \tau < 1 \quad (119)$$

(на некоторых участках может и совпадать с прямыми этого семейства), 2) любая прямая из семейства (119) не пересекает кривую (118) и расположена над ней. В работе Л. А. Айзенберга показано, что при наличии строгой аналитической выпуклости ∂D рассматриваемые об-

ласти выпуклы в четырехмерном пространстве переменных (x, y, u, v) , где $z = x + iy$ и $w = u + iv$. Этот класс областей обозначается ¹⁰ (T) .

Теорема 2. Если функция $F(w, z)$ голоморфна в $D \in (T)$ и оператор

$$L_1[F] \equiv F(w, z) + wF'_w + zF'_z$$

непрерывен в замкнутой области $\bar{D}$, то для точек $(w, z) \in D$

$$F(w, z) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_{|\zeta|=1} \frac{f[r_1(\tau)\zeta, r_2(\tau)\zeta e^{-it}]}{\zeta - u} d\zeta, \quad (120)$$

где

$$f(w, z) = L_1[F(w, z)], \quad u = \frac{\tau}{r_1(\tau)} w + \frac{1-\tau}{r_2(\tau)} ze^{it}.$$

Формула (120) устанавливает, что значения функции $F(w, z)$ в области D определяются поведением линейного дифференциального оператора $L_1[F]$ на границе области $\bar{D}$.

Теорема 3. Если функция $F(w, z)$ голоморфна в $D \in (T)$ и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, то для точек $(w, z) \in D$

$$F(w, z) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta F[r_1(\tau)\zeta, r_2(\tau)\zeta e^{-it}]}{(\zeta - u)^2} d\zeta. \quad (121)$$

Формула (121) выражает значения $F(w, z)$ внутри области D через ее значения на границе этой области. Интегралы (120) и (121), в которых f и F заменены произвольной суммируемой функцией F , заданной на границе ∂D области $D \in (T)$, называются интегралами типа Темлякова соответственно первого и второго рода.

Л. А. Айзенбергом доказана следующая теорема.

Теорема 4. Пусть на границе ∂D области $D \in (T)$, ограниченной гиперповерхностью $w = r_1(\tau)\zeta$, $z = r_2(\tau)\zeta e^{-it}$, $0 \leq \tau \leq 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $|\zeta| = 1$, задана суммируемая (в смысле Лебега) функция $F(t, \tau, \zeta)$;

$$a = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{r'_2(\tau)}{r'_1(\tau)}, \quad b = \lim_{\tau \rightarrow 1} \frac{r'_2(\tau)}{r'_1(\tau)}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $a \neq 0$, $b \neq -\infty$, то интеграл типа Темлякова первого рода

$$\psi(w, z) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_{|\zeta|=1} \frac{F(t, \tau, \zeta)}{\zeta - u} d\zeta \quad (122)$$

и интеграл типа Темлякова второго рода

$$\varphi(w, z) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta F(t, \tau, \zeta)}{(\zeta - u)^2} d\zeta \quad (123)$$

¹⁰ См. Б. А. Фукс. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. Физматгиз, М., 1962.

голоморфны в областях

$$D^{\pm} = D, \quad D^{\mp} \{a|w| + |z| + r_2(0) < 0\}, \\ D^{\pm} = \{b|w| + |z| + br_1(1) > 0\}$$

и не являются голоморфными функциями в области $C^2 \setminus \overline{(D^{\pm} \cup D^{\mp} \cup D^{\pm})}$;

2) если $a \neq 0$, $b = -\infty$, то интегралы (122) и (123) голоморфны в областях $D^{\pm}$ и $D^{\mp}$ и не являются голоморфными функциями в области $C^2 \setminus \overline{(D^{\pm} \cup D^{\mp})}$;

3) если $a = 0$, $b \neq -\infty$, то интегралы (122) и (123) голоморфны в областях $D^{\pm}$ и $D^{\mp}$ и не являются голоморфными функциями в области $C^2 \setminus \overline{(D^{\pm} \cup D^{\mp})}$;

4) если $a = 0$, $b = -\infty$, то интегралы (122) и (123) голоморфны в области $D^{\pm}$ и не являются голоморфными функциями в области $C^2 \setminus \overline{D^{\pm}}$.

Эта теорема характеризует поведение функций, определяемых интегралами Темлякова, вне области $D \in (T)$. Полученный результат указывает на существенное отличие интегралов Темлякова от интеграла Коши и его обобщений на случай голоморфных функций многих переменных (интегралы Мартинелли — Бохнера, Бергмана — Вейля): вне области D интегралы типа Темлякова в одних местах голоморфны, в других — не голоморфны. В то же время, как показал Айзенберг, они непрерывны почти во всем пространстве C^2 и не имеют, как правило, скачков на границе области D . Называя порядком границы $|z| = \Phi(|w|)$ области D число l интервалов линейности у функции $\Phi(|w|)$, $0 \leq |w| \leq R_1$, Айзенберг доказал следующее утверждение.

Теорема 5. Если заданная на границе ∂D порядка l области D функция $F[r_1(\tau)\xi, r_2(\tau)\xi e^{-it}]$ такова, что внутренние интегралы в формулах (122) и (123), как функции переменных t и τ , являются функциями некоторых классов $(\mathcal{P}_{D,C}^{\pm}$ и $P_{D,C}^{\mp})$, то 1) при $l = 0$ интегралы типа Темлякова первого и второго рода непрерывны во всем пространстве C^2 ; 2) при $0 < l < \infty$ эти интегралы непрерывны во всем пространстве C^2 , кроме точек l концентрических окружностей, расположенных в плоскости $w = 0$, и l концентрических окружностей, расположенных в плоскости $z = 0$; 3) при $l = \infty$ интегралы (122) и (123) непрерывны во всем пространстве C^2 , кроме точек двух замкнутых множеств, расположенных соответственно в плоскостях $w = 0$ и $z = 0$ и нигде не плотных в этих плоскостях.

Из этой теоремы вытекает способ построения окружностей разрывов (122) и (123). В «абсолютной четвертьплоскости» проводятся прямые, совпадающие на интервалах линейности с функцией $|z| = \Phi(|w|)$,

задающей границу области D . Точки пересечения этих прямых с прямыми $|w| = 0$ и $|z| = 0$ и являются образами в «абсолютной четверть-плоскости» окружностей разрывов в пространстве C^2 . В частности, для области D с границей $c|w| + d|z| = 1$, где $c > 0$, $d > 0$, интеграл типа Темлякова первого рода непрерывен во всем пространстве C^2 , за исключением двух окружностей: $|w| = c^{-1}$, $z = 0$ и $w = 0$, $|z| = d^{-1}$. Этот интеграл является аналитической функцией в областях

$$D^{\pm} = \{w, z: c|w| + d|z| < 1\}, \quad D^{\mp} = \{w, z: c|w| - d|z| > 1\}, \\ D^{\pm} = \{w, z: d|z| - c|w| > 1\}$$

и не является аналитической функцией в области

$$D^{\circ} = \{w, z: c|w| + d|z| > 1, \quad |c|w| - d|z|| < 1\}.$$

Взяв плотность специального вида, Г. Л. Луканкин установил, что предел функции $f(w, z)$, представимой интегралом типа Темлякова первого рода, при стремлении точки (w, z) к точке окружности разрыва по пути, принадлежащему гиперповерхности $|z| = k$ ($|w| = c^{-1}$), $c > 0$, существует, но зависит от k , если гиперповерхность принадлежит области неаналитичности D° . Тем самым доказано, что эта функция, вообще говоря, не имеет предела при стремлении точки (w, z) из области неаналитичности к точкам окружностей разрыва. В этой же работе Луканкин доказал, что предельные значения интеграла типа Темлякова первого рода в точках окружностей разрыва по путям, расположенным в области его аналитичности, не зависят от углового коэффициента неаналитической гиперповерхности, содержащей эти пути.

Г. Л. Луканкин изучал также вопрос о поведении на границе области D нормальной производной (т. е. производной по нормали к границе области извне и изнутри области) интеграла Темлякова первого рода. Оказалось, что, вообще говоря, нормальная производная этого интеграла делает конечный скачок. В дальнейшем Луканкиным было дано более общее определение интегралов типа Темлякова с плотностью, заданной на топологическом произведении

$$M = \{\tau, t, \eta: 0 \leq \tau \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad |\eta| = 1\}.$$

При более глубоком рассмотрении оказалось, что интегралы типа Темлякова (как в прежнем их понимании, так и в новом определении) в областях

$$C^2 \setminus \overline{(D^{\pm} \cup D^{\mp} \cup D^{\circ})}, \quad C^2 \setminus \overline{(D^{\pm} \cup D^{\mp})}, \\ C^2 \setminus \overline{(D^{\pm} \cup D^{\circ})}, \quad C^2 \setminus \overline{D^{\pm}},$$

вообще говоря, не являются голоморфными функциями.

Позднее И. И. Баврин получил для ограниченных выпуклых полных n -круговых областей общие интегралы Темлякова, для которых Г. Л. Луканкиным были введены интегралы «типа» с указанной выше плотностью.

А. А. Темляков обобщил (1962 г.) формулу (120) на мероморфные функции. Он доказал следующую теорему.

Теорема 6. Если произведение $f(w, z) F(w, z)$ — регулярная функция в области $D \in (T)$ и оператор $L_1[fF]$ непрерывен в замкнутой области $\bar{D}$, то для $(w, z) \in D, f(w, z) \neq 0$,

$$F(w, z) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_{|\xi|=1} K(\xi, \eta; w, z) \frac{L_{\psi+1}[F(\xi, \eta)]}{\xi - u} d\xi, \quad (124)$$

где

$$L_{\psi+1}[F] = L_1[F] + \psi F, \quad \psi(w, z) = L_0[f] / f(w, z),$$

$$K(\xi, \eta; w, z) = f(\xi, \eta) / f(w, z), \quad L_h[F] = hF + wF'_w + zF'_z.$$

Формула (124) выражает значения функции $F(w, z)$ внутри области $D \setminus \mathcal{P}$ (где $\mathcal{P}$ — многообразие $f(w, z) = 0$, принадлежащее D) через значения оператора $L_{\psi+1}[F]$ на границе области. Очевидно, если $f(w, z) \equiv 1$, то последняя формула переходит в формулу (120), и если $f(w, z) = f\left(\frac{w}{z}\right)$, то $L_{\psi+1}[F] = L_1[F]$. Ядро $K(\xi, \eta; w, z)$ здесь зависит от функции f , и, так как для каждой мероморфной функции $F(w, z)$ существует семейство функций $f(w, z)$, удовлетворяющих условию теоремы 6, это ядро не единственно.

К интегральным формулам (120) и (121) примыкает формула Баврина

$$F(z_1, z_2) = F(0, 0) + \sum_{k=1}^2 \frac{z_k}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_{|\xi|=1} \frac{F'_{z_k}[r_1(\tau)\xi, r_2(\tau)\xi e^{-it}]}{\xi - u} d\xi,$$

названная им интегральным представлением Темлякова третьего рода. Она выражает значения функции $F(z_1, z_2)$ в области D через значения двух ее первых частных производных на границе $\bar{D}$ с точностью до постоянного слагаемого $F(0, 0)$.

Открытие И. И. Бавриным интегрального представления Темлякова третьего рода позволило ему решить задачу установления общего интегрального представления Темлякова в случае $n = 2$, состоящего из интегральных представлений Темлякова первого, второго и третьего рода.

В работах (1959 г.) Л. А. Айзенберга и Ли Чэ Гопа, а также в статье (1963 г.) Опяля и Ситяка интегральные представления Темлякова первого и второго рода получили распространения на случай комплексных переменных $n \geq 3$. Наиболее естественным из них и в смысле структуры ядра и в смысле сохранения всех особенностей интегралов Темлякова первого и второго рода является распространение, полученное Опялем и Ситяком. Показана справедливость этих представлений Темлякова даже для любой ограниченной выпуклой полной n -круговой области.

В 1966 г. И. И. Баврин, вскрыв операторную природу интегральных представлений Темлякова, решил задачу полного распространения об-

щего интегрального представления Темлякова ($n = 2$) на случай $n > 2$. Полученную им формулу, решающую эту задачу, он назвал общим интегральным представлением Темлякова в случае n комплексных переменных. Она включает, в частности, n представлений Опяля и Ситяка.

Интегральные представления, входящие в общее интегральное представление Темлякова в случае n комплексных переменных, обладают следующим важным свойством: внутренний интеграл по $|\xi| = 1$ в этих представлениях есть либо интеграл Коши ($k = n - 1 - \alpha$) в случае одного комплексного переменного, либо линейный дифференциальный оператор этого интеграла.

Рассмотрим выпуклые области общей природы. Пусть область

$$D = \{(z_1, \dots, z_n) : \Phi(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n) < 0\},$$

содержащая точку $(0, \dots, 0)$, в пространстве C^n выпукла и ограничена, а функция Φ дважды непрерывно дифференцируема и производные 1-го порядка Φ не обращаются одновременно в нуль в точках границы ∂D . Л. А. Айзенберг получил интегральное представление для функций, голоморфных в этой области D . Это представление с голоморфным ядром и выражает значения функции в области D через значения ее на границе ∂D . Для этого же класса областей И. И. Баврин решил задачу установления общего интегрального представления, соответствующего общему интегральному представлению Темлякова в случае $n \geq 2$. Одно из интегральных представлений ($\alpha = \mu = 0$), входящих в это общее представление, является в иной форме упомянутым выше представлением Айзенберга.



И. И. Баврин.

2

Классы регулярных функций

Пусть D — ограниченная полная двоякокруговая область с центром в точке $(0, 0)$, а k (k') — фиксированное конечное число; пусть функция $F(w, z)$, $F(0, 0) = 1$, регулярна в D . Возьмем сечение области D плоскостью $z = kw$ ($w = k'z$). Проекцию сечения $D \cap \{z = kw\}$ ($D \cap \{w = k'z\}$) на плоскость $z = 0$ ($w = 0$) назовем соответствующим кругом. Определим, что в сечении $D \cap \{z = kw\}$ функция $wF(w, z)$ однолистка, звездно однолистка по отношению к началу (выпукло однолистка), есть функция с ограниченным вращением, если функция $wF(w, kw)$ соответственно однолистка в

соответствующем круге, однолистно отображает его на область, звездообразную относительно начала координат (на выпуклую область), есть функция с ограниченным вращением в этом круге.

Обозначим Q_D, M_D, N_D, V_D классы регулярных в области D функций $F(w, z)$, $F(0, 0) = 1$, обладающих следующими свойствами: 1) в сечении $D \cap \{z = kw\}$, где $k \neq \infty$ — любое комплексное число, функция $wF(w, z)$ соответственно однолистна, звездно однолистна по отношению к началу (выпукло однолистна), есть функция с ограниченным вращением; 2) в сечении $D \cap \{w = 0\}$ функция $zF(0, z)$ соответственно однолистна, звездно однолистна по отношению к началу (выпукло однолистна), есть функция с ограниченным вращением.

И. И. Бавриным получены следующие критерии принадлежности регулярных функций к классам M_D, N_D, V_D . Для того чтобы регулярная в области D функция $F(w, z)$, $F(0, 0) = 1$, принадлежала к классу M_D , соответственно N_D, V_D , необходимо и достаточно, чтобы в D

$$\operatorname{Re} \left(\frac{L_1 [F(w, z)]}{F(w, z)} \right) > 0,$$

соответственно

$$\operatorname{Re} \left(\frac{L_1 [L_1 [F(w, z)]]}{L_1 [F(w, z)]} \right) > 0, \quad \operatorname{Re} L_1 [F(w, z)] > 0.$$

Бавриным найдены также соотношения между функциями классов M_D, N_D, V_D , Шура и Каратеодори. Например, если $\Phi(w, z) \in N_D$, то $L_1 [\Phi(w, z)] = F(w, z) \in M_D$, и, обратно, если $F(w, z) \in M_D$, то $\int_0^1 F(\tau w, \tau z) d\tau = \Phi(w, z) \in N_D$. Им получены оценки основных функционалов в этих классах. Большинство из них точные, причем во многих выяснен вопрос о единственности экстремальных функций. Указанные выше классы рассмотрены Бавриным и в случае ограниченной полной круговой области. Эти исследования распространяются совершенно аналогично на случай $n \geq 3$ переменных.

3

Целые функции

Основные исследования в области целых функций многих комплексных переменных были направлены на изучение их характеристик роста (порядок, тип, индикатриса). Переносить эти характеристики на многие переменные можно различными способами, поэтому в случае многих переменных получается более сложная теория, чем в случае одного переменного.

Для целых функций многих переменных возможны три группы определений порядков и типов: 1) порядки и типы по совокупности переменных (глобальные порядки и типы); 2) порядки и типы по каждой переменной; 3) сопряженные порядки и типы.

Глобальный порядок и тип характеризуют рост максимума модуля функции, который берется на границах S областей, исчерпывающих пространство C^n комплексных переменных. В зависимости от вида этих областей получаются различные определения. Первое такое определение дано А. А. Темляковым. В нем в качестве областей взяты гиперконусы $|z_1| + |z_2| = r$ (при $n = 2$). Темляков установил также связи между порядками и типами в этом смысле и коэффициентами степенного ряда функции. Эти теоремы были применены М. М. Джрбашяном в совершенно новой для функций многих комплексных переменных области — теории построения базисов и разложений целых функций в обобщенный ряд Тейлора. С. А. Еремин, Ш. И. Стрелиц рассматривали исчерпывание пространства областями другого вида.

Наиболее общее определение принадлежит А. А. Гольдбергу. Оно состоит в следующем. Пусть D — замкнутая ограниченная полная n -круговая область в C^n с центром в начале координат, $c_1, \dots, c_n$ — положительные числа. $(D, c_1, \dots, c_n)$ -порядком и $(D, c_1, \dots, c_n)$ -типом целой функции $f(z_1, \dots, z_n)$ называются соответственно числа

$$\rho_D = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r}, \quad \sigma_D = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r)}{r^{\rho_D}},$$

где

$$M(r) = \max_{z \in D} |f(r^{c_1} z_1, \dots, r^{c_n} z_n)|.$$

Доказано, что ρ_D не зависит от области D , и установлена связь между ρ_D и σ_D и коэффициентами Тейлора.

Порядки и типы по каждому переменному впервые были введены М. М. Джрбашяном. Порядки роста ρ_k целой функции $f(z_1, z_2)$ соответственно по переменным z_k , $k = 1, 2$, определены им с помощью формул

$$\rho_k = \overline{\lim}_{r_{3-k} \rightarrow \infty} \left\{ \overline{\lim}_{r_k \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r_1, r_2)}{\ln r_k} \right\},$$

где $M(r_1, r_2) = \max |f|$ при $|z_1| = r_1$, $|z_2| = r_2$. Целые функции, имеющие конечные порядки ρ_1 и ρ_2 и удовлетворяющие соотношению

$$\overline{\lim}_{r_1, r_2 \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r_1, r_2)}{\ln(r_1^{\rho_1} + r_2^{\rho_2})} = 1,$$

выделены Джрбашяном в класс A , подробно им изученный. Для функций класса A Джрбашян дал определение типов

$$\sigma_k = \overline{\lim}_{r_{3-k} \rightarrow \infty} \left\{ \overline{\lim}_{r_k \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r_1, r_2)}{r_k^{\rho_k}} \right\}$$

и получил формулы, связывающие порядки и типы с коэффициентами степенного разложения $f(z_1, z_2)$.

Сопряженные порядки и типы впервые были рассмотрены также М. М. Джрбашяном. Он установил связь между сопряженными поряд-

ками и типами функций класса A и получил формулы, связывающие сопряженные порядки и типы с коэффициентами Тейлора. Опираясь на эти понятия, Джрбашян построил преобразование типа Бореля и интегральное представление с помощью ядер Миттаг-Леффлера $E_{\rho_1}(z_1 \zeta_1; \mu_1)$, $E_{\rho_2}(z_2 \zeta_2; \mu_2)$ для целых функций класса A порядка (ρ_1, ρ_2) типа (σ_1, σ_2) . Существенно используя эти представления, Ф. И. Гече установил критерий для представимости целой функции $f(z_1, z_2)$ в виде

$$\exp \{g(z_1, z_2)\} f_1(z_1) f_2(z_2),$$

где g, f_1, f_2 — также целые функции.

Позднее подобного рода вопросы, относящиеся ко второй и третьей группам определений порядков и типов, рассматривались А. А. Гольдбергом и Л. И. Ронкиным. Остановимся на некоторых результатах Л. И. Ронкина.

Пусть $M(R) = \sup |f|$ при $|z_i| < R_i$ ($i = 1, \dots, n$). Обозначим через B_ρ множество точек $(a_1, \dots, a_n)$ из R_n , для которых асимптотически $\ln M(R) < R_1^{\rho_1} + \dots + R_n^{\rho_n}$. Граница S_ρ множества B_ρ называется гиперповерхностью сопряженных порядков. Аналогично определяются сопряженные типы.

Л. И. Ронкиным получены в геометрических терминах необходимые и достаточные условия для того, чтобы данная гиперповерхность положительного октанта R_n была гиперповерхностью сопряженных порядков. Изучению связей между различными группами порядков и типов посвящены работы Л. С. Маергойза.

Для целой функции $f(z_1, \dots, z_n) = \sum a_{k_1 \dots k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$, порядки ρ_i которой в смысле М. М. Джрбашяна удовлетворяют условиям $0 < \rho_i < \infty$ при $i = 1, \dots, \lambda$, $\rho_j = 0$ при $j > \lambda$, $\lambda > 0$, вводится понятие относительного порядка

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{k_i \ln k_i}{-\rho_i \ln |a_k|}.$$

Здесь $k = k_1 + \dots + k_n$, $|a_k| = \sum |a_{k_1, \dots, k_n}|$ при $k_1 + \dots + k_n = k$. Функции, имеющие одинаковый относительный порядок α , объединяются в класс N_α . При любом $\alpha \in [1, n]$ класс N_α непустой, N_1 совпадает с классом A Джрбашяна. Числа $(\alpha \rho_1, \dots, \alpha \rho_n)$ составляют систему сопряженных порядков.

Л. С. Маергойз доказал следующую теорему: если для целой функции ρ есть $(c_1, \dots, c_n)$ -порядок, в смысле А. А. Гольдберга, числа λ, ρ_i и α имеют те же значения, что и выше, $k = [\alpha] < \lambda$, то

$$\max \left\{ c_1 \rho_1, c_{\lambda-k} \rho_{\lambda-k} (\alpha - k) + \sum_{i=\lambda-k+1}^{\lambda} c_i \rho_i \right\} \leq \rho \leq \sum_{i=1}^k c_i \rho_i + c_{k+1} \rho_{k+1} (\alpha - k).$$

Эта теорема уточняет и обобщает соотношение Бореля — Валирона для целых функций двух переменных

$$\max \{ \rho_1, \rho_2 \} \leq \rho \leq \rho_1 + \rho_2 \quad (c_1 = c_2 = 1).$$

В теории целых функций одного переменного важную роль играет понятие уточненного порядка. На функции многих переменных эти понятия перенесены Ф. И. Гече. Им введены и изучены системы сопряженных уточненных порядков. Доказано, что у всякой целой функции конечных сопряженных порядков существуют системы сопряженных уточненных порядков, имеющих системы конечных сопряженных типов. На уточненные порядки перенесены результаты Л. И. Ронкина о системах сопряженных порядков.

В работах И. Ф. Битляна, А. А. Гольдберга, Ш. И. Стрелица в различных вариантах обобщена теорема Вимана-Валирона, связывающая рост частных производных с ростом самой функции, и аналог ее центрального индекса.

С исследованием индикатрисы роста связаны работы по перенесению на целые функции многих переменных теоремы Бореля — Поля о связи между индикатрисой роста целой функции и распределением особенностей ассоциативной с ней по Борелю функции. В работах В. К. Иванова с целой функцией



В. К. Иванов.

$$F(z_1, z_2) = \sum_{m,n} \frac{a_{mn}}{m!n!} z_1^m z_2^n$$

экспоненциального типа ассоциируется функция

$$f(z_1, z_2) = \sum_{m,n} \frac{a_{mn}}{z_1^m z_2^n}.$$

Полагая $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ и фиксируя φ_1 и φ_2 , обозначим через $T(\varphi_1, \varphi_2)$ множество точек (v_1, v_2) плоскости, для которых асимптотически

$$|F(z_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})| < e^{v_1 r_1 + v_2 r_2}, \quad \varphi_1 = \text{const}, \quad \varphi_2 = \text{const}.$$

Граница области $T(\varphi_1, \varphi_2)$ является обобщением индикатрисы роста на случай двух переменных. Множество точек (v_1, v_2) плоскости таких, что любая точка (z_1, z_2) , удовлетворяющая условиям

$$\text{Re}(z_1 e^{-i\varphi_1}) \geq v_1, \quad \text{Re}(z_2 e^{-i\varphi_2}) \geq v_2,$$

является точкой регулярности $f(z_1, z_2)$, обозначим через $C(\varphi_1, \varphi_2)$. В. К. Иванов доказал, что

$$\bar{T}(\varphi_1, \varphi_2) = \bar{C}(-\varphi_1, -\varphi_2). \quad (125)$$

На случай n переменных это соотношение перенесено М. Ш. Ставским.

В другом направлении соотношение (125) было обобщено С. Г. Гиндикиным. Для целой функции экспоненциального типа он рассматривает V -преобразование Бореля, связанное с n -мерным выпуклым конусом V . Подобно тому, как это сделано В. К. Ивановым, С. Г. Гиндикин вводит понятия V -индикатрисы $T_V(\varphi)$ и множества $C(\varphi)$, связанного с распределением особенностей V ассоциированной функции, и доказывает равенство

$$\overline{T}_V(\varphi) = \overline{C_V(\varphi)}. \quad (126)$$

Если в качестве конуса V взять положительный октант, (126) переходит в (125).

Другие определения индикатрисы роста рассматривались Л. И. Ронкиным и В. К. Ивановым. Исходя из этих определений, Л. С. Маергойз изучил a -индикатрису

$$h_a(\varphi) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(ra_1 e^{i\varphi_1}, \dots, ra_n e^{i\varphi_n})|}{r^\rho}$$

целой функции глобального порядка $\rho(a_1, \dots, a_n)$, установил для нее аналог тригонометрической выпуклости, при котором $h_a(\varphi)$ мажорируется функцией $H(\varphi)$, удовлетворяющей уравнению

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \right)^2 H(\varphi) + \rho^2 H(\varphi) = 0,$$

дал интегральное представление, которое при $n = 1$ переходит в известное интегральное представление индикатрисы роста целой функции одной переменной.

4

Отображения

Квазибиголоморфные отображения. При биголоморфном отображении областей пространства S^m в случае $m > 1$ углы поворота векторов, выходящих из одной точки, коэффициенты линейного искажения для линий, проходящих через одну точку, вообще говоря, различны. Именно поэтому биголоморфные отображения при $m > 1$ называют также псевдоконформными отображениями в отличие от конформных отображений, к которым они сводятся при $m = 1$.

Б. А. Фукс нашел границы для изменения углов поворота и коэффициентов линейного искажения при биголоморфном отображении и установил связь размеров этих изменений углов с величиной аргумента якобиана отображения¹¹. Эти результаты послужили исходным пунктом для изучения различных семейств квазибиголоморфных отображений.

¹¹ Б. А. Ф у к с. Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных. Физматгиз, М., 1963.

Б. А. Фукс установил, что отображение T класса гладкости C^1 области $G < C_{x,z}^2$ в каждой точке $M \in G$ принадлежит к одному из следующих трех типов: 1) дифференциал $d_M T$ отображения T в точке M не сохраняет аналитического характера ни одной аналитической плоскости $A_M(\omega) = \{\omega, z\}: (w - w_M) = \omega(z - z_M)\}$; 2) $d_M T$ сохраняет аналитический характер двух и только двух плоскостей $A_M(\omega)$; 3) $d_M(T)$ сохраняет аналитический характер бесконечного множества плоскостей $A_M(\omega)$. При этом оказывается, что если сохраняется аналитический характер плоскостей $A_M(\omega_k)$ ($k = 1, 2, 3$), то сохраняется аналитический характер всех плоскостей $A_M(\omega)$, для которых точки ω лежат на окружности, проходящей через точки $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ на сфере P_ω^1 ; если сохраняется аналитический характер плоскостей $A_M(\omega_k)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) и точки ω_k ($k = 1, 2, 3, 4$) не лежат на одной окружности, то сохраняется аналитический характер всех плоскостей $A_M(\omega)$ и отображение T моногенно в точке M .

Различные классы квазibiголоморфных отображений $L_G(k)$ области G составляются из отображений $T \in C^1$ области G , принадлежащих к третьему типу во всех точках $M \in G$, для которых $\sup_{M \in G} D_M(T) \leq K$. Здесь $D_M(T) \geq 0$ — величина, каким-то образом характеризующая отличие отображения $d_M T$ от биголоморфного, равная нулю, если $d_M T$ — биголоморфное отображение.

Например, А. А. Шматков рассмотрел класс $L_G^{(1)}(k)$ отображений, который получается, если $D_M(T) = \max S(\omega, d_M T)$, где $S(\omega, d_M T)$ — дефект плоскости (вообще говоря, неаналитической) $d_M T(A_M(\omega))$. Дефектом плоскости называется тангенс угла между ней и единственной аналитической плоскостью, проходящей через какую-нибудь прямую, лежащую в этой плоскости. Этот угол не зависит от выбора прямой (Б. А. Фукс). Другие классы подобных отображений изучены Д. Е. Рудником и А. А. Шматковым. В их работах рассмотрены примеры отображений, принадлежащих к этим классам, получены соотношения включения между этими классами отображений, а также между классами квазibiголоморфных отображений, построенных Бергманом и Хотоцумату.

А. А. Шматков рассмотрел класс квазibiголоморфных отображений $B_G(k)$, который состоит из отображений $T \in C^1$ области $G < C^2$, для которых $S(\omega, d_M T) = S(M)$ не зависит от ω и $\sup_{M \in G} S(M) \leq K$.

Он показал, что подобное отображение конформно во всех аналитических плоскостях, хотя сами аналитические плоскости, вообще говоря, теряют свой аналитический характер. Им найдены соотношения включения между различными совокупностями квазibiголоморфных отображений $B_G(k)$, установлено, что с помощью отображений $T \in B_G(k)$ можно отображать друг на друга некоторые классы биголоморфно неэквивалентных областей. В частности, доказано, что существует квазibiголоморфное отображение $T \in B_G(\infty)$ единичного бицилиндра G на гипершар. В работах Рудника и Шматкова некоторые из этих результатов распространены на области $G \in C^m, m > 2$.



Б. А. Фукс.

Инвариантные метрики и оценки искажений при биголоморфных отображениях. Известно, что в ограниченной области $G \in C^m$ пространства переменных $(z_1, \dots, z_m) = z$ величина $\Phi_0 = \ln K_G(z, \bar{z})$, где $K_G(z, \bar{z})$ — кернфункция Бергмана области G , является келлеровым потенциалом положительной эрмитовой так называемой бергмановой метрики, инвариантной при биголоморфных отображениях. Б. А. Фукс доказал, что кривизна Риччи ρ_0 этой метрики по любому направлению в любой точке области G всегда меньше $m + 1$. Отсюда вытекает, что 1) произвольно заданная положительная келлерова метрика, вообще говоря, не является бергмановой метрикой в какой-либо ограниченной области G ; 2) величина $\Phi_1 = K_G^{m+1} D_0$ является келлеровым потенциалом положительной эрмитовой

метрики, инвариантной при биголоморфных отображениях (и, вообще говоря, отличной от бергмановой метрики). Здесь D_0 — дискриминант метрической формы метрики Бергмана в области G . Далее оказалось (Б. А. Фукс), что Φ_0 и Φ_1 являются начальными членами последовательности келлеровых потенциалов эрмитовых метрик, инвариантных при биголоморфных отображениях.

Рассмотрение бергмановой метрики позволяет получать оценки для искажений евклидовых мер различных геометрических объектов при биголоморфных отображениях. А. А. Шматковым получены результаты, относящиеся к оценке искажений комплексных m -объемов.

Теория комплексных однородных ограниченных областей. Область D в n -мерном комплексном пространстве C^n называется однородной, если группа ее аналитических автоморфизмов $G(D)$ действует на D транзитивно, т. е. для всякой пары точек $z_1, z_2 \in D$ существует элемент $g \in G(D)$, переводящий z_1 в z_2 . В одномерном случае из теоремы Римана следует, что всякая ограниченная односвязная область является однородной. Верно и обратное: всякая ограниченная однородная область в C^1 является односвязной.

Уже в двумерном случае картина существенно отличается от одномерной. Во-первых, есть ограниченные односвязные, но не однородные области. Во-вторых, как заметил Пуанкаре, существуют биголоморфно неэквивалентные однородные области: комплексный шар ($|z_1|^2 + |z_2|^2 < 1$) и бицилиндр ($|z_1| < 1; |z_2| < 1$). Позднее Э. Картан показал, что всякая однородная ограниченная область в C^2 биголоморфно эквивалентна одной из этих двух областей. Он же перечислил все с точностью до эквивалентности однородные ограниченные области в C^3 . При этом выяснилось, что все такие области в C^n , при $n = 1, 2, 3$, об-

ладают одним дополнительным свойством: для каждой точки $z \in D$ в $G(D)$ существует элемент $\varphi_z \neq e$ такой, что $\varphi_z(z) = z$, $(\varphi_z)^2 = e$, где e — единичный элемент. Области, обладающие указанным свойством, Э. Картан назвал симметрическими. Он перечислил все симметрические области в пространствах любой размерности и поставил проблему: всякая ли однородная ограниченная область в C^n является симметрической? При некоторых предположениях для группы $G(D)$ автоморфизмов области D (полупростота или даже унимодулярность) А. Борель, Козюль, Хано получили положительный ответ на этот вопрос.

В 1959 г. И. И. Пятецкий-Шапиро построил первый пример несимметрической однородной ограниченной области в C^4 . Эта работа явилась началом цикла исследований И. И. Пятецкого-Шапиро и его учеников, который завершился классификацией однородных областей. Выяснилось, что симметрические области являются в известном смысле исключением из всех комплексных однородных областей. А именно: в каждой размерности существует лишь конечное множество неэквивалентных симметрических областей. В то же время в C^n при $n \geq 7$ существует континуум неэквивалентных однородных ограниченных областей.

В указанном цикле работ центральное место занимают реализации однородных ограниченных областей в виде аффинно-однородных областей. Эти реализации можно рассматривать как многомерные обобщения верхней полуплоскости. Дело в том, что на верхней полуплоскости транзитивно действует не только группа, но и подгруппа ее аналитических преобразований, состоящая из аффинных преобразований. Из теоремы Римана о конформных отображениях следует, что всякую однородную ограниченную область в C^1 можно конформно отобразить на верхнюю полуплоскость. Одним из основных результатов, полученных Э. Б. Винбергом, С. Г. Гиндикиным и И. И. Пятецким-Шапиро, является многомерное обобщение этого следствия: всякую однородную ограниченную область в C^n можно биголоморфно отобразить на аффинно-однородную область.

Весьма важную роль играет некоторый конкретный класс аффинно-однородных областей, введенный И. И. Пятецким-Шапиро в связи с задачами теории автоморфных функций¹². Эти области принято назы-



И. И. Пятецкий-Шапиро.

¹² И. И. П я т е ц к и й - Ш а п и р о. Геометрия классических областей и теория автоморфных функций. Физматгиз, М., 1961.

вать областями Зигеля. Приведем их определение. Пусть V — линейно однородный конус в k -мерном вещественном пространстве R^k , т. е. группа $G(V)$ линейных преобразований R^k , сохраняющих V , действует на V транзитивно. Предположим, что V не содержит прямых. Отображение $F(u, v)$, где $(u, v) \in C^m$, $F(u, v) \in C^k$, называется однородным V -эрмитовым, если

$$F(u, v) = F(v, u),$$

$$F(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 F(u_1, v) + \lambda_2 F(u_2, v), \quad F(u, v) \in \bar{V}$$

($\bar{V}$ — замыкание конуса V) и существует такая транзитивная подгруппа $T(V)$ в $G(V)$, что для всякого $g \in T(V)$ существует такое линейное преобразование $\tilde{g}$ пространства C^m , для которого

$$gF(u, v) = F(\tilde{g}u, \tilde{g}v).$$

Областью Зигеля второго рода $D(VF)$, связанной с конусом V и отображением F , называется область в пространстве C^{k+m} , задаваемая условием

$$\text{Im } z - F(u, v) \in V,$$

где $z \in C^n$, $u \in C^m$, $(z, u) \in C^{n+m}$. Можно проверить непосредственно, что область $D(VF)$ аффинно-однородна и не может быть биголоморфно отображена на ограниченную область (С. Г. Гиндикин, Э. Б. Винберг, И. И. Пятецкий-Шапиро). Всякую комплексную однородную ограниченную область можно биголоморфно отобразить на область Зигеля второго рода. Из этого результата, в частности, следует, что всякая однородная ограниченная область в C^n односвязна и, более того, гомеоморфна евклидову пространству.

В теории однородных областей важную роль играют однородные расслоения областей, т. е. такие расслоения однородной области D , при которых группа биголоморфных отображений D , переводящих слои в слои, действует на D транзитивно. Оказывается, в частности, что всякая однородная ограниченная область допускает однородное расслоение на комплексные шары. Однородные расслоения областей обстоятельно изучены И. И. Пятецким-Шапиро. В частности, им доказано, что для всякой однородной области D_0 существует универсальное расслоение пространства D со слоями, биголоморфно эквивалентными D_0 . Другими словами, всякое расслоение со слоями, эквивалентными D_0 , индуцируется однородным вложением своей базы в базу D_1 расслоения D . Интересно, что даже в том случае, когда область D_0 не является симметрической, универсальное пространство D и его база D_1 (классифицирующее пространство) являются симметрическими областями.

Для комплексных однородных ограниченных областей удалось решить ряд аналитических вопросов. С. Г. Гиндикин нашел явный вид

интегральных формул Бергмана и Коши — Сеге для всех комплексных однородных ограниченных областей. Им найден также ряд других интегральных формул, позволяющих вычислять многомерные интегралы специального вида по вычетам. В основу этих результатов положена теория специальных функций в линейно однородных конусах.

5

Некоторые применения

В 1956 г. Н. Н. Боголюбов при обосновании дисперсионных соотношений в квантовой теории поля открыл и доказал теорему «острие клина» («edge of the wedge»).

Пусть функции $f^\pm(z)$ соответственно голоморфны в трубчатых радиальных областях $T^{C^\pm} \subset C^n$, где $C^- = -C^+$, и являются преобразованиями Фурье — Лапласа обобщенных функций $g^\pm \in S'$; $\text{supp } g^\pm \subset C^\pm$. Пусть, далее, их граничные значения $f^\pm(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(x + iy)$, $y \in C^\pm$, совпадают в открытом множестве $O \subset R^n$. Тогда существует функция $f(z)$, голоморфная в $T^{C^+} \cup T^{C^-} \cup \tilde{O}$, где $\tilde{O}$ — окрестность O в C^n , и совпадающая с $f^\pm(z)$ в $T^{C^\pm}$ соответственно.

Для случая $C^+ = \{x_1^2 > x_2^2 + \dots + x_n^2, x_1 > 0\}$ и $O = \{x_1^2 < x_2^2 + \dots + x_{n+m}^2\}$ Н. Н. Боголюбов и В. С. Владимиров установили, что $f(z)$ представляется конечной суммой в виде

$$f(z) = \sum_k P_k(z) \Phi_k(z_1^2 - z_2^2 - \dots - z_n^2),$$

где полиномы P_k и функции $\Phi_k(\zeta)$ голоморфны в C^1 с разрезом $\text{Im } \zeta = 0$, $\text{Re } \zeta \geq \max[0, m]$, и имеют полиномиальный рост¹³.

Эпштейн в 1960 г. обобщил теорему «острие клина» Боголюбова на произвольные голоморфные функции $f^\pm(z)$. В. С. Владимиров усилил эту теорему для $n \geq 2$, доказав так называемую теорему о C -выпуклой оболочке

$$T^{C^+} \cup T^{C^-} \cup \widetilde{B_C(O)} \subset H(T^{C^+} \cup T^{C^-} \cup \tilde{O}),$$

где $C = O(C^+) \cup O(C^-)$. Отсюда вытекает, в частности, что

$$f^+(x) = f^-(x), \quad x \in B_C(O).$$

С помощью теоремы о C -выпуклой оболочке удалось построить оболочку голоморфности $H(T^{C^+} \cup T^{C^-} \cup \tilde{O})$, где C^+ — будущий световой конус (для более широкого класса открытых множеств O ,

¹³ В. С. В л а д и м и р о в. Методы теории функций многих комплексных переменных. «Наука», М., 1964.



В. С. Владимиров.

чем это следует из представления Иоста — Лемана — Дайсона).

В. С. Владимиров рассмотрел следующее обобщение классической задачи Гильберта. Пусть $C^+ \neq R^n$ — выпуклый конус в R^n , $C^- = -C^+$, $h \in S'$ и $g \in S'$. Найти пару функций $\{f^+, f^-\}$, $f^\pm \in H(0, C^\pm)$, удовлетворяющих линейному соотношению

$$f^+(x) = h(x) f^-(x) + g(x), \quad x \in R^n. \quad (127)$$

Установлено, что если h факторизована в алгебрах

$$H_1(0, C^\pm), \quad h(x) = h^+(x) h^-(x),$$

$$C^{(\infty)} \ni h^+(x) \neq 0, \quad \forall x \in R^n,$$

где $h^\pm(x)$ — граничные значения делителей единиц $h^\pm(z) \in H_1(0, C^\pm)$, то для разрешимости задачи (127) необходимо и до-

статочно, чтобы преобразование Фурье обобщенной функции $\frac{g(x)}{h^+(x)}$ обращалось в нуль вне конуса $C^{+*} \cup C^{-*}$. (При $n = 1$ $C^{+*} \cup C^{-*} = R^1$ и потому задача (127) разрешима всегда). При этом общее решение задачи (127) зависит от произвольного полинома.

Показано, что в винеровских алгебрах каноническая факторизация функции $h(x) \neq 0$, $\forall x \in R^n \cup \infty$, $h(\infty) = 1$ при $n \geq 2$, возможна тогда и только тогда, когда преобразование Фурье функции $\ln h(x)$ обращается в нуль вне $C^{+*} \cup C^{-*}$. Сравнение с классическими результатами для $n = 1$ позволяет сделать вывод, что при $n \geq 2$ индекс задачи (127) равен нулю.

В работах Н. Н. Боголюбова, В. С. Владимирова и О. С. Парасюка разработаны методы применения теории функций многих комплексных переменных в квантовой теории поля. Ю. В. Линником сделано новое важное открытие: найдено успешное применение голоморфных функций многих комплексных переменных в математической статистике («Статистические задачи с мешающими параметрами», 1966 г.).

ГЛАВА ВТОРАЯ

ГРАНИЧНЫЕ ПРОБЛЕМЫ, ОБОБЩЕНИЯ, ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Граничные свойства и граничные задачи

Теория граничных свойств аналитических функций комплексного переменного изучает с различных точек зрения те вопросы, которые возникают в процессе рассмотрения поведения аналитических функций вблизи границы области аналитичности. Многочисленные работы, посвященные теории граничных свойств аналитических функций комплексного переменного, можно условно разделить на две основные группы. К первой группе можно отнести исследования, целью которых является изучение аналитических функций вблизи множества ее особых точек. Вторая группа объединяет работы, в которых изучаются различные классы аналитических функций, выделяющиеся с помощью некоторых заранее названных условий. В связи с классами аналитических функций исследуются такие вопросы: существование граничных значений, единственность определения функции через граничные значения, построение аналитического представления функции через граничные значения, установление признаков принадлежности функции к данному классу, выяснение характеристических свойств функций, являющихся граничными значениями функций данного класса, и т. д.

В Советском Союзе и за рубежом опубликовано значительное количество исследований, в которых рассматриваются различные вопросы теории граничных свойств. Обзорное изложение ряда исследований можно найти в монографиях В. В. Голубева «Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции» (1961 г.), И. И. Привалова «Граничные свойства аналитических функций» (1950 г.), Г. М. Голузина «Геометрическая теория функций комплексного переменного» (1952 г., 2-е изд. — 1966 г.), Неванлинны «Однозначные аналитические функции» (пер. с нем., 1941 г.), Носиро «Предельные множества» (пер. с англ., 1963 г.), Гофмана «Банаховы пространства аналитических функций» (пер. с англ., 1963 г.), Зигмунда «Тригонометрические ряды» (пер. с англ., 1965 г.) и др.

В данном разделе кратко излагаются основные результаты советских математиков по граничным свойствам, причем несколько большее внимание уделено тем результатам, которые тесно связаны

с граничными задачами теории аналитических функций комплексного переменного.

В литературе до середины 30-х годов граничные задачи в большинстве случаев встречаются как вспомогательные средства решения ряда теоретических и прикладных проблем. В постановке и решении граничных задач важную роль сыграли основополагающие работы зарубежных авторов — Римана, Гильберта, Племелья, Нетера, Карлемана и советских — Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина, Г. В. Колосова и Н. И. Мусхелишвили. Зарубежными авторами граничные задачи были применены для исследования некоторых вопросов теории дифференциальных и интегральных уравнений, а советскими — для исследования задач механики.

Со второй половины 30-х годов в Советском Союзе начались интенсивные исследования граничных задач и параллельно значительно расширились пределы применимости установленных теоретических результатов. В настоящее время накоплен настолько обширный материал как по теории, так и по приложению этих задач, что невозможно исчерпывающе изложить его в кратком историческом обзоре. Поэтому мы не касаемся тех работ, в которых граничные задачи выступают как вспомогательное средство для решения других вопросов.

Исторические справки, связанные с развитием теории граничных свойств, приведены в названных монографиях В. В. Голубева и И. И. Привалова, сборниках «Математика в СССР» (за 15, 30 и 40 лет) и других обзорных работах¹, исторические справки, связанные с развитием граничных задач теории аналитических функций, — в монографиях Н. И. Мусхелишвили «Сингулярные интегральные уравнения» (1962 г.) и Ф. Д. Гахова «Краевые задачи» (1963 г.), сборниках «Математика в СССР» (за 15, 30 и 40 лет) и других обзорных работах.

1

Изучение аналитических функций вблизи множества их особых точек

Первое исследование, в котором изучено поведение однозначной аналитической функции в окрестности ее особой точки, было опубликовано в Петербурге в 1868 г. Это магистерская диссертация Ю. В. Сохоцкого, в которой содержится хорошо известная в настоящее время теорема о поведении аналитической функции в окрестности существенно особой точки. Этот результат впоследствии был приписан Вейерштрассу, опубликовавшему его лишь в 1876 г. Вообще, в работах Ю. В. Сохоцкого содержится ряд весьма ценных результатов по теории функций комплексного переменного. К сожалению, эти работы Сохоцкого были незаслуженно забыты, а результаты, содержащиеся в них, постепенно переоткрывались другими учеными.

С развитием аналитической теории дифференциальных уравнений возникла необходимость в изучении однозначных аналитических функ-

¹ См. литературу к настоящей главе.

ций с совершенным всюду разрывным множеством особых точек. В. В. Голубев в магистерской диссертации (1916 г.) предложил метод построения таких функций с помощью интегралов Лебега по особым множествам. Он впервые построил пример однозначной непрерывной аналитической функции с совершенным всюду разрывным множеством особых точек плоской меры нуль. Впоследствии (1923 г.) аналогичный пример был построен П. С. Урысоном. Магистерская диссертация В. В. Голубева сыграла значительную роль в развитии теории граничных свойств аналитических функций. Она была положена в основу ряда дальнейших фундаментальных исследований граничных свойств аналитических функций и связанных с ними задач.



В. С. Федоров.

Изучение теории функций, аналитических вблизи совершенного множества особых точек, связано со значительными трудностями. Задача несколько упрощается, если множество особых точек заполняет некоторую линию. При этом, как указывает В. В. Голубев, представляется более целесообразным исследовать поведение функций вблизи особой линии, рассматривая ее целиком, не разбивая на отдельные точки. Он вводит такую классификацию особого множества. Пусть $f(z)$ — однозначная аналитическая функция, имеющая множество особых точек E , d — расстояние от z до E . Рост функции в области E может быть следующих типов: 1) $|f(z)| < d^{-k}$, где k — некоторое число, в этом случае E называется полярным особым множеством функции; 2) $|f(z)| < \exp d^{-k}$, в этом случае E называется существенно особым множеством конечного порядка; 3) если указанные условия не выполняются, то E называется существенно особым множеством бесконечного порядка.

Исследование функций с полярной особой линией проведено В. В. Голубевым в 1916 г., а с существенно особой линией конечного порядка — в 1918—1921 гг. Результаты этих работ изложены в его монографии, изданной в 1961 г. Метод, применяемый В. В. Голубевым, обобщает приемы, встречающиеся в теории целых функций.

Граничные значения непрерывных функций на множестве своих особенностей изучал В. С. Федоров. В 1919 г. он установил следующий результат: функция $f(z)$, однозначная и непрерывная в области G , аналитическая в $G - E$, где E — совершенное (относительно области G) всюду разрывное множество точек, единственным образом определяется через свои значения на каждой порции E . В 1924 г. Федоров получил этот результат иным методом в более общем виде. Он доказал, что функция $f(z)$ с точностью до аддитивной постоянной определяется

предельными значениями своей действительной части на всякой порции особого множества.

В связи с указанным результатом В. С. Федорова уместно вспомнить весьма интересный пример, построенный в 1925 г. Н. Н. Лузиным: в замкнутом единичном круге существует непрерывная функция, не равная тождественно нулю, обращающаяся в нуль в каждой точке единичной окружности и аналитическая внутри круга вне некоторого совершенного всюду разрывного множества.

2

Существование граничных значений и теоремы единственности

В дальнейшем единичный круг и единичную окружность будем обозначать соответственно G_1 и Γ_1 , а меру точечного множества E — через $|E|$. Если функция $F(z)$ определена вблизи линии Γ на разрезанной вдоль Γ плоскости, то через $F^+(t)$ (соответственно $F^-(t)$), где $t \in \Gamma$, будем обозначать граничное значение $F(z)$, когда $z \rightarrow t$ слева (соответственно справа) по отношению к выбранному на Γ положительному направлению.

Пусть $F(z)$ — функция, аналитическая² вблизи некоторой линии Γ с одной ее стороны. Требуется установить, при каких условиях существует граничное значение функции $F(z)$ в точках линии Γ . Этот вопрос является одним из основных в теории граничных свойств. Первый результат был получен в 1906 г. Фату. Им показано, что если аналитическая функция $F(z)$ ограничена в G_1 , то она имеет почти всюду на Γ_1 угловые граничные значения. В 1916 г. В. В. Голубев обобщил это предложение, доказав, что если Γ — простая спрямляемая замкнутая линия и $F(z)$ — ограниченная аналитическая функция внутри Γ , то $F(z)$ имеет почти всюду на Γ угловые граничные значения. В 1918 г. И. И. Привалов доказал, что для справедливости результата Фату — Голубева достаточно, чтобы аналитическая функция $F(z)$ не принимала значения, образующие линейный континуум. Кроме того, он же заметил, что для исследования существования угловых граничных значений аналитической функции достаточно рассмотреть ее действительную (мнимую) часть и угол произвольно малого раствора.

В 1927 г. А. И. Плеснер дал полную характеристику аналитической функции вблизи граничных точек с точностью до множества меры нуль. Он установил, что если функция $F(z)$ мероморфна внутри G_1 , то Γ_1 может быть разбита на три множества — E_1 , E_2 , E_3 , — обладающих следующими свойствами: 1) $|E_1| = 0$; 2) в каждой точке z_0 множества E_2 функция $F(z)$ имеет единственное угловое граничное значение; 3) каков бы ни был угол с вершиной в точке z_0 множества E_3 , совокупность граничных значений функции $F(z)$ при стремлении z к z_0 внутри

² Если противное не оговорено, функции всегда предполагаются однозначными.

этого угла покрывает всю плоскость. Однако в 1949 г. Б. А. Вострецов установил, что для произвольной аналитической в G_1 функции $F(z) = \sum a_k z^k$ существует мажорантная аналитическая в G_1 функция $\Psi(z) = \sum A_k z^k$, $|a_k| < |A_k|$, $k = 1, 2, \dots$, которая имеет почти всюду на окружности Γ_1 конечные угловые граничные значения.

Задача о единственном определении аналитической в G_1 функции $F(z)$ по ее граничным значениям впервые была поставлена в 1906 г. Фату. Фундаментальные исследования этой задачи принадлежат Н. Н. Лузину и И. И. Привалову. Она заключается в следующем: какова должна быть структура заданного множества $E \subset \Gamma_1$, чтобы аналитическая в G_1 функция, стремящаяся к определенным значениям в каждой точке множества E , когда z приближается к этим точкам по некоторому пути, была определена единственным образом? Свойствами, которыми можно охарактеризовать структуру множества E , лежащего на Γ_1 (или, вообще, на спрямляемой дуге), могут служить его мощность, категория и мера.

С точки зрения мощности проблему исследовал Фату. Ему удалось построить пример ограниченной аналитической в G_1 функции, которая равномерно стремится к нулю на множестве точек $E \subset \Gamma_1$ мощности континуума. В этом примере E — множество первой категории и меры нуль. Поэтому естественно возник вопрос: не является ли справедливой теорема единственности, когда E — множество второй категории и меры нуль? В 1925 г. Н. Н. Лузин и И. И. Привалов дали отрицательный ответ на этот вопрос, так как они построили пример отличной от нуля ограниченной и аналитической в G_1 функции, равномерно стремящейся к нулю на множестве точек $E \subset \Gamma_1$ второй категории. Они же провели полное исследование задачи единственности в предположении метрических ограничений на множество E и установили, что если аналитическая в G_1 функция $F(z)$ имеет определенные угловые граничные значения (конечные или бесконечные) на множестве $E \subset \Gamma_1$, $|E| > 0$, то такая функция единственна³.

В диссертации И. И. Привалова «Интеграл Коши» (1918 г.) дано следующее обобщение теоремы единственности Лузина — Привалова: если функция $F(z)$, аналитическая с одной стороны от спрямляемой линии Γ , принимает определенные угловые значения (конечные или бесконечные) на множестве точек $E \subset \Gamma$, $|E| > 0$, то эти значения единственным образом определяют рассматриваемую функцию $F(z)$.

Наряду с угловыми граничными значениями Н. Н. Лузин и И. И. Привалов рассмотрели также радиальные граничные значения. Они установили следующий результат: пусть $F(z)$ — мероморфная функция в G_1 , $E \subset \Gamma_1$ — множество второй категории на дуге $\gamma \subset \Gamma_1$ и для любой дуги $\gamma' \subset \gamma$, $|E \cap \gamma'| > 0$, тогда, если для каждой точки $t \in E$ радиальные граничные значения функции $F(z)$ равны нулю, то $F(z) \equiv 0$. Кроме того, Лузин и Привалов показали, что ограничения, налагаемые на множество E , нельзя ослабить, не усилив другие

³ В частном случае, когда $F(z)$ ограничена по модулю, эта теорема была доказана с помощью других методов (независимо от Н. Н. Лузина и И. И. Привалова) братьями Рисс в 1916 г.



А. И. Плеснер.

условия, а также что вместо радиусов нельзя рассматривать произвольные кривые, оканчивающиеся в точке $t \in E$.

В 1931 г. Б. В. Девисон установил, что основная теорема единственности Лузина — Привалова не может быть усилена. Для любого множества $E \subset \Gamma_1, |E| = 0$, он построил аналитическую в G_1 функцию $F(z) \not\equiv 0$, имеющую в точках множества E угловые граничные значения, равные нулю.

В 1938 г. И. И. Привалов обобщил свой совместный с Н. Н. Лузиным результат, доказав следующее предложение: пусть $F(z) \not\equiv \text{const}$ — мероморфная функция в G_1 , $E \subset \Gamma_1$ — множество второй категории на дуге $\gamma \subset \Gamma_1$ и для любой дуги $\gamma' \subset \gamma, |E \cap \gamma'| > 0$, тогда совокупность радиальных предельных значений, принимаемых на множестве E , содержит в себе замкнутое множество

положительной гармонической меры.

Дальнейшие исследования по теории единственности проводились в основном в направлении решения двух вопросов: 1) какие ограничения следует налагать на семейство кривых $\{\Gamma^t, t \in \Gamma\}$, вдоль которых аналитическая функция имеет нулевые граничные значения, для того, чтобы теорема единственности оставалась справедливой; 2) каковы теоремы единственности для аналитических функций в области G , ограниченной неспрямляемой кривой. Наиболее существенный успех был достигнут в 1959 г. Е. П. Долженко. Он дал полную характеристику упомянутого семейства кривых и рассмотрел теоремы единственности для аналитических функций в области, ограниченной неспрямляемой жордановой кривой.

3

Классы аналитических функций в единичном круге

Из теоремы Плеснера вытекает, что произвольная аналитическая функция вблизи своих граничных точек имеет чрезвычайно сложную природу. Для того чтобы аналитическая функция вблизи границы обладала более или менее регулярным поведением, приходится выделять некоторые подклассы аналитических функций.

В 1914 г. Харди впервые рассмотрел класс $H_p, p > 0$, аналитических функций $F(z)$ в G_1 , удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(re^{ix})|^p dx \leq H(F) < +\infty, \quad 0 \leq r < 1.$$

Затем в 1922 г. Островский ввел класс A аналитических функций в G_1 , удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |F(re^{ix})| dx \leq A(F) < +\infty, \quad 0 \leq r < 1.$$

Он доказал, что если $F(z) \in A$, то почти для всех $t \in \Gamma_1$ существуют угловые граничные значения $F^+(e^{ix})$ и

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ |F^+(e^{ix})| dx < +\infty.$$

В 1923 г. Р. Неванlinna рассмотрел класс N аналитических функций в G_1 , представимых в виде отношения двух ограниченных аналитических функций, и установил, что классы N и A совпадают. Одно из первых достаточных условий принадлежности аналитической функции $F(z)$ к классу H_p было установлено в 1925 г. А. Н. Колмогоровым. А именно: $F(z) \in H_p$, $0 < p < 1$, если

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} F(re^{ix})| dx = M(F) < +\infty.$$

В 1927 г. М. Рисс доказал, что $F(z) \in H_p$, $p > 1$, если

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} F(re^{ix})|^p dx = M(F) < +\infty.$$

Характерные свойства аналитических функций классов A и H изучил (1928 г.) В. И. Смирнов. Он раскрыл структуру функций классов A , H_p и получил их параметрическое представление, ввел класс D аналитических в G_1 функций $F(z)$, для которых семейство функций $\left\{ \int_0^x \ln^+ |F(re^{it})| dt \right\}$ является равностепенно абсолютно непрерывным при $0 < r < 1$ и $0 \leq x \leq 2\pi$, установил, что если $F(z) \in H_p$, $q > p$, и $|F(e^{ix})|^q$ суммируется, то $F(z) \in H_q$. Структурную характеристику функций класса D дал Г. Ц. Тумаркин.

П. Я. Кочиной принадлежит теорема: для того чтобы функция $F(z)$ класса A принадлежала к классу H_p , необходимо и достаточно, чтобы функция $|F(e^{iv})|^p$ была суммируемой и

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \ln^+ |F(re^{ix})| dx = \int_0^{2\pi} \ln |F(e^{ix})| dx.$$

Н. Н. Лузин обнаружил (1930 г.) интересное геометрическое свойство функций класса H_2 , а именно: если $F(z) \in H_2$, то почти для всех $t \in \Gamma_1$ найдется внутри G_1 область G_t , граница которой касается Γ_1 в точке t и

$$\iint_{G_t} |F'(re^{ix})|^2 dx dy < +\infty,$$

иначе говоря, площадь образа $F(G_i)$ — конечное число. Этот результат Лузина получил широкое развитие в зарубежной литературе.

В. П. Хавин изучил (1959 г.) порядок роста модуля $M(z) = \max_{|z|=r} |F(z)|$ функции $F(z)$ класса H_p .

М. М. Джрбашян ввел (1966 г.) класс мероморфных функций N_α , $-1 < \alpha < \infty$. Класс N_0 совпадает с классом Неванлинны N . Для функции класса N_α им доказаны теоремы единственности, параметрического представления и другие, являющиеся существенным обобщением результатов Неванлинны о функциях ограниченного вида. Граничные свойства функций из класса Джрбашяна изучены в работах М. М. Джрбашяна, а также его учеников И. О. Хачатряна, В. С. Захаряна и др.

4

Классы аналитических функций в области

Классы аналитических функций в односвязной области G , ограниченной спрямляемой кривой Γ , впервые были рассмотрены в 1932 г. В. И. Смирновым.

Пусть $z = \varphi(w)$ осуществляет конформное отображение круга $|w| < 1$ на область G и $\Gamma_r = \varphi(C_r)$, где C_r — окружность $|w| = r < 1$. По определению Смирнова, аналитическая функция $F(z)$ принадлежит к классу $E_p(G)$, $p > 0$, если

$$\int_{\Gamma_r} |F(z)|^p |dz| \leq C(F) < +\infty. \quad (1)$$

Смирнов доказал равносильность последнего условия требованию, чтобы функция $F[\varphi(w)][\varphi'(w)]^{1/p}$ принадлежала к классу H_p в круге $|w| < 1$, и благодаря этому установил, что любая функция $F(z) \in E_p(G)$, $p > 0$, имеет почти всюду на Γ конечные угловые граничные значения и

$$\int_{\Gamma} |F^+(t)|^p |dt| < +\infty.$$

Кроме того, он обнаружил, что основные свойства функций класса $E_p(G)$, $p > 0$, тесно связаны с природой самой области G , а именно: если $F(z) \in E_p(G)$, то из неравенства $|F(t)| < C$, $t \in \Gamma$, почти для всех $t \in \Gamma$ следует неравенство $|F(z)| < C$, $z \in G$, тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\ln |\varphi'(w)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\varphi'(e^{i\vartheta})| P(r, \vartheta - \varphi) d\vartheta, \quad (2)$$

где $w = re^{i\varphi}$, а $P(r, u)$ — ядро Пуассона. Равенство (2) ныне называют условием Смирнова, а односвязную область, удовлетворяющую

условию Смирнова, — областью класса S . Этот класс областей играет важную роль в изучении аналитических функций класса $E_p(G)$. Именно в случае таких областей, как показал В. И. Смирнов, для функций класса $E_p(G)$, $p > 0$, сохраняются основные свойства функций класса H_p , $p > 0$.

Впоследствии, в 1937 г., М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев заметили, что в определении (1) класса $E_p(G)$ вместо всех кривых Γ_r , $0 < r < 1$, достаточно рассмотреть лишь некоторую последовательность спрямляемых кривых, сходящихся к Γ и таких, что

$$\int_{\Gamma_n} |F(z)|^p |dz| \leq C(F) < +\infty,$$

причем кривые Γ_n могут быть для различных функций различными. Кроме того, они установили существование областей со спрямляемыми границами, не принадлежащих к классу S . В 1936 г. М. А. Лаврентьев получил ряд достаточных условий для того, чтобы область принадлежала к классу S . В частности, он доказал, что если граница Γ области удовлетворяет условию

$$|\sigma(t_1, t_2)| \leq k|t_1 - t_2|, \quad t_1, t_2 \in \Gamma,$$

где $\sigma(t_1, t_2)$ — наименьшая дуга линии Γ с концами t_1, t_2 , то $G \in S$.

Классы аналитических функций, определенные в полуплоскости и аналогичные классам A , D и H_p , рассматривались (1939 г.) В. И. Крыловым, изучившим граничные свойства функций этих классов. Подобные вопросы рассмотрел (1947 г.) М. Г. Крейн, установивший, в частности, необходимые и достаточные условия для того, чтобы целая функция $F(z)$ имела гармоническую мажоранту в полуплоскости. Вопросы, касающиеся существования угловых граничных значений и представления аналитических функций в полуплоскости через сингулярные интегралы, рассмотрены (1964 г.) также А. Г. Джваршейшвили.

Для случая, когда G представляет конечносвязную область, указанные выше классы функций, аналитических в G , изучались (1958—1960 гг.) Г. Ц. Тумаркиным и С. Я. Хавинсоном. Ими рассмотрены различные возможные способы определения классов, установлены взаимоотношения между ними, а также изучены классы функций, определенных в многосвязных областях с неспрямляемыми, вообще говоря, границами.

Аналитическая функция $F(z)$ принадлежит к классу $H_p(G)$ или $A(G)$, если функция $\ln^+ |F(z)|$ или $|F(z)|^p$ имеет гармоническую мажоранту в G . Функция $F(z)$ принадлежит к классу $E_p(G)$, если су-



С. Я. Хавинсон.

ществует последовательность спрямляемых кривых Γ_n , сходящихся к Γ так, что

$$\int_{\Gamma_n} |F(z)|^p |dz| \leq C(F) < +\infty.$$

Г. Ц. Тумаркиным и С. Я. Хавинсоном найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция $F(z)$ принадлежала к тому или иному классу. Доказана теорема разложения: если $G = \sum_{k=1}^n G_k$,

где G_k — односвязная область, то $F(z) = \sum_{k=1}^n F_k(z)$, причем $F_k(z)$ — функция того же класса на G_k , что и $F(z)$ на G . Однако, как показали Тумаркин и Хавинсон, теорема разложения не справедлива, если граница области G — неспрямляемая кривая, а $F(z) \in E_p(G)$. Тумаркин и Хавинсон изучили также различные возможные способы определения класса S многосвязных областей и установили эквивалентность между ними. В их работах обобщены основные результаты В. И. Смирнова, П. Я. Кочкиной, М. Рисса, Г. Сеге и др.

Изучая граничные свойства аналитических функций в области G с неспрямляемой границей, Г. Ц. Тумаркин и С. Я. Хавинсон используют гармоническую меру и вместо угловых граничных значений рассматривают асимптотические значения, ибо при конформном отображении области G на круг множество точек, достижимых углами, может перейти во множество меры нуль. Примеры таких областей были построены В. Н. Вениаминовым (1925 г.) и М. А. Лаврентьевым (1927 г.).

Дальнейшие исследования функции указанных классов проводились В. А. Зморовичем, С. А. Касьянюком и Л. Е. Дундученко. В частности, В. А. Зморович построил (1958 г.) аналог произведения Бляшке для случая многосвязной области.

5

Граничные свойства интегралов типа Коши.

Особые интегралы

Пусть Γ — некоторая плоская линия, а $\varphi(t)$ — интегрируемая функция, заданная на ней. Следуя Ю. В. Сохоцкому, будем называть Γ линией разрыва интеграла типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt. \quad (3)$$

При некоторых общих предположениях относительно линии разрыва и плотности $\varphi(t)$ интеграла типа Коши всюду или почти всюду на Γ справедливы формулы

$$2\Phi^+(t_0) = \varphi(t_0) + S\varphi(t_0), \quad (4)$$

$$2\Phi^-(t_0) = -\varphi(t_0) + S\varphi(t_0), \quad (5)$$

где

$$S\varphi(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt, \quad t_0 \in \Gamma. \quad (6)$$

В последнем равенстве несобственный интеграл понимается в смысле главного значения Коши. Такие интегралы обычно называют особыми, или сингулярными, интегралами.

Весьма важные формулы (4) и (5) впервые были установлены (1873 г.) Ю. В. Сохоцким. Вернее, им была установлена формула (4) и формула

$$\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \varphi(t_0), \quad (7)$$

когда Γ — прямолинейный отрезок, а z стремится к t_0 по нормали к Γ . Интересно, что условие, которому подчиняет Ю. В. Сохоцкий плотность $\varphi(t)$, по существу является условием Гельдера⁴ с показателем α (в дальнейшем это условие будем обозначать H_α или просто H), к которому так часто прибегают и ныне при изучении свойств интегралов типа Коши.

Результат Ю. В. Сохоцкого, к сожалению, остался незамеченным не только зарубежными, но и отечественными математиками. Спустя 35 лет после его опубликования формулы (4) и (5) снова были установлены и строго обоснованы Племельем для случая, когда Γ — замкнутая гладкая линия, а $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H . Племель доказал также, что если на прямой, проходящей через t_0 и не касающейся Γ в t_0 , взять две точки z_1 и z_2 , соответственно слева и справа от t_0 , на равных расстояниях от t_0 и под $\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0)$ понимать предел разности $\Phi(z_1) - \Phi(z_2)$, когда $z_1 \rightarrow t_0$ и $z_2 \rightarrow t_0$, то равенство (7) выполняется, если $\varphi(t)$ — непрерывная функция. Это последнее предположение было доказано в 1916 г. В. В. Голубевым в более общих предположениях, а именно: когда Γ — спрямляемая линия и $\varphi(t)$ — суммируемая функция. Понятно, что в этом случае равенство выполняется почти всюду.

В 1918 г. И. И. Привалов доказал теорему (основная лемма Привалова для интегралов типа Коши), устанавливающую непосредственную связь между граничными значениями интеграла типа Коши и особых интегралов (6). Она заключается в следующем: если Γ — простая спрямляемая линия, а $\varphi(t)$ — суммируемая на Γ , то почти для всех $t_0 \in \Gamma$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t - z} dt - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt \right\} = \pm \pi i \varphi(t_0), \quad (8)$$

где $z = t_0 \pm i\varepsilon \exp[i(\alpha_0 + \psi_0)]$, α_0 — угол между касательной к Γ в точке t_0 и осью абсцисс, ψ_0 — угол наклона отрезка zt_0 к нормали, Γ_ε — часть линии Γ , остающаяся после удаления дуги с концами $t(s_0 + \varepsilon)$, $t(s_0 - \varepsilon)$ и содержащая t_0 , а в обозначении $t(s)$ под s понимается дуговая абсцисса точки t , т. е. длина дуги, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки на Γ . Равенство (8) выполняется рав-

⁴ $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq \text{const } |t_1 - t_2|^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$.

номерно относительно ψ_0 , $|\psi_0| \leq \frac{\pi}{2} \theta$, $\theta < 1$. В 1940 г. эта теорема была обобщена И. И. Приваловым для интеграла типа Коши — Стильеса.

Как известно, выражение (3) называется интегралом Коши, если почти всюду на Γ $\Phi^+(t) = \varphi(t)$. Следовательно, интеграл Коши восстанавливает внутренние значения аналитической функции по ее граничным значениям. В. В. Голубев нашел (1916 г.) достаточные условия для того, чтобы интеграл типа Коши (3) был интегралом Коши, а затем И. И. Привалов показал (1918 г.), что условия Голубева являются также необходимыми. Г. М. Фихтенгольц установил (1929 г.), что функция $\Phi(z)$, аналитическая в G_1 , представима интегралом Коши (Коши — Стильеса) тогда и только тогда, когда $\Phi(z) \in H_1$. Г. М. Голузин и В. И. Крылов получили (1933 г.) формулу, позволяющую восстановить значения аналитической функции $\Phi(z) \in H_1$ по ее граничным значениям на множестве положительной меры. В. И. Смирнов доказал (1928 г.), что если граничная функция интеграла типа Коши суммируема, то его можно представить интегралом Коши. Однако граничная функция интеграла Коши (когда $\varphi(t)$ лишь суммируема), вообще говоря, несуммируема.

Для изучения свойств интеграла типа Коши П. Л. Ульянов привлек (1956 г.) понятие A -интеграла. Он показал, что функция, представляемая интегралом типа Коши, всегда представима A -интегралом Коши. А. Г. Джваршейшвили (1966 г.) и Г. А. Хускивадзе (1961—1964 гг.) распространили результат П. Л. Ульянова на различные процессы интегрирования.

Г. Ц. Тумаркин установил (1956 г.) необходимые и достаточные условия представимости функций интегралом типа Коши — Стильеса. В другой форме аналогичные условия были указаны (1958 г.) В. П. Хавиным.

Интегральное представление функции, аналитической в односвязной области G со спрямляемой границей, было рассмотрено (1932 г.) В. И. Смирновым. Им доказано, что класс аналитических функций, представимых интегралом Коши, совпадает с классом $E_1(G)$, а класс функций $\Phi(z)$, представимых формулой Грина

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \Phi^+(t) \frac{\partial g(t, z)}{\partial n} ds,$$

совпадает с классом $H_1(G)$, где $g(t, z)$ — функция Грина для области G . Для случая, когда G является многосвязной областью, интегральное представление аналитических функций исследовалось (1958—1960 гг.) в совместных работах Г. Ц. Тумаркина и С. Я. Хавинсона. Сходные вопросы для полуплоскости изучены (1939 г.) В. И. Крыловым.

Из основной леммы Привалова вытекает, что исследование существования граничных значений интеграла типа Коши и установление свойств его граничной функции сводятся к изучению соответствующих вопросов для особого интеграла. При одних и тех же предположениях

относительно плотности $\varphi(t)$ свойства особого интеграла существенно зависят от ограничений, налагаемых на линию разрыва Γ .

И. И. Привалов доказал (1918 г.), что когда $\varphi \in H_\alpha$, то особый интеграл

$$g(s_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(s) \operatorname{ctg} \frac{s-s_0}{2} ds \quad (9)$$

принадлежит к классу H_α при $0 < \alpha < 1$ и к классу $H_{1-\varepsilon}$ при $\alpha = 1$, где ε — сколь угодно малое положительное число⁵. В случае, когда Γ — окружность единичного радиуса с центром в начале координат, интеграл (9) отличается от особого интеграла (6) лишь постоянным слагаемым. Из этого замечания и указанной выше теоремы как простое следствие Привалов выводит соответствующее предложение для граничной функции интеграла типа Коши (3), когда Γ — окружность, а $\varphi(t) \in H_\alpha$. Этот результат он обобщил (1939 г.) на случай, когда Γ — простая кусочно-гладкая линия без точек возврата. Н. И. Мусхелишвили показал, что этот результат остается справедливым и для случая, когда Γ — любая простая кусочно-гладкая линия, которая может иметь и точки возврата⁶.

Теорему Привалова об особом интеграле (9) обобщил (1924 г.) Зигмунд. Он показал, что если $\omega(\delta)$ и $\omega_1(\delta)$ — модули непрерывности соответственно функций $\varphi(s)$ и $g(s)$, то выполняется неравенство

$$\omega_1(\delta) \leq C \left(\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t} dt + \delta \int_\delta^\pi \frac{\omega(t)}{t^2} dt \right), \quad (10)$$

где C — постоянная. Л. Г. Магнарадзе установил (1947 г.) аналог неравенства Зигмунда (10) для случая, когда вместо интеграла (9) рассматривается интеграл (6), в котором Γ — гладкая или кусочно-гладкая простая линия. Этот результат дал ему возможность выделить класс непрерывных функций, инвариантный относительно оператора (6) и более общий, чем класс H . Л. Г. Магнарадзе ввел и изучил (1965 г.) также весьма общие особые интегралы Стильеса, которые как частный случай заключают особые интегралы (6). В частности, для упомянутых особых интегралов Стильеса он установил аналог неравенства Зигмунда.

Наиболее исчерпывающий результат, касающийся оценки модуля непрерывности особого интеграла через модуль непрерывности плотности этого интеграла в случае окружности, получили в совместной работе (1956 г.) Н. К. Бари и С. Б. Стечкин. Их результаты были

⁵ Заметим, что еще в 1906 г. Фату доказал, что если $\varphi \in H_\alpha$, то $g \in H_{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$.

⁶ Н. И. М у с х е л и ш в и л и. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. Изд. 2-е. Физматгиз, М., 1962, добавление II.

обобщены на некоторые классы негладких кривых в работах (1963—1966 гг.) А. А. Бабаева и В. В. Салаева.

Другие обобщения теоремы Привалова приведены в работах С. Я. Альпера, М. Б. Гагуа, Я. Л. Геронимуса, Т. Г. Гегелиа, Н. А. Давыдова. В частности, Н. А. Давыдов указал некоторые достаточные условия, которым должны удовлетворять линия Γ и плотность $\varphi(t)$ для того, чтобы интеграл типа Коши (3) представлял функцию, непрерывную вплоть до Γ .

Н. И. Мухелишвили изучил (1941 г.) поведение интеграла типа Коши и особого интеграла вблизи фиксированной граничной точки (концы линии интегрирования, кратные точки или точки разрыва плотности.) Некоторые обобщения его результатов получили А. И. Гусейнов (1948 г.) и И. М. Мельник (1956—1957 гг.)

Для случая, когда плотность $\varphi(t)$ суммируема, еще в 1918 г. И. И. Приваловым было установлено, что интеграл типа Коши (3) почти всюду на Γ имеет конечные угловые граничные значения, если Γ — простая спрямляемая линия, состоящая из конечного числа дуг определенной вогнутости. Следовательно, при этих предположениях почти всюду на Γ конечен и особый интеграл (6), в частности, если $\varphi(t)$ суммируема, почти всюду конечен особый интеграл (9). На вопрос, составляют ли значения особого интеграла суммируемую функцию, Н. Н. Лузин дал (1915 г.) отрицательный ответ. Он показал, что существует такая суммируемая функция $\varphi(s)$, что $g(s)$ не суммируема ни на какой дуге пути интегрирования. Кроме того, ему удалось показать, что если в формуле (9) $\varphi(s) \in L_2(0, 2\pi)$, т. е. $\varphi(s)$ суммируема с квадратом, то $g(s)$ принадлежит к этому же классу $L_2(0, 2\pi)$. Позднее (1925 г.) А. Н. Колмогоров доказал, что если $\varphi(t)$ суммируема, то для любого $p \in (0, 1)$

$$\int_{\Gamma_1} |S\varphi(t)|^p |dt| \leq C_p \int_{\Gamma_1} |\varphi(t)| |dt|,$$

где $C_p > 0$ не зависит от функции $\varphi(t)$. М. Риссу удалось получить (1928 г.) важное обобщение результата Лузина — Колмогорова: если $\varphi(t) \in L_p(\Gamma_1)$, $p > 1$, то

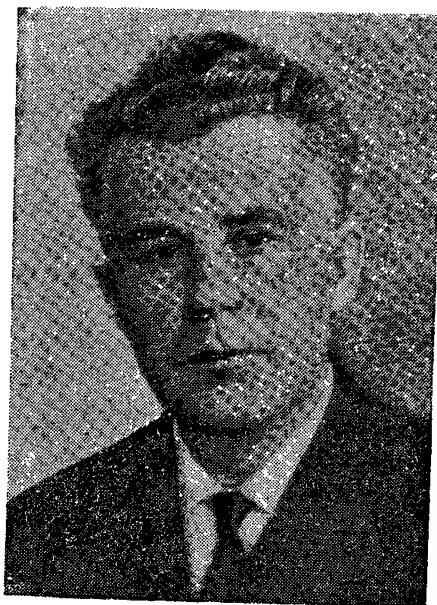
$$\int_{\Gamma_1} |S\varphi(t)|^p |dt| \leq C_p \int_{\Gamma_1} |\varphi(t)|^p |dt|,$$

где $C_p > 0$ не зависит от функции $\varphi(t)$. Обобщения результата Рисса на случай суммируемых p -й степени функций с некоторым весом даны в работах Н. И. Ахиезера (1945 г.), К. И. Бабенко (1958 г.), В. Ф. Гапошкина (1958 г.) и Л. В. Жижиашвили (1960 г.).

Б. В. Хведелидзе показал (1947 г.), что указанный результат Привалова, а также результат Лузина — Рисса остаются справедливыми и в случае особого интеграла (6), когда Γ — линия Ляпунова⁷. Впоследствии справедливость этих результатов была установлена и для более

⁷ Иными словами, когда угол наклона касательной к Γ удовлетворяет условию Гельдера.

широких классов линий, чем класс Ляпунова, — в работах С. Я. Альпера, А. Г. Джваршейшвили, Г. Ц. Тумаркина, В. П. Хавина, Г. А. Хускивадзе, Э. Г. Гордадзе. Наиболее общий результат в смысле существования особого интеграла (6) с суммируемой плотностью получил (1965 г.) В. П. Хавин. Он доказал, что особый интеграл существует почти всюду на Γ , если $\varphi \in L(\Gamma)$ и $[\omega(\sigma)]^2 \sigma^{-1}$ интегрируема на интервале $(0, \varepsilon)$, где $\omega(\sigma)$ — интегральный (квадратичный) модуль непрерывности угла наклона касательной к Γ , а ε — сколь угодно малое положительное число. Но этому условию, вообще, не удовлетворяет не только спрямляемая, но и гладкая линия. До сих пор остается открытым вопрос о существовании особого интеграла (6) почти всюду на Γ в случае суммируемой плотности, когда Γ — любая спрямляемая (или даже гладкая) линия. Как отмечалось выше, если $\varphi(t) \in L(\Gamma)$, то особый интеграл (6), вообще говоря, не является суммируемым. Поэтому, естественно, возникла необходимость применять для изучения особого интеграла более общие процессы интегрирования, чем процесс Лебега. В этом направлении также были получены результаты. Например, А. Н. Колмогоров показал (1928 г.), что если $\varphi(t) \in L(\Gamma)$, то особый интеграл (9) является B -интегрируемой функцией на Γ_1 , а Титчмарш установил (1929 г.), что этот же интеграл является и A -интегрируемой функцией. Систематическому применению понятия A -интеграла, а также других аналогичных общих процессов интегрирования для изучения интегралов типа Коши посвящены работы П. Л. Ульянова, А. Г. Джваршейшвили и Г. А. Хускивадзе.



Н. А. Давыдов.

6

Граничные свойства производной аналитических функций

При изучении граничных значений функций, осуществляющих конформное отображение области на круг, возникают вопросы, связанные с поведением производной этой функции вблизи границы. Эти вопросы с геометрической точки зрения впервые (1927 г.) рассмотрел М. А. Лаврентьев. Затем они были изучены М. А. Лаврентьевым совместно с П. А. Бессоновым (1930 г.) и В. К. Гольцманом (1931 г.). В их работах получены достаточные условия для существования n -й граничной производной, отображаю-

щей функции $w = \varphi(z)$. Аналогичные вопросы были рассмотрены И. И. Приваловым (1918 г.) и В. И. Смирновым (1932 г.). В частности, Привалов доказал, что из одной спрямляемости кривой Γ вытекает абсолютная непрерывность функции $w = \varphi(z)$ на окружности и существование отличной от нуля производной почти во всех точках окружности, т. е. почти всюду на окружности имеет место консерватизм углов. Однако приведенная теорема теряет силу, если граница Γ — простая жорданова кривая.

В. Н. Вениаминов исследовал (1925 г.) условия, при которых имеет место консерватизм углов в точках границы области. Он же построил пример области ограниченной замкнутой простой кривой, для которой консерватизм углов отсутствует почти во всех точках окружности.

Е. П. Долженко обобщил (1965 г.) указанные результаты на случай произвольных аналитических функций. Он рассмотрел обобщенные производные и изучил влияние локальной гладкости граничной функции вдоль границы на локальную гладкость аналитической функции, но уже относительно замкнутой области.

Изложенные вопросы тесно связаны с граничными свойствами аналитических функций, представленных интегралами Пуассона или типа Коши.

Первый результат, касающийся поведения вблизи граничной точки производной интеграла Пуассона, получил (1906 г.) Фату. Затем были получены различные обобщения теоремы Фату, среди которых выделяется результат (1934 г.) А. И. Маркушевича. Он заключается в следующем: если

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) P(r, \vartheta - x) d\vartheta, \quad z = re^{ix}, \quad 0 < r < 1,$$

и в точке ϑ_0 функция $\varphi(\vartheta)$ имеет производную $\varphi'_E(\vartheta_0)$ по множеству E , то, для того чтобы выполнялось равенство

$$\lim F'(z) = \varphi'_E(\vartheta_0),$$

когда $z \rightarrow e^{i\vartheta_0}$ по некасательным направлениям, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\varepsilon)^{-2} |CE \cap (\vartheta_0 - \varepsilon, \vartheta_0 + \varepsilon)| = 0.$$

В работах (1966 г.) А. Г. Джваршейшвили рассмотрены граничные свойства продифференцированного интеграла типа Коши, найдены достаточные условия, при которых существуют угловые граничные значения, а также получена формула для граничных значений.

Основные граничные задачи теории аналитических функций

Введем одно определение, необходимое для дальнейшего изложения. Пусть Γ — некоторая линия, а $\Phi(z)$ — функция, голоморфная в каждой конечной области плоскости z , не содержащей точек линии Γ . Пусть, далее, функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима⁸ на Γ слева и справа (относительно выбранного положительного направления на Γ), а вблизи конечного множества точек $\{c\}$ на Γ удовлетворяет условию

$$|\Phi(z)| < \frac{C}{|z-c|^\alpha}, \quad (11)$$

где c — точка упомянутого множества, C и α — некоторые положительные постоянные, причем $\alpha < 1$. Такую функцию, следуя Н. И. Мусхелишвили, будем называть кусочно-голоморфной функцией с линией скачков (или разрыва) Γ .

В докторской диссертации Римана (1851 г.)⁹, в разделе о способах задания аналитической функции, указывается, что аналитическая функция $w = u + iv$ может быть определена в данной области, если на контуре области задано некоторое уравнение, связывающее значения u и v . По существу, здесь мы впервые встречаемся с граничной задачей теории функций комплексного переменного, когда требуется определить аналитическую функцию $w = \Phi(z)$ в области так, чтобы граничные значения ее вещественной и мнимой частей удовлетворяли на границе заданному условию вида

$$A(u, v) = 0. \quad (12)$$

В другой работе (1857 г.) Римана, в которой рассматриваются линейные дифференциальные уравнения с алгебраическими коэффициентами¹⁰, задача отыскания дифференциальных уравнений с заранее заданной группой монодромии сводится к решению следующей граничной задачи:

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t), \quad t \in \Gamma, \quad (13)$$

где $G(t)$ — заданная на Γ функция¹¹, а $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ — граничные значения искомых функций $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$, аналитических в областях,

⁸ Функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на точку $t \in \Gamma$, например, слева, если $\Phi(z)$ стремится к определенному конечному пределу $\Phi^+(t)$, когда z стремится к t по любому пути, оставаясь слева от t .

⁹ Б. Р и м а н. Основы общей теории функций одной комплексной переменной. — В кн.: Б. Р и м а н. Соч. Пер. с нем. ГИТТЛ, М. — Л., 1948, стр. 79.

¹⁰ Б. Р и м а н. Две теоремы общего характера, касающиеся линейных дифференциальных уравнений с алгебраическими коэффициентами. — В кн.: Б. Р и м а н. Соч., стр. 176.

¹¹ У Римана $G(t)$ — матрица с кусочно-постоянными элементами, а Φ^+ , Φ^- — векторы (случай ∞ многими неизвестными функциями).

на которые разбивается плоскость замкнутой линией. У Римана мы не находим какого-либо указания относительно методов решения таких задач.

В 1873 г. в Петербурге была издана докторская диссертация Ю. В. Сохоцкого «Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды». В ней, по существу, содержится решение следующей граничной задачи: пусть $g(t)$ — заданная на линии Γ функция; требуется найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$ с заданной главной частью¹² на бесконечности по граничному условию

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t), \quad (14)$$

которое удовлетворяется всюду на Γ , кроме, может быть, конечного множества точек. Эта задача представляет собой важный частный случай следующей задачи: требуется определить кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$ по граничному условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma, \quad (15)$$

где $G(t)$, $g(t)$ — заданные на Γ функции. Однородный случай последней задачи (т. е. случай, когда $g(t) = 0$) и есть задача (13), впервые сформулированная Риманом. Задачу (15), следуя Н. И. Мусхелишвили, будем в дальнейшем называть задачей сопряжения¹³.

Таким образом, первое решение одного важного частного случая сопряжения принадлежит Ю. В. Сохоцкому. Заслуживает особого внимания тот факт, что условия, которые он налагает на заданные и искомые элементы задачи, по существу совпадают с условиями, принимаемыми в большинстве случаев и в настоящее время, хотя некоторые его формулировки и доказательства не совсем строгие. Ю. В. Сохоцкий заложил основы метода, впоследствии оказавшегося самым плодотворным в исследовании граничных задач, — метода интегралов типа Коши. Рассмотренный им частный случай задачи сопряжения (т. е. задачу (14)) в дальнейшем мы будем называть задачей Сохоцкого.

Впервые решение однородной задачи сопряжения (13) было найдено (1905 г.) Гильбертом в предположении, что Γ — замкнутый аналитический контур и $G(t)$ обладает непрерывной второй производной по дуге. Решение задачи Гильберт свел к интегральному уравнению Фредгольма, составление которого требует нахождения функции Грина (соответствующей задаче Неймана) для областей, на которые разбивается плоскость линией Γ . Анализируя полученное уравнение, он установил результат альтернативного характера — разрешимость одной из двух задач с коэффициентом $G(t)$ или $\overline{G(t)}$. Гильберт рассмотрел задачу (13) и для двух пар искомых функций.

Газеман обобщил (1907 г.) результат Гильберта для задачи (13) на случай одной пары аналитических функций в предположении, что граничные значения искомых аналитических функций берутся в различ-

¹² У Ю. В. Сохоцкого главная часть равна нулю.

¹³ Часто эту задачу, следуя Д. Гильберту, называют задачей Римана.

ных точках контура, т. е. когда вместо граничного условия (13) рассматривается условие

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t) \Phi^-(t), \quad t \in \Gamma, \quad (16)$$

где $\alpha(t)$ — функция, взаимно однозначно отображающая контур Γ на себя и обладающая непрерывной второй производной по дуге. Граничные задачи, если в граничные условия входят граничные функции в различных точках контура, следуя Н. И. Мусхелишвили, будем называть задачами со смещением (или со сдвигом).

Метод, примененный Гильбертом для изучения однородной задачи сопряжения, довольно сложный. Более элементарное и полное решение однородной задачи сопряжения (13), в случае со многими неизвестными функциями, вскоре, в 1908 г., было дано Племельем. В этом же году в другой работе Племель показал, что задачу (13) в случае одной пары искомых аналитических функций можно решить эффективно в квадратурах, если $\ln G(t)$ — однозначная функция.

Карлеман свел (1922 г.) изучение одного класса сингулярных интегральных уравнений к неоднородной граничной задаче сопряжения (15) и наметил метод ее эффективного решения с помощью интегралов типа Коши.

Простейшим случаем задачи (12) является задача, в которой граничное условие имеет вид

$$a(t)u(t) + b(t)v(t) = c(t), \quad t \in \Gamma, \quad (17)$$

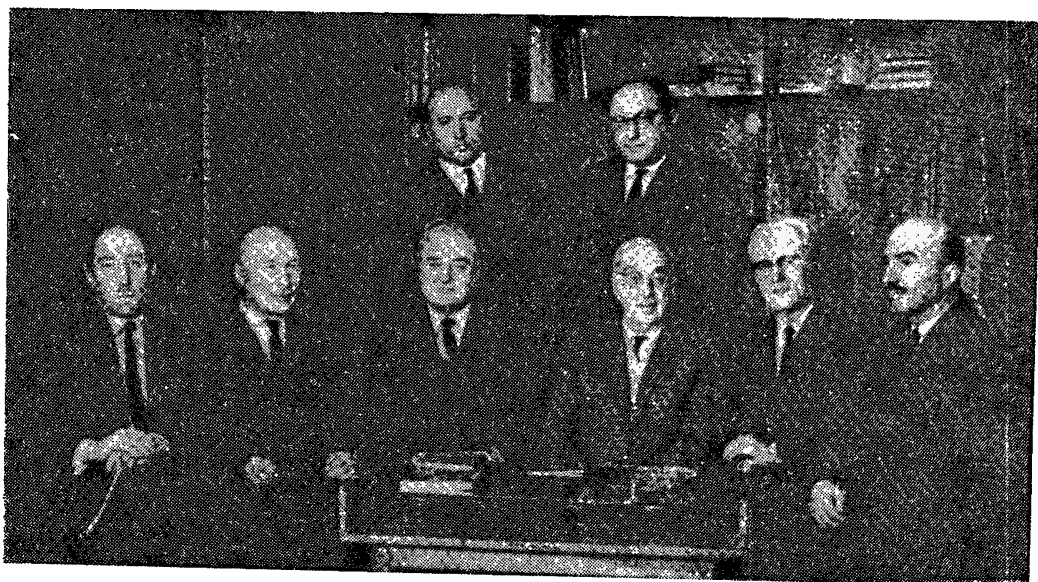
где действительные функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ заданы на границе области. Эту задачу, следуя Н. И. Мусхелишвили, будем называть задачей Римана — Гильберта¹⁴. Постановка задачи, а также первая попытка ее решения встречаются (1883 г.) у Вольтерра. Решение, ставшее отправным пунктом для дальнейших исследований, было дано Гильбертом (1905 г.). Предположив, что Γ — один замкнутый гладкий контур, а функции a , b , c имеют непрерывные первые производные по дуге, причем функции a , b одновременно не обращаются в нуль, Гильберт решил задачу (17) путем сведения ее к решению двух задач Дирихле. Затем (1907 г.) Газеман обобщил решение задачи (17), данное Гильбертом, на случай, когда коэффициенты, входящие в граничное условие, разрывны. Кроме того, он впервые рассмотрел задачу (17) для случая двух неизвестных функций.

Задача сопряжения является частным случаем следующего общего класса граничных задач: требуется определить аналитическую функцию $\Phi(z)$ на разрезанной вдоль линии Γ плоскости таким образом, чтобы ее граничные значения с обеих сторон линии Γ , а также граничные значения их нескольких производных удовлетворяли на Γ наперед заданному соотношению

$$A(t, \Phi^+, (\Phi^+)', \dots, (\Phi^+)^{(n)}, \Phi^-, (\Phi^-)', \dots, (\Phi^-)^{(m)}) = 0. \quad (18)$$

Задача Римана — Гильберта является частным случаем следующего общего класса граничных задач: требуется определить в данной

¹⁴ Часто, следуя Пикару, эту задачу называют задачей Гильберта.



Группа грузинских математиков. 1-й ряд (слева направо): Г. С. Чогошвили, Ш. Е. Микеладзе, И. Н. Векуа, Н. И. Мусхелишвили, В. Д. Купрадзе, Б. В. Хведелидзе; 2-й ряд: М. Ш. Микеладзе, Г. Ф. Манджавидзе. 1968 г.

области аналитическую функцию $\Phi(z) = u + iv$ таким образом, чтобы граничные значения функций u и v , а также граничные значения их нескольких производных удовлетворяли на границе области наперед заданному соотношению

$$B\left(s, u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \dots\right) = 0. \quad (19)$$

Это граничное условие можно записать также в виде

$$B_1(t, \Phi, \Phi', \dots, \Phi^{(n)}) = 0, \quad (20)$$

где $\Phi(t)$ — граничная функция функции $\Phi(z)$.

Рассмотренные выше граничные задачи относятся к задачам типа (18) или (19) и называются основными. Оба типа этих задач, как отмечалось, были поставлены Риманом. Граничную задачу с граничным условием (18), отличным от (15), будем называть задачей типа сопряжения, а задачу с граничным условием (19) или (20), отличным от (17), — задачей типа Римана — Гильберта.

Как известно, постановка граничных задач предполагает фиксацию определенного граничного условия, а также тех ограничений, которым должны удовлетворять заданные и искомые элементы задачи. Таким образом, одно и то же граничное условие порождает, как правило, весьма различные математические задачи. Рассмотрим в качестве примера задачу (15). Постановка ее существенно зависит от трех групп ограничений: 1) ограничений, налагаемых на контур Γ , несущий

щий граничные условия; 2) ограничений, налагаемых на известные функции $G(t)$ и $g(t)$, фигурирующие в граничном условии; 3) ограничений, налагаемых на граничные свойства искомых аналитических функций. В зависимости от последней группы ограничений разделим граничные задачи на три класса: а) непрерывные, если искомая функция непрерывна вплоть до границы Γ ; б) кусочно-непрерывные, если допустимо нарушение предыдущего условия только в конечном числе точек границы; в) разрывные во всех остальных случаях.

Указанные три группы ограничений должны быть определенным образом согласованы между собой, а также с тем аппаратом, который применяется для исследования задач. В работах Ю. В. Сохоцкого (1868 г.), Племеля (1908 г.), Карлемана (1922 г.), Н. И. Мусхелишвили (1922—1941 гг.), Ф. Д. Гахова (1937, 1938 гг.), И. Н. Векуа (1940—1942 гг.), Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа (1943 г.), являющихся основополагающими исследованиями граничных задач, приняты следующие ограничения: заданные функции в граничных условиях предполагаются непрерывными или кусочно-непрерывными в смысле Гельдера, контур Γ (иногда называемый граничной линией) предполагается простой гладкой линией (или конечной совокупностью взаимно непересекающихся линий, являющейся границей некоторой области), а неизвестная аналитическая функция — кусочно-голоморфной. Эти ограничения, накладываемые на заданные и неизвестные элементы граничных задач, обычно называют классическими ограничениями. В них все граничные задачи являются непрерывными или кусочно-непрерывными, причем искомая аналитическая функция $\Phi(z)$, как правило, представляется интегралом типа Коши с линией скачков Γ и некоторой целой главной частью $P(z)$ на бесконечности:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt + P(z). \quad (21)$$

Отсюда ясно, почему основным аппаратом исследования непрерывных и кусочно-непрерывных граничных задач является интеграл типа Коши. Искомая же функция в случае разрывных задач может обладать весьма разнообразными граничными свойствами, поэтому для нее, в общем случае, нельзя найти какие-либо удобные представления. Это затруднение можно обойти, если постановку данной разрывной граничной задачи ограничить возможностью представления искомых функций тем или иным удобным для исследования математическим аппаратом.

Первая постановка разрывной граничной задачи принадлежит И. И. Привалову. В 1934 г. на II Всесоюзном математическом съезде им был прочитан доклад «Об одной граничной задаче в теории аналитических функций». В докладе рассмотрена следующая задача. Дан спрямляемый простой замкнутый контур Γ и две комплексные, суммируемые на этом контуре функции $G(t)$, $g(t)$, причем $0 < m < |G(t)| < M$; требуется найти функции $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ соответственно внутри и вне контура Γ , представимые в этих областях интегралами Коши, угловые граничные значения которых почти всюду на Γ удовлетворяют соотношению (15). Предполагая, что $G(t)$ удовлетворяет условию Липшица,

Привалов свел решение задачи к интегральному уравнению Фредгольма, благодаря которому ему удалось высказать некоторые общие соображения о разрешимости поставленной им разрывной задачи (15).

8

Задача сопряжения

Непрерывные и кусочно-непрерывные задачи сопряжения.

В 1937 г. вышла в свет работа Ф. Д. Гахова «О краевой задаче Римана». В ней дано решение как однородной, так и неоднородной непрерывной задачи сопряжения в следующих предположениях: Γ — простая замкнутая гладкая линия, $G(t)$ и $g(t)$ — функции, удовлетворяющие условию Гельдера (условию H), причем $G(t) \neq 0$ всюду на Γ , а искомая аналитическая функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на каждую точку Γ с обеих сторон и аналитическая на бесконечности. Приведем полную формулировку установленных Ф. Д. Гаховым результатов¹⁵.

Пусть κ — индекс функции $G(t)$, т. е.

$$\kappa = \text{ind } G(t) = \frac{1}{2\pi} [\arg G(t)]_{\Gamma}, \quad (22)$$

где символом $[\]_{\Gamma}$ обозначено приращение выражения, заключенного в скобки, при обходе контура Γ . В случае $\kappa \geq 0$ неоднородная задача (15) разрешима при любом свободном члене и ее общее решение выражается формулой

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} [X^+(t)]^{-1} \frac{g(t)}{t-z} dt + X(z) P(z), \quad (23)$$

где $P(z)$ — произвольный полином степени κ , а

$$X(z) = \begin{cases} \exp h(z) & \text{внутри контура } \Gamma, \\ z^{-\kappa} \exp h(z) & \text{вне контура } \Gamma, \end{cases}$$

причем

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln [t^{-\kappa} G(t)] \frac{dt}{t-z}.$$

Функция $X(z)$ является решением однородной задачи (13). Она называется каноническим решением задачи (13) или канонической функцией для $G(t)$. Если $\kappa = -1$, то неоднородная задача (15) также разрешима и имеет единственное решение, получающееся из (23) при $P(z) = 0$. Если $\kappa < -1$, задача (15), вообще говоря, неразрешима. Для того чтобы она была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы свободный член удовлетворял $-\kappa - 1$ условиям

$$\int_{\Gamma} t^{k-1} [X^+(t)]^{-1} g(t) dt = 0, \quad k = 1, \dots, -\kappa - 1. \quad (24)$$

¹⁵ Эти результаты были распространены (1941 г.) на случай многосвязной области Б. В. Хведелидзе.

При выполнении последних условий единственное решение задачи выражается формулой (23), где следует положить $P(z) = 0$.

В приложениях чаще всего требуются решения задачи сопряжения, обращающиеся в нуль на бесконечности. В случае $\kappa \geq 0$ такие решения всегда существуют и представляются формулой (23), в которой $P(z)$ — произвольный полином степени $\kappa - 1$, если $\kappa > 0$, и $P(z) = 0$, если $\kappa = 0$. Если же $\kappa < 0$, то для существования исчезающего на бесконечности решения необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (24) при $k = 1, 2, \dots, -\kappa$.

Таким образом, в указанных предложениях Ф. Д. Гахов дал полное решение задачи сопряжения. При этом решение, если оно существует, строится им эффективно с помощью интегралов типа Коши. Метод, примененный Ф. Д. Гаховым для решения однородной задачи сопряжений, представляет собой дальнейшее существенное развитие метода Племелья, а для неоднородной задачи — метода Карлемана. Принципиально новым моментом в результатах Ф. Д. Гахова является установление условий разрешимости и изучение характера множественности решений задачи (15). Этот результат оказал большое влияние на дальнейшие исследования граничных задач.

Случай, когда Γ является конечной совокупностью разомкнутых линий, изучен Н. И. Мусхелишвили в работе «Приложение интегралов типа Коши к одному классу сингулярных интегральных уравнений» (1940 г.). Для исследования этого случая, существенно отличающегося от случая замкнутых линий, Мусхелишвили ввел функции класса H^* и изучил свойства интегралов типа Коши в предположении, что их плотности принадлежат к этому классу¹⁶.

Опираясь на указанные результаты и обобщая путь, намеченный Карлеманом, Н. И. Мусхелишвили с помощью интегралов типа Коши нашел эффективное решение кусочно-непрерывной задачи сопряжения (15) для случая, когда Γ является конечной совокупностью разомкнутых линий. Оказалось, что решение задачи сопряжения и в этом случае можно представить формулой (23) при соответствующем подборе функции $X(z)$ и, следовательно, получить окончательные результаты, аналогичные результатам в случае замкнутого Γ . Эти результаты Н. И. Мусхелишвили были положены в основу всех дальнейших исследований как кусочно-непрерывных задач сопряжения, так и сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши, когда искомая функция принадлежит к классу H^* . Результаты Н. И. Мусхелишвили были развиты им же и Д. А. Квеселава (1942 г.) с помощью введения специальных классов функций $h(c_1, c_2, \dots, c_k)$, которые являются подклассами класса H^* . Если $\varphi \in h(c_1, \dots, c_k)$, то это значит, что $\varphi \in H^*$ и она ограничена в окрестностях точек $c_1, \dots, c_k$.

Независимо от Н. И. Мусхелишвили решение задачи сопряжения для случая разомкнутых линий было дано Ф. Д. Гаховым в его

¹⁶ $\varphi(t) \in H^*$ на рассматриваемой линии, если она удовлетворяет условию Гельдера всюду, кроме конечного множества точек $\{c\}$, а вблизи точек c представима в виде $\varphi(t) = (t - c)^{-\alpha} \varphi_*(t)$, где $\varphi_*(t) \in H$, $0 \leq \alpha < 1$.

докторской диссертации (1942 г.). Им же было дано решение задачи для случая, когда коэффициент $G(t)$ в граничном условии (15) имеет в конечном множестве точек контура Γ разрывы первого рода¹⁷, а свободный член $g(t)$ имеет такие же разрывы или обращается в бесконечность порядка ниже первого. Исследование задачи при этих предположениях представляет большой интерес, так как в ней приводятся различного рода «смешанные» задачи.

Н. И. Мусхелишвили решает задачу, непосредственно используя свойства интегралов типа Коши в случае разомкнутых линий. Ф. Д. Гахов же соответствующим методом сводит случай разомкнутых линий, а также случай разрывных заданных функций к случаю замкнутой линии и непрерывных заданных функций. Следует отметить, что строгое обоснование последнего метода стало возможным благодаря результатам Н. И. Мусхелишвили об интегралах типа Коши с плотностью из класса H^* . В отмеченных работах Гахова и Мусхелишвили непрерывные и кусочно-непрерывные задачи сопряжения исследованы для случая одной неизвестной кусочно-голоморфной функции. Существенно, что в этом случае при классических предположениях решение задачи удалось построить эффективно с помощью интегралов типа Коши.

Вслед за изучением задачи сопряжения для случая одной неизвестной кусочно-голоморфной функции естественно было рассмотреть задачу и для случая нескольких неизвестных кусочно-голоморфных функций. Первым исследованием в СССР, в котором рассмотрена задача сопряжения для нескольких неизвестных функций, была работа Ф. Д. Гахова, опубликованная в 1938 г. В ней рассматривается неоднородная задача для упомянутого случая. В этой работе Ф. Д. Гахов исследует неоднородную задачу тем же методом, которым Племель весьма удачно изучил однородную задачу. Как выяснилось впоследствии, такой подход для решения неоднородной задачи оказался неоправданным.

В 1943 г. была опубликована совместная работа Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа, в которой впервые дано в непрерывном случае полное решение неоднородной задачи сопряжения для нескольких неизвестных кусочно-голоморфных функций. Эта работа послужила отправным пунктом всех дальнейших исследований граничных задач сопряжения в случае нескольких неизвестных функций.

В работе Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа задача сопряжения (15) рассмотрена в классических предположениях для случая, когда $G(t)$ — неособенная квадратная матрица, $g(t)$ — заданный вектор, $\Phi(z)$ — искомый кусочно-голоморфный вектор с линией разрыва Γ . Используя дальнейшее развитие результата Племеля, о котором упоминалось выше, авторы установили, что существует кусочно-голоморфная матрица $X(z)$ с линией разрыва Γ такая, что 1) всюду на Γ эта матрица удовлетворяет однородному граничному условию (13), 2) $X(z)$ —

¹⁷ Несколько позднее (1944 г.) эта задача с помощью метода Мусхелишвили была решена Д. А. Квеселава.

неособенная матрица всюду в конечной части плоскости, 3) если $-\kappa_1, -\kappa_2, \dots, -\kappa_n$ — порядки столбцов матрицы $X(z)$ на бесконечности, то $\det [X(z) \{z^{\kappa_1}, \dots, z^{\kappa_n}\}]$ имеет на бесконечности конечное значение, отличное от нуля (символ $\{ \}$ обозначает диагональную матрицу). Матрицу $X(z)$ авторы называют канонической матрицей, целые числа $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ — частными индексами, а их сумму $\kappa = \kappa_1 + \dots + \kappa_n$ — суммарным индексом задачи (13) или матрицы $G(t)$.

Н. И. Мусхелишвили получил следующую весьма важную формулу для вычисления суммарного индекса матрицы $G(t)$:

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} [\arg \det G(t)]_r. \quad (25)$$

В отличие от канонического решения (в случае одной неизвестной кусочно-голоморфной функции), каноническую матрицу нельзя построить эффективно в квадратурах¹⁸. В общем случае ($G(t)$ — произвольная неособенная матрица класса H) доказывается лишь существование $G(t)$, с использованием специальных интегральных уравнений Фредгольма, которые были впервые построены Племелем. Во втором издании монографии «Сингулярные интегральные уравнения» (1962 г.) Н. И. Мусхелишвили предложил новый, более простой путь для построения канонической матрицы. Упрощение достигается за счет того, что вместо приведения задачи к уравнениям Фредгольма, как это делает Племель, задача приводится к системе сингулярных интегральных уравнений, необходимые свойства которой установлены независимо от задачи сопряжения.

Что же касается неоднородной задачи сопряжения для нескольких неизвестных функций, то в работе Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа показано, что ее решение, если считать известным решение однородной задачи, можно построить с помощью интегралов типа Коши аналогично случаю одной неизвестной функции. Точнее, установлено, что решения неоднородной задачи представляются формулой (23), где $X(z)$ — каноническая матрица, а $P(z)$ — вектор, компоненты которого — произвольные полиномы. Кроме того, Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа установили необходимые и достаточные условия, которым должен удовлетворять вектор $g(t)$ для того, чтобы задача сопряжения имела исчезающие на бесконечности решения. Этот результат имеет важное значение в теории систем сингулярных интегральных уравнений.

Полное исследование кусочно-непрерывной задачи сопряжения (15) для случая нескольких неизвестных функций в предположении, что элементы матрицы $G(t)$ терпят разрывы первого рода в конечном множестве точек линии Γ , проведено впервые (1944—1950 гг.) Н. П. Векуа путем развития способа, предложенного в 1908 г. Племелем¹⁹. Для сведения разрывного случая к непрерывному Н. П. Векуа приводит матрицу коэффициентов в точке разрыва к канонической форме,

¹⁸ Построить эффективно каноническую матрицу удастся лишь при весьма жестких предположениях относительно элементов матрицы $G(t)$.

¹⁹ Племель рассмотрел однородную задачу (13) для случая, когда элементы матрицы $G(t)$ кусочно-постоянны.

после чего подбирает матрицу, устраняющую эти разрывы. Впоследствии (1952 г.) Ф. Д. Гахов, используя функции матриц, предложил способ, который не требует предварительного приведения матрицы коэффициентов в точках разрыва к канонической форме. Г. Ф. Манджavidze указал (1958—1960 гг.) новый способ для построения канонической матрицы как в случае, когда элементы матрицы $G(t)$ всюду удовлетворяют условию Гельдера, так и в случае разрывов указанного выше вида. Он построил каноническую матрицу с помощью процесса последовательных приближений, поэтому его способ дает возможность приближенно вычислять эту матрицу.

В названных выше работах непрерывные и кусочно-непрерывные задачи сопряжения полностью исследованы при указанных классических предположениях. К этим предположениям следует причислить также, в случае задачи сопряжения с одной кусочно-голоморфной функцией, предположение о том, что всюду на Γ

$$G(t) \neq 0, \quad (26)$$

а в случае нескольких неизвестных функций — о том, что всюду на Γ

$$\det G(t) \neq 0. \quad (27)$$

Л. Г. Магнарадзе показал (1947—1949 гг.), что во всех указанных выше результатах по непрерывным и кусочно-непрерывным задачам сопряжения класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера, можно заменить более широкими подклассами непрерывных функций.

Некоторые случаи нарушений условия (26) рассмотрены Ф. Д. Гаховым еще в первой его работе (1937 г.). Им изучен случай, когда $G(t)$ обращается в нуль или в бесконечность целого порядка в конечном множестве точек линии Γ . Затем этот случай более обстоятельно исследовал (1953 г.) Л. А. Чикин. Случай, когда $G(t)$ обращается в бесконечность или в нуль порядка ниже первого, рассмотрен Ф. Д. Гаховым (1949 г.) и Н. П. Векуа (1951 г.). Случай, когда функция $G(t)$ в окрестности точки c контура Γ имеет вид $(t - c)^{\gamma} \ln^p(t - c) G_0(t)$, исследован (1957—1959 гг.) И. М. Мельником. Предварительно им изучено поведение интеграла типа Коши с плотностью, имеющей в окрестности точки c указанное поведение. Случай нарушения условия (27) рассмотрен (1952 г.) Ф. Д. Гаховым в предположении, что $\det G(t)$ может иметь нули в конечном числе точек линии Γ и элементы матрицы $G(t)$ могут обращаться в бесконечность целого порядка в некотором также конечном числе точек. Оказалось, что наличие на Γ нулей определителя матрицы коэффициентов не влияет на число линейно независимых решений и число условий разрешимости задачи. Случай, когда $\det G(t) \equiv 0$, рассмотрен (1961 г.) Э. И. Зверовичем и Г. С. Литвинчуком. Задачу сопряжения для некоторых негладких линий исследовали Т. Г. Гегелиа (1952—1954 гг.), а затем А. Д. Алексеев (1960 г.) и А. А. Бабаев (1966 г.). Случай, когда линии, входящие в Γ , могут пересекаться, впервые (1946 г.) был рассмотрен Тшицинским, но его решение громоздко. Более простое исследование этого случая предложили Д. А. Квеселав

(1949 г.), Ф. Д. Гахов и Л. И. Чибрикова (1953 г.) и Т. Г. Гегелиа (1954 г.).

В 1950 г. в Тбилисском математическом институте на семинаре по интегралам типа Коши и его приложениям ²⁰ Н. И. Мусхелишвили сделал доклад, в котором показал, что результаты, полученные им при исследовании интегралов типа Коши и граничной задачи сопряжения для случая, когда Γ — простая гладкая разомкнутая линия, остаются в силе без каких-либо существенных изменений и в случае кусочно-гладких линий ²¹. Под этим понятием Мусхелишвили подразумевает конечную совокупность замкнутых и разомкнутых линий Γ_k , которые могут иметь конечное число общих точек. Каждую же из Γ_k по предположению можно разбить на конечное число гладких разомкнутых дуг. Эти результаты Н. И. Мусхелишвили изложены во втором издании его монографии «Сингулярные интегральные уравнения» (1962 г.).

Для случая, когда граничный контур Γ состоит из счетной совокупности линий, задача Сохоцкого при некоторых предположениях рассмотрена (1949 г.) И. Н. Карцивадзе и Б. В. Хведелидзе, а задача сопряжения — С. А. Фрейдкиным (1954 г.) и В. А. Пааташвили (1964 г.).

В классических предположениях индекс функции $G(t)$ в граничном условии (15) — целое число. Н. В. Говоров изучил (1964 г.) задачу сопряжения для одного из возможных случаев обращения индекса функции $G(t)$ в бесконечность. В его работе мы встречаемся с принципиально новыми моментами. В приведенных выше результатах Ф. Д. Гахова для случая конечного индекса число линейно независимых решений или условий разрешимости задачи сопряжения конечно и описывается некоторым многочленом с произвольными коэффициентами. В случае бесконечного индекса эти числа становятся, вообще говоря, бесконечными и множественность решений выражается посредством некоторой целой функции. Ее характер зависит от порядка роста индекса. Случаи роста степенного и логарифмического порядков исследовали Н. В. Говоров и Г. П. Юров.

Л. А. Чикин изучил (1956 г.) устойчивость задачи сопряжения по отношению к изменениям границы. Важный вопрос об устойчивости частных индексов задачи сопряжения для нескольких неизвестных функций рассмотрели И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн (1958 г.) и Б. В. Боярский (1958—1961 гг.). Они показали, что система частных индексов устойчива тогда и только тогда, когда разность между наибольшим и наименьшим частными индексами не превышает единицы.

Для изложения некоторых дальнейших результатов обозначим через $\alpha(t)$ функцию, заданную на Γ и отображающую взаимно однозначно Γ на себя, $0 \neq \alpha'(t) \in H$. Если при этом отображении ориентация сохранится, то будем называть $\alpha(t)$ прямым смещением, в противном случае — обратным смещением.

²⁰ Этот семинар Н. И. Мусхелишвили сыграл важную роль в развитии теории граничных задач.

²¹ Аналогичные результаты были получены (1960 г.) также Погожельским.

В 1946—1949 гг. Д. А. Квеселава рассмотрел следующие непрерывные граничные задачи со смещением:

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad (28)$$

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\overline{\Phi^-(t)} + g(t), \quad (29)$$

$$\Phi_1^+[\alpha(t)] = G(t)\Phi_2^+(t) + g(t), \quad (30)$$

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\Phi^+(t) + g(t), \quad (31)$$

где граничная линия Γ — простая замкнутая линия Ляпунова, $G(t)$, $g(t)$ — заданные на Γ функции, удовлетворяющие условию H и $G(t) \neq 0$. В задачах (28), (29) $\alpha(t)$ — прямое смещение, а в задачах (30), (31) — обратное, причем в задаче (31) $\alpha(t)$ дополнительно удовлетворяет еще условию

$$\alpha[\alpha(t)] = t. \quad (32)$$

Как упоминалось выше, еще в 1907 г. Газеман рассмотрел однородную задачу сопряжения (16) со смещением. Ему тогда удалось построить интегральное уравнение Фредгольма, к которому сводится задача, но это уравнение не было им исследовано. Затем (1932 г.) однородную задачу (31) рассмотрел Карлеман²². Сопоставив результаты Газемана и Карлемана с более поздними результатами, полученными в связи с решением задачи сопряжения (15), Д. А. Квеселава изучил задачи (28) — (31). Следует заметить, что в случае последних задач, в отличие от задачи (15), решение не строится эффективно с помощью интегралов типа Коши.

Л. И. Чибрикова и В. С. Рогожин установили (1952 г.), что с помощью некоторых подстановок задачи (29) — (31) могут быть сведены к задаче (28). Кусочно-непрерывная задача (28) в случае разомкнутой линии и разрывной $G(t)$ изучена (1952 г.) Л. И. Чибриковой, непрерывная задача (31) в многосвязной области — Э. И. Зверовичем (1964 г.).

Глубокая аналогия между результатами, полученными при изучении задач (15) и (28), наводит на мысль о непосредственной сводимости задачи со смещением (28) к обыкновенной задаче (15). Это предположение было доказано (1958 г.) Г. Ф. Манджавидзе и Б. В. Хведелидзе при дополнительном условии, что $\alpha(t)$ имеет вторую производную, принадлежащую к классу H . И. Б. Симоненко показал (1964 г.), что результат остается в силе и без этого дополнительного условия.

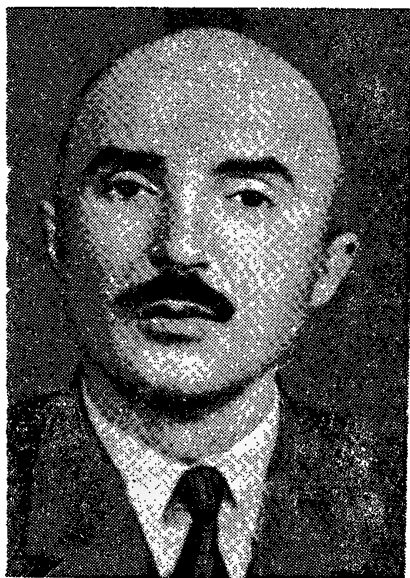
Непрерывную задачу (28) для нескольких неизвестных функций исследовал (1947 г.) Н. П. Векуа. Он показал, что в этом случае остаются в силе результаты, аналогичные полученным для соответствующей задачи без смещения.

Разрывные задачи сопряжения. Рассмотрим разрывную граничную задачу сопряжения в следующей постановке: найти функцию $\Phi(z)$, представимую интегралом типа Коши с линией скачков Γ и целой глав-

²² Поэтому ее иногда называют задачей Карлемана, а условие (32) — условием Карлемана.

ной частью на бесконечности, если ее угловые граничные значения удовлетворяют почти всюду на Γ условию (15), где $G(t)$ и $g(t)$ — заданные функции. Эта задача является некоторым обобщением разрывной задачи, о котором указывал (1934 г.) И. И. Привалов. Поэтому сформулированную разрывную задачу сопряжения будем называть задачей Римана — Привалова²³. Эта постановка задачи, а также ее первое исследование при некоторых ограничениях принадлежат (1947—1957 гг.) Б. В. Хведелидзе. Вначале Хведелидзе изучил интегралы типа Коши с плотностью из класса $L_p(\Gamma; \rho)$, т. е. случай, когда плотность суммируема на Γ в степени $p > 1$ с некоторым весом $\rho(t)$, а Γ представляет собой конечную совокупность замкнутых и разомкнутых взаимно непересекающихся линий Ляпунова. Затем он показал, что с помощью установленных свойств интегралов типа Коши и методов, развитых при решении кусочно-непрерывных задач, можно провести полное исследование задачи Римана — Привалова (15) для случая, когда $G(t)$ принадлежит к классу H или более широким подклассам непрерывных функций, кроме, может быть, конечного множества точек разрыва. При этом $g(t) \in L_p(\Gamma; \rho)$ и $\Phi^\pm(t) \in L_p(\Gamma; \rho)$, где $\rho(t)$ зависит от поведения функции $G(t)$ в точках разрыва. Оказалось, что при этих предположениях все решения задачи опять-таки представляются формулой (23). Отсюда вытекает важное следствие: если $G(t)$ и $g(t)$ в граничном условии (15) удовлетворяют классическим ограничениям, принятым в работе Н. И. Muskhelishvili и Ф. Д. Гахова, то любое решение задачи Римана — Привалова является кусочно-голоморфной функцией. Из этого результата в свою очередь был получен ответ на вопрос, поставленный Н. И. Muskhelishvili, о выяснении роли условий (11) при решении кусочно-непрерывной задачи сопряжения (15). Оказалось, что условия (11) эквивалентны требованию представимости искомой функции интегралом типа Коши.

Указанные результаты были обобщены в различных направлениях А. Д. Алексеевым (1966 г.), Э. Г. Гордадзе (1965 г.), А. Э. Драчинским (1963 г.), В. А. Пааташвили (1955 г.) и Г. А. Хускивадзе (1966 г.). А. Д. Алексеев изучил задачу Римана — Привалова (15) для случая, когда Γ — простая замкнутая спрямляемая линия, отношение любой хорды которой к наименьшей из стягиваемых ею дуг ограничено снизу, $G(t)$ удовлетворяет условию H , а $g(t)$ и плотность искомого интеграла



Б. В. Хведелидзе.

²³ Если от искомой функции требуется представимость интегралом Коши или типа Коши, то мы говорим, что граничная задача рассматривается в постановке Привалова.

типа Коши удовлетворяют условию Гельдера в метрике пространства $L_p(\Gamma)$, $p > 1$. Э. Г. Гордадзе показала, что контур Γ можно предполагать кусочно-гладким в смысле Ляпунова, А. Э. Драчинский и Г. Хускивадзе — что в ряде случаев класс L_p , $p > 1$, можно заменить классом L , В. А. Пааташвили рассмотрел случай, когда Γ — счетная последовательность замкнутых линий Ляпунова.

В приведенных результатах Б. В. Хведелидзе классы функций, допустимых в качестве решения и свободного члена задачи Римана — Привалова, значительно расширены по сравнению с соответствующими классами, принятыми в кусочно-непрерывной задаче сопряжения. При этом ограничения, налагаемые на коэффициент $G(t)$, те же, что и в кусочно-непрерывном случае. Естественно, возник вопрос о расширении класса функций, допустимых в качестве коэффициента $G(t)$ в задаче Римана — Привалова. Первый результат в этом направлении был получен в 1958 г. независимо друг от друга В. В. Ивановым, И. Б. Симоненко и Б. В. Хведелидзе. Показано, что в задаче Римана — Привалова коэффициент можно предполагать непрерывным. В этом же году Г. Ф. Манджавидзе и Б. В. Хведелидзе установили, что в задаче Римана — Привалова для нескольких неизвестных функций неособенную матрицу $G(t)$ можно также предполагать непрерывной. Они указали еще один способ эффективного построения в интегралах типа Коши всех решений задачи Римана — Привалова в случае одной неизвестной функции, когда $G(t)$ непрерывна.

Следующие весьма существенные шаги в направлении расширения класса допустимых функций для коэффициента $G(t)$ были сделаны в 1960 г. независимо друг от друга И. И. Данилюком и И. Б. Симоненко²⁴.

И. Б. Симоненко рассмотрел коэффициент $G(t)$ в классе функций, удовлетворяющих следующим условиям: 1) $G(t)$ измерима и $0 < m \leq |G(t)| \leq M$; 2) существует такое $\delta > 0$, что для каждой точки t контура Γ найдется окрестность, где значения $G(t)$ заключены в секторе раствора

$$\beta = \frac{2\pi - \delta}{\max(p, p')}, \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Для таких функций естественным образом определяется понятие приращения аргумента при обходе точки t вдоль Γ . Разделенное на 2π это приращение оказывается индексом задачи. И. Б. Симоненко исследовал (1964 г.) также случай нескольких неизвестных функций, когда элементы матрицы $G(t)$ являются измеримыми ограниченными функциями и $G(t)$ представима в виде произведения трех матриц, обладающих определенными свойствами.

И. И. Данилюк изучил коэффициент $G(t)$ в классе функций, удовлетворяющих следующим условиям (предполагается, что Γ — окружность): 1) функция $|G(t)|$ определена почти всюду на сегменте $[0, 2\pi]$, измерима и принадлежит к классу $L_{p_1}(0, 2\pi)$, а функция $|G(t)|^{-1}$ принадлежит к классу L_{p_2} , где p_1, p_2 — некоторые положительные числа;

²⁴ А также американским математиком Видомом (1960 г.).

2) можно построить такую однозначную ветвь функции $\text{Arg } G(t)$, что $\text{Arg } G(t) = \theta_0(t) + \theta_1(t) + \theta_2(t)$, где $\theta_0(t)$ — непрерывная функция в каждой точке сегмента $[0, 2\pi]$, $\theta_1(t)$ — функция ограниченной вариации на сегменте $[0, 2\pi]$, а $\theta_2(t)$ — измеримая на сегменте $[0, 2\pi]$ функция, удовлетворяющая почти всюду на этом сегменте условию $|\theta_2(t)| \leq \nu t$, где $\nu < 1$ — некоторое число. Следует заметить, что функции этого класса могут иметь в конечном числе точек скачки, превосходящие по абсолютному значению β . Оказывается, что в этом случае индекс задачи существенно зависит от наличия и количества таких точек. Некоторые аналогичные вопросы рассмотрены также в работах (1964 г.) В. А. Пааташвили.



Ю. И. Черский.

Расширить класс допустимых функций для $\Phi(z)$ в задачах Римана — Привалова можно с помощью более общих процессов интегрирования, чем процесс Лебега. Первые шаги в этом направлении сделаны в работах (1961—1966 гг.) Г. А. Хускивадзе.

Теория граничных задач аналитических функций послужила отправным пунктом для постановки и разработки некоторых важных задач в функциональном анализе и в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Примерами таких задач в функциональном анализе являются задача факторизации (М. Г. Крейн, И. Ц. Гохберг и др.), задача изучения специальных классов операторных уравнений, которые в определенном смысле представляют собой обобщения задачи сопряжения (З. И. Халилов, Ю. И. Черский и др.), в теории дифференциальных уравнений — граничные задачи: для систем уравнений первого порядка эллиптического типа (И. Н. Векуа и др.), для голоморфного вектора в евклидовом пространстве (А. В. Бицадзе и др.). Мы остановимся лишь на результатах, тесно связанных с задачей Римана — Привалова.

Ю. И. Черскому принадлежит (1957 г.) постановка и исследование абстрактного аналога задачи сопряжения. Он рассматривает уравнение

$$f_+ = Gf_- + g, \quad (33)$$

где g — заданный элемент линейного пространства, f_+ и f_- — искомые элементы этого же пространства, $f_+ = Sf_+$ и $f_- = -Sf_-$, G и S — линейные операторы, причем S^2 — единичный оператор. При некоторых предположениях относительно оператора G вводится понятие индекса задачи (33) и находятся все ее решения методом, который для абстрактного случая обобщает способ, применяемый для изучения задачи Римана — Привалова. В качестве одной из реализаций абстрактной теории Ю. И. Черский дал (1959 г.) решение задачи сопряжения (15)

в обобщенных функциях (функционалах над некоторым пространством основных функций). Несколько раньше (1956 г.) задачу сопряжения в обобщенных функциях рассматривал О. С. Парасюк. Он пришел к ней, изучая в классе обобщенных функций «парные» интегральные уравнения. Парасюк высказал тогда ряд замечаний о решении задачи (15) в одном классе обобщенных функций. Затем Ю. И. Черский дал полное решение задачи в некоторых классах обобщенных функций, причем обобщенные функции Φ^+ и Φ^- , так же как в случае задачи (33), характеризуются равенствами $\Phi^+ = S\Phi^+$, $\Phi^- = -S\Phi^-$, где S — некоторый оператор в пространстве обобщенных функций. Как дальнейшее развитие своих результатов он установил, что для рассмотренных пространств обобщенных функций сохраняются все результаты о разрешимости и числе линейно независимых решений в зависимости от индекса функции $G(t)$, хорошо известные для пространств обычных функций.

Изучение задачи сопряжения в классах обобщенных функций значительно продвинуто вперед в работах В. С. Рогожина (1961—1965 гг.). Обобщенные функции Φ^+ , Φ^- определяются здесь требованием, чтобы $(\Phi^+, \varphi^+) = 0$, $(\Phi^-, \varphi^-) = 0$, где φ^+ и φ^- — основные функции, являющиеся предельными значениями функций, аналитических соответственно в областях D^+ и D^- , на которые контур Γ разбивает плоскость, причем $\varphi^-(\infty) = 0$. В качестве основных пространств обычно рассматриваются либо S (бесконечно дифференцируемые функции), либо $L_p^{(n)}$ (функции, имеющие производные n -го порядка, принадлежащие пространству L_p). В. С. Рогожин строит теорию граничных задач на основе разложения заданных и искомых функций в ряды Фурье. Ему удалось установить следующий важный факт. Обобщенная функция $\Phi^+(z)$ является пределом (в смысле сходимости в пространстве обобщенных функций) последовательности граничных значений аналитических функций в области D^+ . Эта последовательность сходится в области D^+ к некоторой аналитической функции $\Phi^+(z)$. В этом смысле каждая обобщенная функция продолжается в D^+ (Φ^- аналогично продолжается в D^-). Таким образом, задача сопряжения в классе обобщенных функций включается в класс задач теории аналитических функций.

9

Задача Римана—Гильберта

Изучение задачи сопряжения в односвязной области мало отличается от ее изучения в многосвязной области. По иному обстоит дело с задачей Римана — Гильберта. Изучение этой задачи в многосвязной области по сравнению с односвязной сопряжено с новыми принципиальными затруднениями.

Исследование задачи Римана — Гильберта в односвязной области как упоминалось выше, было проведено еще Гильбертом путем сведе-

ния ее решения к решению двух задач Дирихле. С некоторыми уточнениями и обобщениями это решение приведено в работах В. И. Смирнова «Курс высшей математики» (т. 3, ч. 2), Л. В. Канторовича и В. И. Крылова «Приближенные методы высшего анализа», Ф. Д. Гахова «Краевые задачи». Для справедливости рассуждений Гильберта достаточно предполагать, что в граничном условии (17) Γ — одна простая замкнутая линия Ляпунова, $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ — функции, удовлетворяющие условию Гельдера, причем $a(s)$ и $b(s)$ одновременно не обращаются в нуль. Н. И. Мусхелишвили изучил задачу Римана — Гильберта также в кусочно-непрерывном случае, когда функции $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ могут иметь разрывы 1-го порядка.

Граничное условие (17) часто записывается так:

$$\operatorname{Re} [\overline{\lambda(t)} \Phi(t)] = c(t), \quad t \in \Gamma, \quad (34)$$

где $\lambda(t) = a + ib$, $\Phi(t)$ — граничная функция функции $\Phi(z) = u + iv$. В докторской диссертации (1942 г.) Ф. Д. Гахов, сопоставив явные (в квадратурах) решения задачи сопряжения и задачи Римана — Гильберта в случае единичной окружности, пришел к выводу, что решение задачи Римана — Гильберта (34) в этом случае совпадает с «внутренней» функцией решения задачи сопряжения

$$\Phi^+(t) = \frac{\lambda(t)}{\lambda(\bar{t})} \Phi^-(t) + \frac{c(t)}{\lambda(t)}. \quad (35)$$

Н. И. Мусхелишвили предложил (1946 г.) метод решения задачи Римана — Гильберта для случая, когда Γ — окружность или прямая. С помощью этого метода решение задачи Римана — Гильберта непосредственно сводится к решению задачи сопряжения. Таким образом, отпала необходимость самостоятельного изучения задачи Римана — Гильберта, если задачи сопряжения для отмеченных конкретных случаев уже изучены. Этим методом можно исследовать задачу Римана — Гильберта и в тех случаях, когда задача сопряжения изучена, но не известно ее явное решение. Последнее обстоятельство дало возможность Н. П. Векуа провести (1947 г.) полное исследование задачи Римана — Гильберта со многими неизвестными функциями.

Впервые в СССР задачу Римана — Гильберта со многими неизвестными функциями рассмотрел (1938 г.) Ф. Д. Гахов. Он дал тогда критический разбор решения Газемана и со своей стороны сделал некоторые заключения общего характера о разрешимости задачи. Полное решение было дано впоследствии Н. П. Векуа. Новый способ исследования этой задачи предложил (1959 г.) Б. В. Боярский. Он изучил также условие устойчивости числа линейно независимых решений задачи.

В многосвязной области задачу Римана — Гильберта рассмотрел (1945 г.) Д. А. Квеселава. Он установил, что, если индекс — отрицательное число ($\kappa < 0$), однородная задача не имеет нетривиального решения, а если $\kappa \geq 0$, она имеет $\kappa - r$ линейно независимых решений, где r — ранг некоторой матрицы, построение которой требует знания решений определенного интегрального уравнения. Следующий существенный шаг в направлении изучения задачи Римана — Гильберта в многосвязной

области был сделан (1952 г.) И. Н. Векуа. Им рассмотрена задача (34) для случая обобщенных аналитических функций (которые включают в себя, как известно, как частный случай и обычные аналитические функции). Отправным пунктом для дальнейших исследований явилось рассмотрение И. Н. Векуа однородной задачи, сопряженной к задаче (34), а также установление следующих утверждений: 1) неоднородная задача Гильберта (34) разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\int_{\Gamma} \varphi(t) \lambda(t) c(t) dt = 0, \quad (36)$$

где $\varphi(t)$ — любое решение сопряженной задачи; 2) если l — число решений однородной задачи (34), а l' — число решений сопряженной задачи, то справедливо равенство

$$l - l' = 2\kappa - m + 1, \quad (37)$$

где κ — индекс²⁵ задачи (34), а $m + 1$ — число граничных линий, составляющих Γ . Из этих результатов непосредственно следует, что если $\kappa > m + 1$, то однородная задача (34) имеет $2\kappa - m + 1$ линейно независимых решений, а неоднородная разрешима при любой правой части. Кроме того, оказалось, что в результате Д. А. Квеселав $r = m - 1$.

Таким образом, благодаря результатам И. Н. Векуа задача (34) как для аналитических, так и для обобщенных аналитических функций была полностью исследована при $\kappa < 0$ и $\kappa > m - 1$. Оставались неизученными случаи

$$0 \leq \kappa \leq m - 1. \quad (38)$$

Случаи $\kappa = 0$, $\kappa = m - 1$ исследовали (1958 г.) Ф. Д. Гахов, Э. Г. Хасанов и Б. В. Боярский. Впервые в их исследованиях встречается случай, когда разрешимость задачи и число решений зависят не только от индекса и порядка связности, но и от других характеристик, в частности от геометрических свойств области. Результаты Ф. Д. Гахова и Э. Г. Хасанова, дополненные некоторыми результатами других математиков, изложены в монографии Ф. Д. Гахова «Краевые задачи» (1963 г.).

Особенно трудным оказался случай $0 < \kappa < m - 1$, изучение которого не закончено и поныне. Глубокие исследования в этом направлении проведены Б. В. Боярским. Им показано, что в этом случае число линейно независимых решений однородной задачи может быть и больше $2\kappa - m + 1$, но такие отклонения при фиксированных κ и m встречаются редко.

Результаты, полученные И. Н. Векуа по задаче Римана — Гильберта, дополненные результатами Б. В. Боярского, В. С. Виноградова, изложены в монографии И. Н. Векуа «Обобщенные аналитические функции» (1959 г.). В этой книге рассмотрены также вопросы корректности задачи Римана — Гильберта в классе обобщенных аналитических функций.

²⁵ То есть $2\pi\kappa = [\arg \lambda(t)]_{\Gamma}$.

Граничные задачи типа Римана — Гильберта и сопряжения

Ф. Д. Гахов рассмотрел (1938 г.) следующую непрерывную задачу: определить функцию $\Phi(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, аналитическую в области D^+ , ограниченной простым гладким контуром Γ , по граничному условию

$$\sum_{k=0}^m \left[a_k(s) \frac{d^k u}{ds^k} + b_k(s) \frac{d^k v}{ds^k} \right] = f(s), \quad (39)$$

где коэффициенты $a_k(s)$, $b_k(s)$, $f(s)$ — действительные непрерывные функции, причем $a_m(s)$, $b_m(s)$, $f(s)$ удовлетворяют условию Гельдера и $a_m(s)$, $b_m(s)$ одновременно не обращаются в нуль. Используя формулу Гильберта, связывающую граничные значения действительной и мнимой частей аналитических функций, он привел задачу к сингулярному интегральному уравнению, ядро которого строится посредством функции Грина. Кроме того, на искомую функцию по ходу решения ему пришлось наложить некоторые дополнительные ограничения, не вытекающие из постановки задачи.

И. Н. Векуа изучил (1942 г.) несколько более общую аналогичную задачу: определить функцию $\Phi(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, аналитическую в области D^+ , ограниченной простым контуром Ляпунова Γ , непрерывно продолжимую вместе со своими производными до m -го порядка на Γ и удовлетворяющую граничному условию

$$\operatorname{Re} \sum_{k=0}^m \left\{ a_k(t) \Phi^{(k)}(t) + \int_{\Gamma} h_k(t, t_1) \Phi^{(k)}(t_1) dt_1 \right\} = f(t), \quad (40)$$

где $a_0(t), \dots, a_m(t), f(t)$ — заданные на Γ функции, удовлетворяющие условию H , а $h_k(t, t_1)$ — ядра Фредгольма. Если все $h_k(t, t_1)$ равны нулю, граничные условия (39) и (40) легко сводятся одно к другому. Для исследования этой задачи И. Н. Векуа построил интегральное представление искомой функции $\Phi(z)$ в предположении, что $\Phi^{(m)}(z)$ удовлетворяет условию Гельдера. Он доказал при $m \geq 1$ равенство

$$\Phi(z) = \int_{\Gamma} \mu(t) \left(1 - \frac{z}{t}\right)^{m-1} \ln \left(1 - \frac{z}{t}\right) ds + \int_{\Gamma} \mu(t) ds + iC \quad (41)$$

и при $m = 0$ равенство

$$\Phi(z) = \int_{\Gamma} \frac{\mu(t) ds}{1 - \frac{z}{t}} + iC, \quad (42)$$

где $\mu(t)$ — действительная функция, удовлетворяющая условию H , а C — действительная постоянная, которая определяется однозначно с помощью функции $\Phi(z)$.

Представление (41) было обобщено и развито (40—50-е годы) в различных направлениях Д. И. Шерманом, Ю. М. Крикуновым,



Л. Г. Михайлов.

М. П. Ганиным, Б. В. Хведелидзе, Э. Г. Хасабовым, Р. С. Исахановым, В. С. Рогожиным.

С помощью построенных интегральных представлений И. Н. Векуа свел (1942 г.) граничную задачу (40) к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению, ядро которого, в отличие от ядра интегрального уравнения, построенного (1938 г.) Ф. Д. Гаховым, довольно просто составляется лишь посредством заданных функций $a_h(t)$ и $h_h(t, t_1)$. Это в свою очередь позволило установить ряд новых признаков разрешимости задачи. Результаты И. Н. Векуа для системы аналитических функций были обобщены в кусочно-непрерывном случае Н. П. Векуа (1946 г.), а в непрерывном и разрывном случаях — Б. В. Хведелидзе (1943, 1956 гг.).

Д. И. Шерман рассмотрел (1946 г.) задачу, аналогичную задаче (39), но сформулированную в терминах гармонических функций. С помощью построенного им интегрального представления аналитических функций он свел задачу непосредственно к уравнению Фредгольма. Этим же путем, несколько упростив интегральное представление, данное Д. И. Шерманом, непрерывную задачу (40) в многосвязной области изучил (1959 г.) Э. Г. Хасабов.

А. И. Маркушевич поставил (1946 г.) граничную задачу типа сопряжения для случая, когда в граничное условие кроме значения искомой функции входит и ее сопряженное значение

$$\Phi^+(t) = a(t)\Phi^-(t) + b(t)\overline{\Phi^-(t)} + c(t), \quad (43)$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — заданные на замкнутом контуре Γ функции.

Первое исследование непрерывной задачи (43) Н. П. Векуа провел (1952 г.) сразу для случая нескольких неизвестных функций в предположении, что матрицы $a(t)$, $b(t)$ удовлетворяют условию Гельдера и $a(t)$ — неособенная матрица. Он свел решение задачи (43) к системе сингулярных интегральных уравнений первого рода, построил сопряженную задачу, установил нормальную разрешимость²⁶ задачи (43) и указал путь нахождения решений. Работой Н. П. Векуа было положено начало многочисленным исследованиям граничных задач типа (43), продолжающимся и ныне. Б. В. Боярский дополнил (1960 г.) результаты Н. П. Векуа для случая одной искомой кусочно-голоморфной

²⁶ Граничная задача называется нормально разрешимой, если число линейно независимых решений однородной задачи и число условий разрешимости неоднородной задачи конечны. Разность этих чисел называется индексом задачи. А. И. Маркушевич исследовал (1934 г.) задачу (43) при $a = c = 0$, $b = 1$. Это простейший случай, когда задача не является нормально разрешимой.

функции, показав, что для разрешимости задачи (43) необходимо и достаточно выполнение равенств

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma} g(t) \psi_j^+(t) dt = 0, \quad j = 1, \dots, l', \quad (44)$$

где $\psi_1(t), \dots, \psi_{l'}(t)$ — полная система линейно независимых решений сопряженной задачи. Кроме того, справедлива формула

$$l - l' = 2\kappa, \quad (45)$$

где l — число линейно независимых решений однородной задачи (43), а $\kappa = \operatorname{ind} a(t)$. Б. В. Боярский показал, что если

$$|a(t)| > |b(t)| \quad (46)$$

и показатели Гельдера функций $a(t)$, $b(t)$ как угодно близки к единице, то в качественном отношении задача (43) ведет себя так же, как задача сопряжения.

В дальнейшем изучение задачи (43) было продвинуто (1960—1964 гг.) Л. Г. Михайловым. В его работах задача (43) в классе аналитических функций рассмотрена в постановке И. И. Привалова, при этом предполагалось, что функция $a(t)$ непрерывна, $a(t) \neq 0$, $b(t)$ ограничена и измерима, $c(t) \in L_p(\Gamma)$, $p > 1$, и $\Phi^\pm \in L_p$. Изучены случаи, когда коэффициенты $a(t)$, $b(t)$ удовлетворяют условию (46) или условию

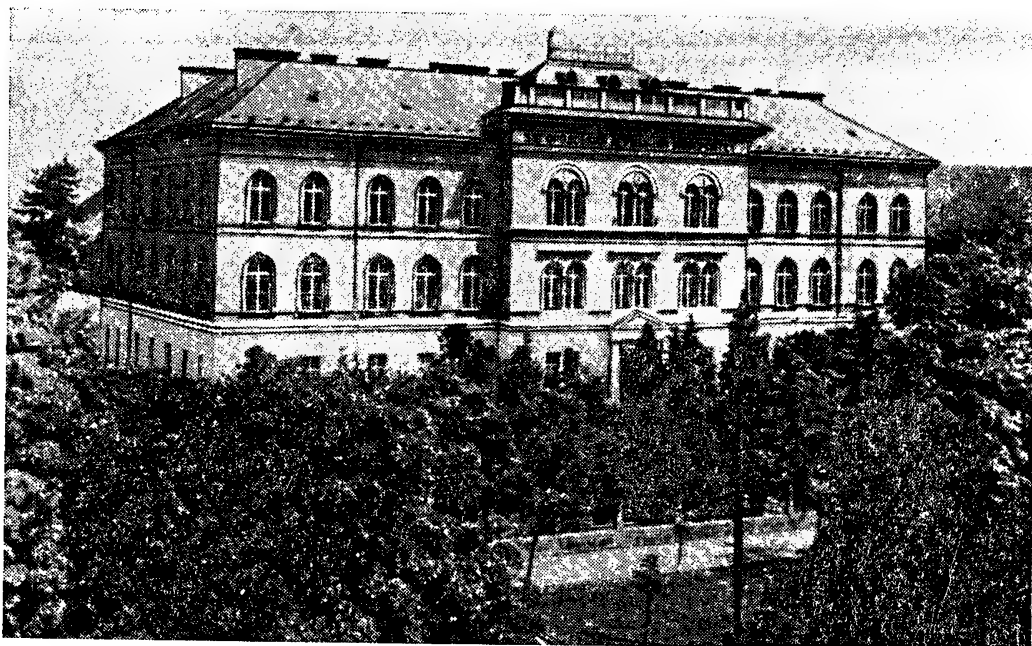
$$|a(t)| = |b(t)|. \quad (47)$$

В случае (46) исследование проводится, по сравнению с исследованием Б. В. Боярского, при более общих предположениях и элементарным способом. Л. Г. Михайлов рассматривает также случай, когда контур Γ состоит из разомкнутых линий или коэффициент $a(t)$ терпит разрывы первого рода, и случаи, когда в граничное условие входят нелинейные члены и члены, содержащие производные.

Л. Г. Магнарадзе принадлежит первое исследование (1943 г.) непрерывной задачи типа сопряжения, когда в граничное условие кроме значений самих искомых функций входят линейно также их производные до некоторого порядка:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m \left[a_k(t) \frac{d^k \Phi^+(t)}{dt^k} + \int_{\Gamma} A_k(t, \tau) \frac{d^k \Phi^+(\tau)}{d\tau^k} d\tau \right] + \\ & + \sum_{k=0}^n \left[b_k(t) \frac{d^k \Phi^-(t)}{dt^k} + \int_{\Gamma} B_k(t, \tau) \frac{d^k \Phi^-(\tau)}{d\tau^k} d\tau \right] = f(t), \end{aligned} \quad (48)$$

где a_k , b_k , A_k , B_k — заданные на Γ функции. Магнарадзе рассмотрел случай, когда все A_k , B_k равны нулю, и с помощью интеграла типа Коши свел задачу к сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям, а затем решение этого уравнения привел к решению регулярных или сингулярных интегральных уравнений. В 1963 г. Л. Г. Магнарадзе обобщил эти результаты в довольно общей абстрактной постановке.



Ужгородский государственный университет.

Другой путь изучения задачи (48), когда функции A_k , B_k отличны от нуля и являются ядрами Фредгольма, предложил (1952 г.) Ю. М. Крикунов. Прежде всего искомые функции он представляет посредством формул, аналогичных (41), с комплексной плотностью. Затем приводит задачу к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению. Позднее (1956 г.) Ю. М. Крикунов рассмотрел и кусочно-непрерывный случай, когда коэффициенты в граничном условии терпят разрывы первого рода в конечном числе точек, а линия Γ кусочно-гладкая. Решение Крикунова обобщил на случай многосвязной области для нескольких неизвестных функций, когда задача рассматривается со смещением, М. П. Ганин.

Р. С. Исаханов изучил (1958 г.) задачу (48) в односвязной и многосвязной областях методом, разработанным И. Н. Векуа для решения задачи (40). Он же исследовал (1962 г.) аналогично более общую задачу типа (48), когда в граничное условие входят также члены, зависящие от сопряженных значений искомой функции и ее производных. В других работах Р. С. Исаханова (1960, 1964 гг.) для некоторых частных случаев названных задач построена сопряженная задача и доказаны утверждения, аналогичные (44) и (45).

Еще одно исследование рассматриваемой задачи проведено (1960 г.) В. С. Рогожиным. Им построено интегральное представление, позволяющее свести граничную задачу (48), минуя сингулярные интегральные уравнения, непосредственно к уравнению Фредгольма.

Граничные задачи (40), (43) и (48), а также задачи вида (40) или (48), в граничные условия которых наряду с искомыми функциями входят также их сопряженные значения, являются важными линейными граничными задачами. Их изучение было вызвано как задачами при-

ложения, так и потребностью развития самой теории граничных задач. Поэтому эти задачи подробно изучались и изучаются во всех возможных основных постановках. Одной из таких постановок является рассмотрение задач со смещениями.

Н. П. Векуа провел (1947—1961 гг.) систематическое исследование ряда общих линейных задач со смещениями как типа сопряжения, так и типа Римана — Гильберта для случая нескольких неизвестных функций, когда в граничное условие наряду с искомыми функциями и их сопряженными значениями могут входить также производные этих величин. Метод, которым пользуется Н. П. Векуа, состоит в следующем. С помощью определенных интегральных представлений граничные задачи сводят к системам сингулярных интегральных уравнений первого рода, ядра которых выражаются элементарно через заданные функции. Затем, исследуя построенную систему интегральных уравнений, получают общие качественные результаты по граничной задаче.

В ряде работ рассматриваются граничные задачи сопряжения (или сингулярные интегральные уравнения) со смещением $\alpha(t)$, порождающим циклическую группу порядка n . Основные вопросы, изучающиеся в связи с этой задачей, заключаются в выяснении условий нормальной разрешимости и вычислении индекса. Исследованию этих вопросов посвящены работы Г. С. Литвинчука (1961—1967 гг.), Г. С. Литвинчука и Э. Г. Хасабова (1962—1965 гг.), Р. А. Кордзадзе (1964—1968 гг.) и др.

Г. С. Литвинчук доказал (1963 г.) теоремы Нетера для краевой задачи

$$A(t)\Phi^+(t) + B(t)\Phi^+[\alpha_{\pm}(t)] + C(t)\Phi^-(t) + D(t)\Phi^-[\alpha_{\pm}(t)] = g(t),$$

где $\alpha_{\pm}(t)$ [$\alpha_{-}(t)$] — гомеоморфное отображение замкнутого контура Ляпунова L на себя, сохраняющее (изменяющее) ориентацию на L , $\alpha_{\pm}[\alpha_{\pm}(t)] = t$, $\alpha'_{\pm}(t) \neq 0$, $\alpha'_{\pm}(t)$, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$, $g(t) \in H(L)$. Им найдена (1963 г.) формула для вычисления индекса задачи в явном виде при $n = 2$. Р. А. Кордзадзе получил (1968 г.) формулу, явно выражающую индекс задачи κ_n через индекс κ_m , $n = 2^k m$, где k — натуральное число, m — нечетное число.

Г. С. Литвинчук ввел (1967 г.) понятие устойчивости граничной задачи (43), аналогичное понятию устойчивости частных индексов граничной задачи Римана, и доказал, что эта задача (когда Γ — окружность $|t| = 1$) устойчива в случаях $|a(t)| > |b(t)|$, $|a(t)| = |b(t)|$, $\text{ind } b(t) \geq 0$, и неустойчива в случае $|a(t)| = |b(t)|$, $\text{ind } b(t) < 0$.

Э. И. Зверович и Г. С. Литвинчук рассмотрели (1963 г.) нетеровы задачи, получившие название односторонних, изучили связь этих задач с интегральными уравнениями Фредгольма первого рода и установили ряд признаков их разрешимости.

Граничные задачи на римановых поверхностях ²⁷

Впервые задачу линейного сопряжения аналитических функций на римановых поверхностях исследовала (1950—1956 гг.) А. В. Месис. Она рассматривала задачу в следующей постановке. Пусть $k(z, w)$ — поле алгебраических функций рода ρ , заданное алгебраическим уравнением $f(z, w) = 0$, и пусть на римановой поверхности R функции $w(t)$ задана совокупность замкнутых гладких линий, разделяющая R на две части. Требуется найти кусочно-голоморфный на R вектор $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$, имеющий в заданной точке поверхности полюс и удовлетворяющий граничному условию

$$\Phi^+(t, w) = G(t, w) \Phi^-(t, w) + g(t, w),$$

где G — матрица, g — вектор, элементы и составляющие которых принадлежат заданному полю и являются ограниченными функциями точки t контура Γ . А. В. Месис показала, что решение этой задачи всегда существует, если не ограничивать порядок полюса в заданной точке.

Дальнейшее развитие теории задачи сопряжения получила в работах Л. И. Чибриковой и Ю. Л. Родина.

Л. И. Чибрикова исследовала (1956—1964 гг.) задачу линейного сопряжения в следующей постановке. Пусть в фундаментальном многоугольнике некоторой фуксовой группы первого рода дробно-линейных преобразований, имеющем конечное число сторон, задана конечная совокупность гладких непересекающихся линий Γ . Требуется найти кусочно-голоморфную функцию Φ с линией скачков Γ , кратную заданному неположительному дивизору, непрерывно продолжаемую на Γ , кроме, возможно, концевых точек, где она может иметь особенности порядка ниже первого, и удовлетворяющую граничному условию (15), где $G(t)$ и $g(t)$ — заданные на Γ функции, для которых выполняется условие Гельдера и $G(t) \neq 0$. Основным аппаратом исследования Чибриковой — интеграл типа Коши с ядром, которое является автоморфным аналогом ядра Коши $(t - z)^{-1} dt$.

Ю. Л. Родин исследовал (1959—1961 гг.) задачу линейного сопряжения на абстрактной замкнутой римановой поверхности в предположении, что Γ состоит только из замкнутых линий ²⁸. Требовалось найти кусочно-голоморфную (регулярную на $R - \Gamma$) функцию Φ , удовлетворяющую граничному условию (15). Для изучения этой задачи Родин использовал сопряженную задачу, состоящую в отыскании кусочно-голоморфного дифференциала $d\Psi$, удовлетворяющего краевому условию

$$d\Psi^+ = \frac{1}{G} d\Psi^-.$$

²⁷ При написании этого параграфа авторы использовали материал, представленный Р. Н. Абдулаевым.

²⁸ Независимо от Ю. Л. Родина аналогичную теорию построил американский математик Кошпельман.

Он установил связь между числом l решений исходной однородной задачи и числом l' решений сопряженной задачи, выражающуюся соотношением $l - l' = \kappa - \rho + 1$, а также доказал, что для разрешимости неоднородной задачи необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{\Gamma} g(t) d\Psi_j^+(t) = 0, \quad j = 1, \dots, l'.$$

Задачу линейного сопряжения для вектора исследовали Ю. Л. Родин и Г. Д. Мерзлякова (1963 г.), а для автоморфных функций при дополнительном требовании представимости искомой функции $\Phi(z)$ в виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(\tau) d\tau}{f(\tau) - f(z)}.$$

(где $f(z)$ — некоторая автоморфная функция) — И. А. Парадоксова (1961 г.).

Р. Н. Абдулаев, используя связь однородной задачи с проблемой обращения Якоби и θ -функцией Римана (установленную ранее Л. И. Чибриковой), установил (1963—1965 гг.) необходимые и достаточные условия для разрешимости однородной задачи и получил формулу для подсчета числа линейно независимых решений.

Э. И. Зверович изучил (1964 г.) граничные задачи со смещениями для случая, когда граничное условие задается на контуре, разбивающем поверхность.

В. И. Показеев исследовал (1964 г.) задачу о нахождении кусочно-голоморфной в фундаментальном многоугольнике функции Φ , удовлетворяющей на Γ условию (15) и условию задачи Карлемана на границе многоугольника, в предположении, что смещение $\alpha(t)$ на каждой стороне многоугольника совпадает с дробно-линейным преобразованием, переводящим эту сторону в конгруэнтную.

Задача линейного сопряжения на римановой поверхности изучалась и для случая разрывных коэффициентов. Ю. Л. Родин рассмотрел (1960 г.) однородную задачу при наличии у G разрывов первого рода, Р. Н. Абдулаев исследовал (1967 г.) задачу линейного сопряжения при более общих предположениях относительно G и g . Он предложил метод, аналогичный известному альтернирующему методу Шварца и позволяющий получить решение задачи в классах H_p .

На конечной римановой поверхности с краем задачу Римана — Гильберта изучили Л. И. Чибрикова (1957—1962 гг.) и Ю. Л. Родин (1959—1960 гг.). В. И. Показеев обобщил (1964 г.) эту задачу, задав граничные условия типа условий со сдвигом на сторонах фундаментального многоугольника, соответствующего данной римановой поверхности. Р. Н. Абдулаев исследовал (1962 г.) задачу Сохоцкого (14), где



Л. И. Чибрикова.

$g \in H$ и кусочно-голоморфная функция минимизирует интеграл Дирихле или же ее вещественная часть задана на крае поверхности. Л. И. Чибрикова изучила (1962 г.) задачу о нахождении кусочно-голоморфной функции, удовлетворяющей одновременно условиям (15) и (35). А. И. Сербин рассмотрел (1962—1964 гг.) задачу для случая, когда на крае поверхности задано условие (40), а на граничной линии Γ — условие (48).

Граничные задачи на поверхности бесконечного рода рассматривались Ю. Л. Родиным и Р. Н. Абдулаевым. Ю. Л. Родин в кандидатской диссертации исследовал задачу Сохоцкого, применив требование, чтобы функция Φ имела конечный интеграл Дирихле для любой окрестности идеальной границы, не содержащей граничной линии, и для некоторых подклассов поверхностей с нулевой границей установил необходимое и достаточное условие разрешимости. Р. Н. Абдулаев рассмотрел (1963 г.) эту задачу и задачу линейного сопряжения на поверхностях более широкого класса (класс O_{HD}) и установил условие разрешимости.

12

Нелинейные граничные задачи

Нелинейные граничные задачи исследованы мало. В общей постановке изучение их, как и других нелинейных задач, сопряжено с большими трудностями. Работы, опубликованные в СССР по нелинейным граничным задачам, можно разделить на две группы: исследования, в которых граничные условия берутся в таком виде, что нелинейная часть содержит малый параметр (одним из методов для изучения этих задач является принцип неподвижных точек); работы, в которых рассматриваются специальные нелинейные граничные задачи, позволяющие применять методы теории линейных задач.

Из первой группы прежде всего следует упомянуть работу (1950 г.) А. И. Гусейнова, которым, по существу, и было положено начало исследованию нелинейных граничных задач теории функции в СССР. В этой работе рассмотрена нелинейная задача типа Римана — Гильберта

$$a(t)u(t) + b(t)v(t) + \lambda F(t, u, v) = 0, \quad (49)$$

где a , b , F — заданные функции, λ — параметр, $a(t)$ и $b(t)$ не обращаются одновременно в нуль. При некоторых предположениях относительно заданных функций, а также предположении, что соответствующая линейная задача Римана — Гильберта однозначно разрешима, А. И. Гусейнов построил решение нелинейной задачи (49) методом последовательных приближений. Исследование А. И. Гусейнова дополнил и продолжил (1952 г.) В. К. Наталевич. Исследуя нелинейную задачу, он рассмотрел все возможные случаи соответствующей линейной задачи Римана — Гильберта, возникающие в зависимости от численного значения ее индекса.

Указанные результаты по задаче (49) были впоследствии обобщены в работах Ш. И. Векилова (1951 г.), В. Ф. Кропачева (1955 г.), Б. И. Гех-

та (1956 г.), А. А. Бабаева (1959 г.) и других на случай, когда в граничное условие входят производные, а также на случай нескольких неизвестных функций.

Ко второй группе исследований относятся работы И. В. Соловьева (1941 г.) и Г. В. Аржанова (1960—1961 гг.), в которых рассмотрены нелинейные задачи типа сопряжения, и В. К. Наталевица (1952 г.), где изучена нелинейная задача типа Римана — Гильберта.

13

Граничные задачи для функций многих комплексных переменных

Изучение граничных задач для функций многих комплексных переменных, по существу, только начинается. Впервые одна постановка граничной задачи типа сопряжения для функции двух комплексных переменных была приведена в докладе М. Б. Гагуа на III Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного, состоявшейся в 1957 г. Начиная с 1959 г. публикует свои исследования В. А. Какичев. Прежде всего он изучает свойства интеграла типа Коши многих комплексных переменных для полицилиндрических областей, остовы границ которых являются топологическими произведениями простых замкнутых гладких контуров (например, поведение интеграла типа Коши как в точках остова, так и вблизи остова, причем для его предельных значений получены формулы, обобщающие на случай многих переменных формулы Сохоцкого — Племеля). С помощью этих результатов Какичев решает в определенной постановке задачу Сохоцкого для функций многих переменных. Затем изучает также интеграл типа Коши с линией разрыва, лежащей на двумерной аналитической поверхности комплексного пространства C^n . Используя понятие логарифмического вычета относительно контура Γ , введенное А. А. Темляковым, он исследует граничную задачу сопряжения для этого контура. Постановка задачи и соответствующие результаты в этом случае аналогичны постановке и результатам в случае обыкновенной комплексной плоскости ($n = 1$).

В 1965 г. В. С. Владимиров исследовал задачу сопряжения для пары функций многих комплексных переменных, аналитических в соответствующих трубчатых радиальных областях. Это исследование представляет интерес как в смысле постановки задачи и метода ее решения, так и в смысле полученных в нем результатов.

Обратные граничные (краевые) задачи

Обратными граничными (краевыми) задачами называют задачи отыскания контура области по некоторым заданным на нем величинам. Обычная постановка таких задач заключается в том, что в искомой области отыскивается функция, принадлежащая к



Г. Г. Тумашев.

заданному классу (аналитическая или являющаяся решением какого-либо заданного уравнения), причем на контуре независимых условий задается на единицу больше, чем их требуется для решения обычной граничной задачи (при заданной области) для данного класса функций. Излишнее граничное условие используется для отыскания контура. Методы решения обратных граничных задач заключаются в сведении их к некоторым прямым граничным задачам. Существуют различные постановки обратных граничных задач. Мы рассмотрим задачу, которую грубо можно сформулировать как задачу отыскания контура по заданным на нем граничным значениям аналитической функции.

При обычной прямой постановке задачи для определения аналитической функции с точностью до постоянного мнимого слагаемого достаточно задать на контуре лишь одну ее вещественную часть (задача Шварца). Дополнительное задание мнимой части позволяет определить область, в которой заданная на контуре произвольная комплексная функция является граничным значением аналитической функции.

Обратная граничная задача рассматриваемого нами типа была поставлена в 1929 г. Д. Рябушинским как задача гармонических функций. На искомом контуре задавались значения гармонической функции и ее нормальной производной. При такой постановке отсутствует контур-носитель данных, вследствие чего невозможно свести задачу к прямой граничной задаче. Б. Демченко, рассматривавший впервые задачу, обошел это затруднение: ввел некоторый вспомогательный круг, на котором задаются граничные значения.

М. Т. Нужин освободился (1949 г.) от искусственности в постановке обратной граничной задачи, сформулировав ее впервые как задачу аналитических функций. Задание на искомом контуре граничного значения искомой аналитической функции определяет в плоскости функции область, в которой обратная граничная задача может решаться как прямая задача. Подобная постановка в более частных случаях формулировалась раньше, в связи с решением различных задач механики. Главной из них является задача построения авиационного профиля по заданному на нем распределению скорости или давления. Здесь мнимая часть искомой аналитической функции постоянная, поэтому областью в плоскости функции, где приходится решать прямую граничную задачу, является плоскость с разрезом вдоль отрезка вещественной оси.

Началом развития теории обратных граничных задач в СССР можно считать работу Г. Г. Тумашева, которая была написана во время

войны и защищена как докторская диссертация в Казани в 1945 г. (опубликована лишь в 1952 г.). В ней решены упомянутая выше задача построения авиационного профиля и другие обратные граничные задачи аэро- и гидромеханики (некоторые из них рассматривались ранее Вейнигом — 1929 г., Бетцем — 1934 г., Манглером — 1938 г.). Более полные исторические сведения содержатся в монографии Г. Г. Тумашева и М. Т. Нужиной «Обратные краевые задачи и их приложения» (1965 г.), где также наиболее полно изложена теория обратных граничных задач, приведена полная библиография работ, опубликованных до 1964 г. Очерк математической теории обратных граничных (краевых) задач дан в монографии Ф. Д. Гахова «Краевые задачи» (1963 г.), где приводятся также некоторые исторические сведения.



М. Т. Нужин.

Постановка обратной краевой задачи ²⁹. Сформулируем задачу при классических предположениях, обеспечивающих существование гладкого искомого контура.

Пусть даны две функции параметра s ($0 \leq s \leq l$)

$$u = u(s), \quad v = v(s), \quad (50)$$

периодические с периодом l , имеющие первые производные, не обращающиеся одновременно в нуль, удовлетворяющие условию Гельдера и при двух значениях параметра $s_1 \neq s_2$ — условию

$$[u(s_1) - u(s_2)]^2 + [v(s_1) - v(s_2)]^2 = 0.$$

Уравнения (50) определяют в плоскости комплексного переменного $w = u + iv$ простую замкнутую кривую L_w , которая делит плоскость на две области: внутреннюю — D_w^+ и внешнюю — D_w^- .

«Внутренняя» задача. Определить в плоскости z кривую L_z , ограничивающую конечную область D_z^+ (вообще говоря, многолистную) так, чтобы выражение $w(s) = u(s) + iv(s)$ было краевым значением аналитической функции $w = w(z)$, конформно отображающей область D_z^+ на область D_w^+ или D_w^- , где параметр s — длина дуги кривой L_z .

«Внешняя» задача. Если в предыдущей формулировке конечную область D_z^+ заменить дополнительной областью D_z^- , содержащей бесконечно удаленную точку, то получится формулировка внешней обратной краевой задачи.

Комбинируя области $D_z^\pm$, $D_w^\pm$, можно получить всего четыре задачи. Но так как заданные области $D_w^\pm$ можно предварительно отобразить на

²⁹ В дальнейшем мы пользуемся термином «краевая задача».

некоторую область типа D^+ (например, единичный круг), то существенно различными будут лишь задачи, отличающиеся знаками области D_z . Легко видеть, что внешняя задача не может быть сведена к внутренней заменами переменных, подобно тому как это делается в прямых задачах. Каждую из задач надо решать самостоятельно.

Решение внутренней задачи. Изложим кратко предложенную (1949 г.) М. Т. Нужиным схему решения внутренней задачи. Будем исходить из хорошо известного свойства конформных отображений: отношение длин линейных элементов, соответствующих друг другу при отображении, равно модулю производной отображающей функции. Длина элемента дуги контура L_z задана — это дифференциал параметра ds . Из уравнений (50) по формуле дифференциальной геометрии определяется длина элемента кривой L_w

$$d\sigma = \sqrt{u'^2(s) + v'^2(s)} ds.$$

Отсюда

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = \sqrt{u'^2(s) + v'^2(s)}.$$

Для сведения обратной краевой задачи к прямой рассматриваем контур L_w как носитель данных и отыскиваем обратную функцию $z = z(w)$.

Равенство $\sigma = \int_0^s \sqrt{u'^2 + v'^2} ds$ определяет σ как монотонно возрастающую функцию s . Обращая последнюю, получаем $s = s(\sigma)$. Тогда

$$\left| \frac{dz}{dw} \right| = \frac{1}{\sqrt{u'^2[s(\sigma)] + v'^2[s(\sigma)]}}.$$

Таким образом, мы приходим к задаче определения аналитической и не обращающейся в нуль функции $z'(w)$ по значениям на контуре ее модуля. Беря логарифм от обеих частей, приходим к задаче Шварца об определении аналитической в области D_w функции $\ln \frac{dz}{dw}$ по заданным на контуре значениям ее вещественной части. Удобнее перейти к такой области, для которой известно явное выражение оператора Шварца, с помощью которого решается последняя задача. В качестве такой области выбираем единичный круг.

Пусть $w = w(\zeta)$ — аналитическая функция, конформно отображающая единичный круг γ плоскости ζ на область D_w . Из однозначного соответствия контуров $u(s) + iv(s) = w(e^{i\theta})$ определяем s как однозначную функцию полярного угла θ , являющегося одновременно и длиной дуги единичной окружности $s = \omega(\theta)$. Теперь можно оставить плоскость w и решать задачу, исходя из соответствия между плоскостью z и вспомогательной плоскостью ζ . Благодаря свойству конформных отображений

$$\left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = \frac{ds}{d\theta} = \omega'(\theta).$$

Для $\ln \frac{dz}{d\zeta}$ задача решается интегралом Шварца

$$\ln \frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \omega'(\theta) \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta} d\theta + i\alpha = \chi(\zeta) + i\alpha. \quad (51)$$

Отсюда с помощью потенцирования и интегрирования находим

$$z = f(\zeta) = e^{i\alpha} \int e^{\chi(\zeta)} d\zeta + C, \quad (52)$$

где α — вещественная, а C — комплексная произвольные постоянные. Вставляя контурные значения аргумента $\zeta = e^{i\theta}$, получаем параметрическое уравнение искомого контура L_z в комплексной форме

$$z = f(e^{i\theta}) = x(\theta) + iy(\theta). \quad (53)$$

Как видно из формулы (52), искомый контур определяется с точностью до движения (параметр α определяет вращение, а C — параллельный перенос). Произвол, заключающийся в движении, естествен для рассматриваемой задачи, и контуры, отличающиеся лишь положением на плоскости, естественно считать одним решением. Легко доказать, что при этом допущении решение единственно.

Решение внешней задачи. Воспроизведем схематически решение этой задачи, полученное (1952, 1953 гг.) Ф. Д. Гаховым.

Предполагаем, что уже произведено отображение области D_w на единичный круг. Как следует из постановки задачи, некоторая точка ζ_0 круга должна перейти в бесконечно удаленную точку. Следовательно, отображающая функция $z = F(\zeta)$ должна иметь в точке ζ_0 простой полюс, а ее производная — полюс 2-го порядка. Функция $\varphi(\zeta) = \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta}\right)^2 F'(\zeta)$ удовлетворяет на контуре условию $|\varphi(\zeta)| = |F'(\zeta)|$.

Используя это и рассуждая аналогично предыдущему, получаем выражение для искомой отображающей функции в виде

$$z = F(\zeta) = e^{i\alpha} \int \left(\frac{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta}{\zeta - \zeta_0}\right)^2 e^{\chi(\zeta)} d\zeta + C, \quad (54)$$

где α, C — соответственно вещественная и комплексная произвольные постоянные. Для того чтобы с помощью формулы (54) получалось решение задачи, необходимо и достаточно, чтобы в разложении подынтегральной функции в окрестности точки ζ_0 отсутствовал член степени -1 . Приравняв вычет нулю, получим уравнение для координаты полюса ζ_0

$$\frac{\varphi'(\zeta_0)}{\varphi(\zeta_0)} = \frac{2\bar{\zeta}_0}{1 - |\zeta_0|^2}. \quad (55)$$

С помощью довольно сложных рассуждений удается доказать, что уравнение (55) безусловно разрешимо. Вопрос о единственности или множественности решения продолжительное время оставался открытым. В 1959 г. В. С. Рогожин путем построения примера показал, что уравнение (55) может иметь несколько решений. Отсюда следует, что если не задавать никаких дополнительных условий, то решение внешней задачи может

оказаться не единственным. Некоторые достаточные признаки единственности установил (1962 г.) С. Н. Кудряшов.

Задача в многосвязной области. Пусть даны $n + 1$ пар функций

$$u = u_k(s), \quad v = v_k(s), \quad 0 \leq s \leq l_k, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

определяющих контуры L_k такого же характера, что и выше, и взаимно непересекающихся. Предполагаем, что контур L_0 охватывает все остальные; этого всегда можно добиться, произведя предварительно дробно-линейную подстановку. Конечную $(n + 1)$ -связную область, ограниченную контурами L_k , обозначаем D_w . В плоскости z ищем $n + 1$ кривых L_{kz} , ограничивающих также $(n + 1)$ -связную область. С этим изменением приведенная в предыдущих пунктах формулировка внутренней и внешней обратных задач переносится на рассматриваемый случай многосвязной области.

Случай двусвязной области впервые исследовал (1950 г.) М. Т. Нужин. Ф. Д. Гахов рассмотрел (1955 г.) случай области любой конечной связности и ввел более широкий класс решений. М. Т. Нужин исследовал (1964 г.) более подробно эту задачу, исправив попутно одну погрешность, допущенную Ф. Д. Гаховым.

Схема решения остается такой же, что и для односвязной области. Естественно, здесь уже невозможно использовать отображение области D_w на круг и приходится решать задачу Шварца для многосвязной области. Дело осложняется возможной неоднозначностью решения задачи, и основная трудность исследования разрешимости обратной краевой задачи для многосвязной области заключается в удовлетворении условий однозначности решения.

Однолиственность решения. Наложенное в постановке задачи требование конформности отображения исключает нули производной отображающей функции и, следовательно, исключает точки ветвления. Но оно не влечет за собой однолиственности отображения. Так как контур L_w по условию простой, то и ограниченная им область D_w однолистная. Но функция $z(w)$, получаемая в результате решения, может оказаться неоднолистной; в последнем случае искомый контур L_z окажется не простым, а самопересекающимся. Во всех известных приложениях обратных краевых задач наличие лишь неоднолистных решений означает фактически неразрешимость поставленной практической задачи. Важное значение поэтому имеет установление признаков, по которым, не решая задачу, заранее можно было бы судить об однолиственности ее решения. Известно несколько достаточных признаков однолиственности. Все они относятся к случаю, когда исходная область D_w есть круг.

Речь идет об установлении однолиственности функции $z = f(\zeta)$, определяемой формулами (обозначения см. выше)

$$z'(\zeta) = e^{\chi(\zeta)}, \quad \chi(\zeta) = \pm \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\theta) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta, \quad P(\theta) = \ln \omega'(\theta).$$

Знак плюс берется для внутренней, а минус — для внешней задачи. Первый признак однолиственности установили (1953 г.) И. С. Краснови-

дова и В. С. Рогожин. Используя простейший признак однолистности аналитических в единичном круге функций $\operatorname{Re} z'(\zeta) > 0$, они получили для заданной функции $P(\theta)$, удовлетворяющей условию Липшица

$$|P(\theta_1) - P(\theta_2)| < K |\theta_1 - \theta_2|,$$

следующую теорему: если постоянная Липшица $K \leq \frac{\pi}{4 \ln 2}$, то решение внутренней обратной краевой задачи однолистно. Л. А. Аксентьев, используя более точный признак однолистности аналитических в единичном круге функций для этой же задачи, установил (1957 г.) признак однолистности в форме

$$P'(\theta_1) - P'(\theta_2) < \frac{1}{2 \ln 2} |\theta_1 - \theta_2|.$$

Л. А. Аксентьев (1957—1958 гг.) и С. Н. Кудряшов (1962—1966 гг.) нашли ряд других, более точных, достаточных признаков однолистности как для внутренней, так и для внешней задачи. Л. А. Аксентьев, С. Н. Кудряшов, а также В. С. Рогожин (1958 г.) указали признаки однолистности различных прикладных задач.

Задача для функций с заданными особенностями. Простейшей обратной краевой задачей с особенностями является внешняя обратная краевая задача, где отыскивается функция, аналитическая в круге, за исключением одной точки, в которой она имеет простой полюс. Эта задача решена полностью и, как об этом упоминалось выше, безусловно разрешима. Однако возникает осложнение, заключающееся в том, что решение может оказаться не единственным. Практика выдвигает задачи, в которых искомая функция должна обладать определенными особенностями (логарифмическими, полюсами). При построении крыльев со сложным управлением (вдуванием или отсасыванием воздуха) приходится допускать логарифмические или полярные особенности функций на самом контуре. Поэтому обратные краевые задачи для функций с допустимыми особенностями такого характера и возникли одновременно с возникновением теории обратных краевых задач.

Некоторые задачи механики с допустимыми источниками, вихрями, диполями и т. п. решены в работах М. Т. Нужиной, М. А. Копырина и др. Метод решения заключается в том, что искомая функция представляется в виде суммы заданных главных частей в заданных особых точках и аналитической функции. Таким путем обратная краевая задача с особенностями сводится к обыкновенной задаче в классе аналитических функций. При этом возникают, однако, сложные теоретические вопросы о единственности или множественности решений (подробнее об этом см. ниже). В указанных задачах механики эти вопросы решались в основном исходя из физических соображений.

Общая постановка обратной краевой задачи. В основных обратных краевых задачах, сформулированных выше, теоретической основой для установления существования и единственности решения служила основная теорема конформных отображений: однозначное соответствие контуров влечет за собой однозначное соответствие ограничиваемых этими кон-

турами областей. Осуществимость теоремы вытекает из трех допущений: 1) про стоты контура, определяемого задаваемой функцией $w(s)$; 2) аналитичности отображающей функции; 3) отсутствия прообразов точек ветвления ($w'(z) \neq 0$). Если какое-либо из этих условий будет нарушено, то для теоретического обоснования разрешимости понадобятся другие средства. Выше указывалось, что даже самые простые задачи механики требуют допущения логарифмических и полярных особенностей. Стеснительным для прикладных задач является также первое условие. Последнее же условие, если будет нарушено какое-либо из двух первых, может оказаться, вообще, невыполнимым. Если задано граничное значение аналитической функции, то особенности и прообразы точек ветвления нельзя задавать произвольно, они связаны некоторой зависимостью.

Рассмотрим обратную краевую задачу в общей постановке.

Даны 2ν функций

$$u = u_k(s), \quad v = v_k(s), \quad 0 \leq s \leq l_k, \quad k = 1, 2, \dots, \nu, \quad (56)$$

определяющих в плоскости комплексного переменного w ν кривых L_{kw} (вообще говоря, самопересекающихся). Определить в плоскости z ν замкнутых кривых L_{kz} , ограничивающих область D_z , вообще говоря, многолистную, так, чтобы выражение $w_k(s) = u(s) + iv(s)$ было краевым значением на контуре L_{kz} функции $w = f(z)$, аналитической в области D_z , за исключением отдельных точек, где она может иметь особенности заданного типа (логарифмические или полярные) с заданной главной частью.

Задачу в такой постановке впервые сформулировали (1956 г.) в совместной работе Ф. Д. Гахов и Ю. М. Крикунов. Опираясь на топологические методы, они выводят зависимость суммарного числа особых точек и прообразов точек ветвления от так называемого граничного индекса, определяемого заданием граничных значений. Здесь же излагаются некоторые общие соображения о путях решения задачи. Исследование вопроса продолжено (1964—1966 гг.) Л. А. Аксентьевым. Им получены некоторые условия разрешимости задачи; при этом было установлено, что вопросы разрешимости задачи для многосвязной области и на римановых поверхностях близки. Однако обратная краевая задача в общей постановке далека от полного решения. Остается открытым основной вопрос: как построить ту риманову поверхность, на которой контур, определяемый уравнениями (56), ограничивает область, подобную однолистной, т. е. такую, которая может быть взаимно однозначно, за исключением точек ветвления, конформно отображена на некоторую стандартную однолистную область, например плоскость с прямолинейными разрезами.

Расширение класса граничных функций. В постановке обратной краевой задачи от граничных значений аналитической функции, задаваемых уравнениями (50), требовались производные, удовлетворяющие условию Гельдера. Это требование не является необходимым. Оно вызвано лишь желанием оставаться в классе функций, непрерывных вплоть до контура. Но аппарат, используемый для решения, позволяет поста-

вить задачу для более широкого класса функций. Приведем основные результаты исследования этого вопроса, полученные (1953 г.) Ф. Д. Гаховым.

Из постановки задачи (существование дуг кривых L_z, L_w) вытекает, что данный и искомый контуры спрямляемые и, следовательно, задаваемые функции $u(s), v(s)$ должны иметь ограниченную вариацию. Известное свойство конформного отображения — инвариантность множеств меры нуль — автоматически сужает класс задаваемых функций до абсолютно непрерывных. Две операции, производимые над заданными функциями в процессе решения, — отыскание дуги $\sigma(s)$ и обращение последней — требуют наложения еще двух дополнительных условий: 1) $u(s), v(s)$ должны иметь почти всюду ограниченные производные и 2) множество значений s , для которых они одновременно обращаются в нуль, должно иметь меру нуль.

При соблюдении указанных (достаточных) условий применим весь остальной аппарат решения обратной краевой задачи и может быть использована приведенная выше схема решения. Однако при таком расширении допущений надо считаться с возможной неоднозначностью решения. В определяемый формулой (51) логарифм $\ln \frac{dz}{d\xi}$ может войти еще множитель $\exp \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{i\theta} + \xi}{e^{i\theta} - \xi} d\psi(\theta)$, где $\psi(\theta)$ — так называемая син-

гулярная функция, не возрастающая с производной, почти всюду равной нулю. Для единственности решения необходимо и достаточно, чтобы сингулярная функция была тождественно равна постоянной. Последнее возможно, если искомые контуры ограничить классом кривых В. И. Смирнова (кривые, у которых логарифм модуля производной функции, конформно отображающей ограниченную ею область на круг, представим интегралом Пуассона через свои граничные значения).

Особые точки контура. При классической постановке задачи, сформулированной нами в начале раздела, обеспечивалась гладкость искомого контура. При общей постановке возможны решения, нигде не гладкие, так что теряется возможность исследования индивидуальных особенностей. В некоторых приложениях приходится отыскивать контуры гладкие, за исключением конечного числа точек, где допустимы особенности — угловые точки или точки возврата. Такого рода особенности возникают, если допустить одновременное обращение обеих производных задаваемых функций $u(s), v(s)$ в нуль или же допустить разрывы первого рода этих функций. Сформулируем некоторые результаты, полученные (1959 г.) Ф. Д. Гаховым и И. М. Мельником.

Пусть $u(s), v(s)$ в окрестности точки s_0 достаточное число раз дифференцируемы; пусть в их разложении по формуле Тейлора некоторое число последовательных производных одновременно обращается в нуль и $p \geq 2$ — номер первой, отличной от нуля производной. Тогда s_0 для контура L_w может быть: 1) обыкновенной точкой, 2) точкой возврата с углом 2π , 3) точкой возврата с нулевым углом. В зависимости от этого соответствующая точка контура L_z будет 1) угловой

точкой с углом $\frac{\pi}{p}$, 2) угловой точкой с углом $\frac{2\pi}{p}$ (при $p = 2$ точка будет обыкновенной), 3) точкой возврата.

Исследованы также случаи, когда для $u(s)$, $v(s)$

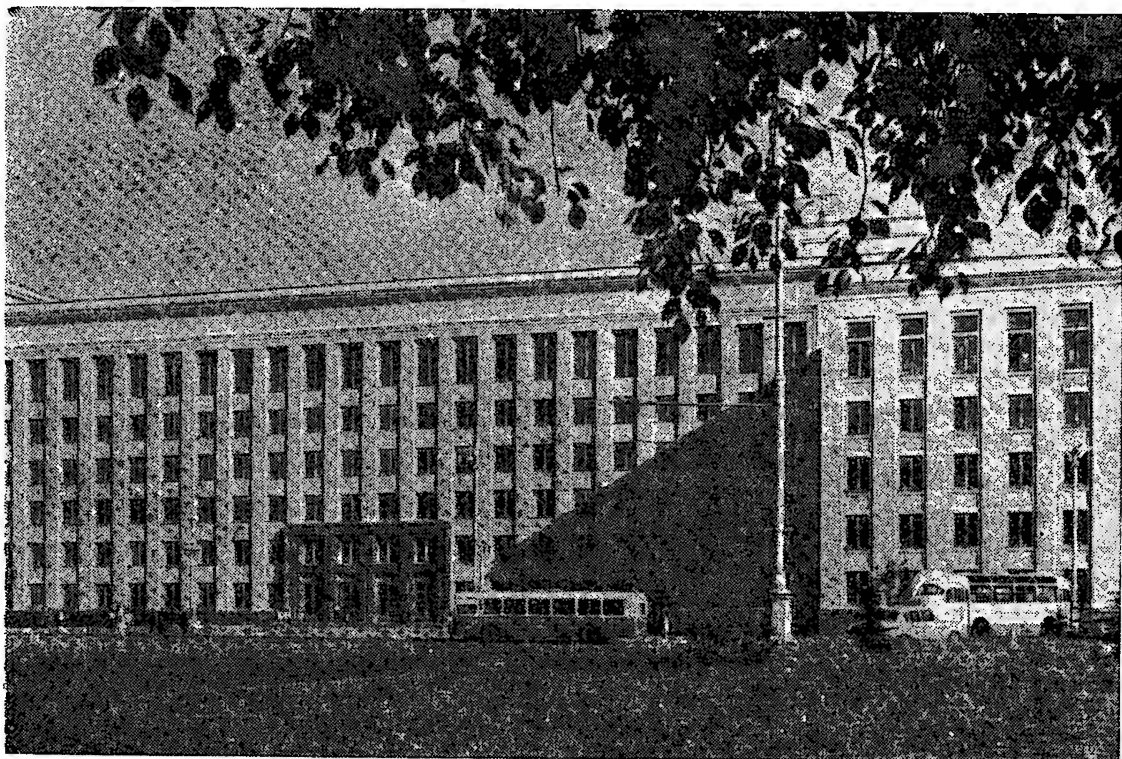
$$u(s) = |s - s_0|^r \varphi(s), \quad v(s) = |s - s_0|^r \psi(s), \quad r > 0.$$

$$u(s) = e^{\frac{a}{|s-s_0|^\alpha}} \varphi(s), \quad v(s) = e^{\frac{a}{|s-s_0|^\alpha}} \psi(s), \quad a > 0, \quad \alpha > 0.$$

Во всех этих случаях особенностями и заданного контура L_w , и искомого L_z могут быть или угловые точки, или точки возврата.

Заметим, что задачи отыскания контура с особенностями встречаются в работах по некоторым прикладным вопросам. Самым первым таким исследованием является работа (1952 г.) Г. Г. Тумашева, в которой определяется особенность авиационного профиля в критических точках обтекающего потока.

Смешанные задачи. Смешанными обратными краевыми задачами называют такие задачи, в которых некоторые части искомого контура задаются, а недостающие — отыскиваются. Классическим примером такого рода задач может служить задача гидромеханики о струйном течении жидкости. Здесь известной частью искомого контура является обтекаемый контур, неизвестной частью — форма струи. На известной части контура заданы условия, характерные для прямой краевой задачи, на искомой — условия, характерные для обратной задачи.



Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина.

Если изобразить данные геометрически, то в плоскостях z и w получаются пунктирные линии, причем заданным кривым $\lambda_k(\tau)$ соответствуют в плоскости w пробелы контура L_w , и, наоборот, определяемым уравнениями $w = u(\tau) + iv(\tau)$ кривым μ_{kw} соответствуют пробелы контура L_z . Таким образом, ни в одной из плоскостей нет контура, ограничивающего область. В этом заключается главная трудность решения смешанных задач, в общем случае не преодоленная. В некоторых частных постановках задачи этой трудности может не быть.

В. Н. Монахов решал (1960 г.) смешанную задачу в следующей постановке. Заданная часть искомого контура λ_z представляет собой ломаную, составленную из отрезков прямой. Этой части L_z соответствует соотношение между крайними значениями вещественной и мнимой частей

$$\Phi(u, v) = 0. \quad (57)$$

На недостающей части контура μ_z заданы две функции

$$u = u(\tau), \quad v = v(\tau), \quad (58)$$

где τ — один из перечисленных выше параметров. Уравнения (57) и (58) в совокупности определяют в плоскости замкнутый контур L_w (дополнительно предполагается, что концы совпадают).

Сформулированная задача сравнительно просто сводится к краевой задаче Гильберта аналитических функций с разрывными коэффициентами для области D_w . Точками разрыва являются концы звеньев ломаной. Теория краевых задач дает возможность решить задачу в замкнутой форме через интегралы типа Коши. Весьма сложный вопрос об определении входящих в решение произвольных постоянных таким образом, чтобы найденный контур включал в себя заданную ломаную, решается аналогично тому, как это делает А. Вайнштейн для постоянных, входящих в формулу Шварца — Кристоффеля. Общий случай, когда заданная часть контура — произвольная гладкая кривая, решается предельным переходом при стремлении длины звеньев ломаной к нулю.

При других частных постановках смешанной обратной краевой задачи иногда удается путем замены переменных в плоскостях аргумента и функции получить в некоторой вспомогательной плоскости область, в которой обратная краевая задача может быть сформулирована как прямая. В этом случае класс искомых функций, как правило, усложняется и вместо аналитических функций (решения системы уравнений Коши — Римана) приходится рассматривать решения некоторой системы уравнений эллиптического типа, как правило, нелинейных. При окончательном решении задач используется теория прямых краевых задач для соответствующего класса уравнений. Таким путем В. Н. Монахов решил (1964 г.) некоторые задачи гидромеханики о струйном течении идеальной жидкости. Задачи гидромеханики сжимаемой жидкости сразу формулируются в классе функций, удовлетворяющих системам эллиптического типа.

Несколько смешанных краевых задач теории струйного течения жидкости решил (1961, 1962 гг.) М. И. Хайкин. Он приводит их к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению, существование решения которого доказывает методами функционального анализа (принцип Лерэ — Шаудера).

Приложения. Теория обратных краевых задач возникла из механических приложений и развивается в тесной связи с ними. В монографии Г. Г. Тумашева и М. Т. Нужина «Обратные краевые задачи и их приложения» примерно три четверти места уделено прикладным вопросам. Таков же удельный вес прикладных работ в приведенной в ней библиографии. Мы остановимся лишь на основных результатах.

Истоки теории обратных краевых задач лежат в задачах гидромеханики о струйном течении жидкости и построении авиационного профиля по заданным на нем скорости или давлению. Как упоминалось, первым исследованием, положившим начало развитию теории обратных краевых задач в СССР, была работа (1945 г.) Г. Г. Тумашева. Задача об отыскании профиля изучена в ней многосторонне. Разные стороны этой темы в дальнейшем изучались М. А. Копыриным и М. Т. Нужиным, В. Д. Чугуновым, Г. И. Костычевым, Р. Б. Салимовым, О. М. Киселевым, А. М. Казбаном, Н. И. Глебовым, Л. И. Котляром, Г. Н. Пыхтеевым, Р. М. Насыровым и др.

Второй важной серией обратных задач гидромеханики являются задачи теории фильтрации. Основная из них — определение формы основания гидротехнического сооружения по заданному на нем распределению скорости фильтрации. Упомянем в связи с этой задачей прежде всего работы М. Т. Нужина и Н. Б. Ильинского, в частности монографию «Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений» (1963 г.). Близкой задачей по используемому математическому аппарату является задача о нахождении формы тела по заданному импульсивному давлению при ударе (В. С. Рогожин).

Третья серия обратных задач гидромеханики — различного рода смешанные задачи, ведущие свое начало от классической задачи струйного течения. С этими задачами связаны работы Л. Л. Лебедева, В. Д. Чугунова, а также упоминавшиеся выше работы по механике сжимаемой жидкости. Большое количество прикладных работ связано с задачами модификации профиля, т. е. с построением профиля, близкого к некоторому заданному.

Одной из областей приложения обратных краевых задач является теория упругости. Уже в ранней (1949 г.) работе М. Т. Нужина была решена задача об определении формы поперечного сечения скручиваемого стержня по заданным на контуре продольным смещениям. Обратные краевые задачи теории упруго-пластического кручения стержней решены В. В. Соколовским, Л. А. Галиным, В. Я. Булыгиным.

Обратные краевые задачи находят применение пока в основном в механике. Из других областей математической физики в этой связи можно указать лишь работу М. Т. Нужина по обратной задаче электрического (теплого) поля и работы Д. Н. Четаева по задаче теории электроразведки полезных ископаемых.

Обобщенные аналитические функции

1

Введение

Рассмотрим функцию $f = u + iv$, где $u(x, y)$, $v(x, y)$ — действительные функции действительных аргументов x, y , определенные в некоторой области G комплексной плоскости $z = x + iy$. Если в окрестности каждой точки $z_0 \in G$ функция f может быть представлена степенным рядом относительно разности $z - z_0$, то f называется аналитической функцией комплексного переменного z в области G . Эквивалентное определение состоит в том, что функция f в каждой точке $z_0 \in G$ имеет производную, понимаемую как предел

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}, \quad (59)$$

не зависящий от способа стремления Δz к нулю³⁰, где $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, $\Delta z = z - z_0$. Пара функций $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ представляет собой непрерывно дифференцируемое решение системы двух действительных уравнений (система Коши — Римана)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (60)$$

Поскольку обратное утверждение также справедливо, можно сказать, что теория аналитических функций комплексного переменного есть теория системы дифференциальных уравнений (60).

С геометрической точки зрения пара функций $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ отображает некоторое множество точек плоскости $z = x + iy$ в какое-то множество точек плоскости $w = u + iv$. Если функции u, v непрерывно дифференцируемы и «главная часть» отображения представляет собой аффинное (линейное) невырожденное отображение, то «бесконечно малому» кругу в плоскости z соответствует «бесконечно малый» эллипс в плоскости w . Если в каждой точке этот «бесконечно малый» эллипс сводится к «бесконечно малому» кругу, то рассматриваемое отображение называется конформным. Каждая аналитическая функция порождает конформное отображение, причем каждое конформное отображение порождается либо аналитической функцией, либо функцией, комплексно-сопряженной ей.

Механическую интерпретацию аналитическая функция получает при рассмотрении стационарного плоско-параллельного движения идеальной жидкости. В предположении, что жидкость несжимаема и в рассматриваемой области нет источников и стоков, а компоненты $U(x, y)$, $V(x, y)$ поля скоростей непрерывно дифференцируемы, уравнение неразрывности течения принимает вид первого уравнения (60) для

³⁰ Для простоты мы предположим, что $f'(z)$ — непрерывная функция точки $z \in G$.

пары $u = U$, $v = -V$. Допуская также, что рассматриваемое движение лишено завихренностей, получаем второе уравнение системы (60). Таким образом, изучение класса описанных течений жидкости и изучение аналитических функций комплексного переменного z — задачи эквивалентные.

Каждое из указанных определений аналитической функции допускает обобщения, если в рассматриваемых задачах либо изменить смысл «приращения» Δf в формуле (59), либо снять некоторые ограничения, использованные при рассмотрении названных задач геометрии или гидродинамики, либо рассмотреть более общую, чем (60), систему уравнений. В соответствии с этим мы получаем тот или иной класс «обобщенных» аналитических функций.

Уравнения (60) представляют собой простейшую эллиптическую систему 1-го порядка на плоскости. Более общую систему (в квазилинейном случае) можно привести к виду

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial y} + a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y} + a_0u + b_0v &= f, \\ \frac{\partial v}{\partial x} + a_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial y} + c_0u + d_0v &= g, \\ a_{11} > 0, \quad \Delta = a_{11}a_{22} - \frac{1}{4}(a_{12} + a_{21})^2 &\geq \Delta_0 > 0, \quad \Delta_0 = \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Теория обобщенных аналитических функций (в широком смысле слова) — это теория функций $f = u + iv$, где пара функций (u, v) является решением системы вида (61). При таком понимании теория обобщенных аналитических функций охватывает чрезвычайно широкий круг задач анализа, геометрии и механики, являющихся обобщениями указанных выше задач.

Много топологических свойств аналитических функций сохраняется в классе функций, реализующих так называемые квазиконформные отображения. Такие (непрерывные) отображения по определению преобразуют наперед заданное семейство бесконечно малых эллипсов E_z в плоскости z в некоторое (также наперед заданное) семейство бесконечно малых эллипсов E_w в плоскости w . Каждый бесконечно малый эллипс может быть задан парой функций p и θ , где $p \geq 1$ — отношение большой полуоси a эллипса к малой, а θ — угол наклона a к вещественной оси, причем эти «характеристики» эллипсов и в w -плоскости, и в z -плоскости могут зависеть как от точки (u, v) , так и от точки (x, y) . Несложные вычисления показывают, что если функции u, v , реализующие указанные отображения, дифференцируемы, то они удовлетворяют системе вида (61), в которой $a_0 \equiv b_0 \equiv c_0 \equiv d_0 \equiv f \equiv g \equiv 0$. В частности, если семейство E_z зависит только от (x, y) , а E_w сводится к семейству кругов, то соответствующая система принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \beta \frac{\partial v}{\partial x} + \gamma \frac{\partial v}{\partial y}, \\ -\frac{\partial u}{\partial y} &= \alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \alpha\gamma - \beta^2 &\equiv 1, \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

и называется системой уравнений Бельтрами. К этой знаменитой системе приводятся также задача конформного отображения поверхностей на плоскость, задача о приведении положительно определенной квадратичной дифференциальной формы или эллиптического уравнения 2-го порядка к каноническому виду и др. К квазиконформному отображению приводится также классическая задача о построении плоского установившегося течения потока сжимаемой жидкости, причем семейство E_z в этом случае — семейство кругов, а каждый эллипс E_w параллелен действительной оси. М. А. Лаврентьев определил (1946 г.) понятие наиболее общего квазиконформного отображения, соответствующего некоторому классу общих нелинейных систем 1-го порядка на плоскости. Основные результаты этой теории изложены в его монографии «Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа» (1962 г.).

Естественное обобщение аналитических функций на случай дифференциальных уравнений высшего порядка принадлежит (1950 г.) Я. Б. Лопатинскому. Он рассматривает «обобщенную систему Коши — Римана»

$$Au = Bv, \quad Bu = -Av,$$

в которой A, B — произвольные дифференциальные операторы конечного порядка с аналитическими коэффициентами

$$A = \sum_{k+l \leq n} a_{kl} \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}, \quad B = \sum_{k+l \leq n} b_{kl} \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}.$$

Предполагая, что операторы A, B перестановочны и что результат характеристических форм

$$\sum_{k+l=n} a_{kl} \lambda^k \mu^l, \quad \sum_{k+l=n} b_{kl} \lambda^k \mu^l$$

не обращается в нуль ни в одной точке рассматриваемой области, Лопатинский строит локальное разложение « (A, B) -аналитической» функции в некоторый однозначно определенный и равномерно сходящийся обобщенный ряд Тейлора, а также получает аналоги теоремы и интегральной формулы Коши.

Допустим, что главная часть системы (61) приводится к системе вида (62). Если в качестве новых независимых переменных ввести пару функций, реализующих однолистное решение некоторой системы (62), то система (61) редуцируется к каноническому виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + au + bv &= f, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + cu + dv &= g. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Теория обобщенных аналитических функций (в узком смысле слова) есть теория комплекснозначных функций $f = u + iv$, где u, v — некоторое решение системы (63). В статье И. Н. Векуа «Системы диф-



Г. Н. Положий.

дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек» (1952 г.) были заложены основы теории обобщенных аналитических функций: получены представления первого и второго рода обобщенных аналитических функций, обобщенная формула Коши, разложение обобщенной аналитической функции в обобщенные ряды Тейлора и Лорана, установлена теорема единственности (см. § 2), изучен класс краевых задач линейного сопряжения (см. § 3) и рассмотрены приложения к теории оболочек (см. § 4). Весьма подробно изложены теория обобщенных аналитических функций и ее приложения в монографии И. Н. Векуа «Обобщенные аналитические функции» (1959 г.), удостоенной в 1962 г. Ленинской премии. Эта книга положена в основу изложения настоящего раздела.

Американский математик Берс предложил обобщение аналитических функций комплексного переменного, основанное на видоизменении понятия производной (59). Предположим, что на всей плоскости E задана пара функций w_0 и w_1 , достаточно гладких и удовлетворяющих условию $\text{Im}(w_0, w) \geq k > 0$, $k = \text{const}$ («порождающая пара функций»). Тогда каждую комплекснозначную функцию f единственным образом можно представить в виде

$$f(x, y) = \chi_0(x, y) w_0(x, y) + \chi_1(x, y) w_1(x, y),$$

где χ_0, χ_1 — действительные функции. Обобщенная по Берсу производная функции f относительно порождающей пары w_0, w_1 является пределом

$$f' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} \equiv \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - \chi_0(x_0, y_0) w_0(x, y) - \chi_1(x_0, y_0) w_1(x, y)}{\Delta z}, \quad (59')$$

если он существует и не зависит от способа приближения Δz к нулю. Непрерывная функция f , обладающая в области G производной вида (59'), называется, согласно терминологии Берса, псевдоаналитической функцией первого рода в области G . Можно доказать, что для существования производной (59') необходимо и достаточно, чтобы имело место уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + Af + B\bar{f} = 0, \quad (64)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

A, B — некоторые функции в области G , однозначно определяемые по порождающей паре. Отделяя в уравнении (64) действительную и

мнимую части, приходим к однородной системе (63). Следовательно, понятие псевдоаналитической функции первого рода совпадает с понятием обобщенной аналитической функции (в узком смысле слова). Функция $\chi = \chi_0 + i\chi_1$ названа Берсом псевдоаналитической функцией второго рода, причем она удовлетворяет уравнению $\partial_{\bar{z}}\chi - q(z)\overline{\partial_z\chi} = 0$, $q = (w_0 + iw_1) / (w_0 - iw_1)$. Каждая такая функция осуществляет (по крайней мере, локально) квазиконформное отображение. Основные результаты по теории псевдоаналитических функций изложены в монографии Берса «Теория псевдоаналитических функций» (1953 г.).

До создания полной теории обобщенных аналитических функций предлагались те или иные обобщения, приводящие к некоторым частным случаям системы (61). В СССР разработке этого круга вопросов посвящены исследования Г. Н. Положего, Б. В. Шабата и др. Г. Н. Положий определил (1947 г.) понятие p -аналитической функции $f = u + iv$, где u и v удовлетворяют системе вида (61), в которой отличны от нуля только коэффициенты $a_{11} \equiv -a_{22} \equiv p(x, y) > 0$. Ему же принадлежат понятия соответствующей производной, интеграла, вычета, а также обобщенная формула Коши для рассматриваемого случая. В последнее время им были рассмотрены и более общие случаи, а также указаны применения этой теории в задачах теории упругости³¹. Обобщенную формулу Коши для линейной однородной системы (61) без младших членов получил (1949 г.) Б. В. Шабат.

Получены также обобщения аналитических функций на случай нескольких независимых переменных. Весьма интересны исследования (1953—1955 гг.) А. В. Бицадзе, в которых изучен пространственный аналог интегралов типа Коши и указаны его приложения к теории многомерных сингулярных интегральных уравнений и теории краевых задач для некоторых эллиптических систем уравнений со многими аргументами. В. И. Шевченко перенес (1962—1965 гг.) на случай аналогичных систем уравнений в пространствах высшей размерности ряд основных теорем и формул из теории обобщенных аналитических функций и изучил некоторые краевые задачи.

Настоящий раздел посвящен в основном обобщенным аналитическим функциям в узком смысле слова. В линейном случае система уравнений (61) с помощью некоторого однолистного решения уравнений вида (62) и последующей линейной замены (вообще говоря, с переменными коэффициентами) искомых функций редуцируется к каноническому виду (63). Это позволяет некоторые приведенные ниже результаты перенести на общий случай. Необходимо, однако, заметить, что указанная редукция требует некоторой гладкости коэффициентов исходной системы. Чтобы избежать этих ограничений, целесообразно применяемые методы видоизменить таким образом, чтобы можно было исследовать систему (61) в ее исходном виде. Для большого круга вопросов это удастся сделать (см. § 2, 3).

³¹ Г. Н. Положий. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Изд-во Киевского университета, К., 1965.

Благодаря тому, что главная часть системы (63) совпадает с классической системой Коши — Римана, не только сохраняются многие общие свойства аналитических функций в классе обобщенных аналитических функций, но и существуют между этими двумя родственными классами функций многочисленные зависимости и связи. Ниже указаны явные формулы, выражающие эти связи. Эти формулы являются фундаментом всей теории обобщенных аналитических функций. Они позволяют предугадать, а затем и фактически доказать ряд свойств обобщенных аналитических функций, используя соответствующие свойства аналитических функций.

Изложенные ниже методы представляют собой дальнейшее развитие методов, созданных ранее в исследованиях И. Н. Векуа об эллиптических уравнениях с аналитическими коэффициентами на плоскости («Новые методы решений эллиптических уравнений», 1948 г.). Принципиальным моментом в развитии методов, основанных на использовании аналитических функций комплексного переменного, является кроме более широкого диапазона применений выявление того факта, что эти методы существенно связаны не с предположением об аналитичности коэффициентов, а только с эллиптичностью системы, причем общие закономерности справедливы только при предположении, грубо говоря, об измеримости и суммируемости коэффициентов системы. Разумеется, при этом нельзя пользоваться классическим понятием решения эллиптической системы уравнений — необходимо ввести в рассмотрение понятие обобщенных решений.

2

Основные принципы теории обобщенных аналитических функций

Важную роль в теории обобщенных аналитических функций играет интегральный оператор

$$Tf \equiv T_G f = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\zeta - z}, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad (65)$$

где G — некоторая область плоскости E переменных x, y (случай $G = E$ не исключается). Он встречается во многих исследованиях. Впервые этот оператор был получен (1912 г.), по-видимому, румынским математиком Д. Помпеем. Наиболее естественно он возникает, если попытаться записать в комплексном виде известную формулу Грина — Остроградского.

Отметим основные свойства оператора (65).

Теорема I. 1. Если $f(\xi, \eta)$ суммируема в ограниченной области G , то Tf как функция точки $(x, y) \in G$ существует почти всюду и принадлежит любому пространству $L_p(G^*)$, где $1 \leq p < 2$, G^* — произвольная ограниченная область. Вне G функция Tf аналитическая по z и исчезает на бесконечности.

2. Функция $Tf(z)$ имеет обобщенную (в смысле С. Л. Соболева) производную $\partial_{\bar{z}} Tf(z)$, определяемую равенством

$$\iint_G Tf \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} dx dy + \iint_G \varphi f dx dy = 0$$

(при всех финитных в G функциях φ), причем

$$\psi = \partial_{\bar{z}} Tf(\bar{z}) \equiv \frac{\partial Tf(z)}{\partial \bar{z}} = f(x, y) \quad (66)$$

(естественно, для почти всех $x, y \in G$). Общее обобщенное решение неоднородной системы (60), записанной в комплексной форме $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = f$, представляется формулой

$$g(z) = \Phi(z) - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\xi - z} \equiv \Phi(z) + T_g f, \quad (67)$$

где $\Phi(z)$ — аналитическая внутри G функция.

3. Если $f \in L_p(G)$, $p > 2$, где G — ограниченная область, то функция $g = T_g f$ удовлетворяет условиям

$$\left. \begin{aligned} |g(z)| &\leq M_1 L_p(f; G), \\ |g(z_1) - g(z_2)| &\leq M_2 L_p(f; G) |z_1 - z_2|^\alpha, \quad \alpha = \frac{p-2}{p} > 0, \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

где z, z_1, z_2 — произвольные точки E , M_1, M_2 — некоторые постоянные, $L_p(f; G)$ — норма функции f в пространстве $L_p(G)$. Если $G = E$, второе неравенство сохраняется, а первое заменяется соотношением

$$g = Tf = O(|z|^{\frac{p-2}{p}}) \text{ вблизи } \infty; \quad (69)$$

если, однако,

$$f(\zeta) \equiv f(\xi, \eta), \quad |\zeta|^{-2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) \in L_p(|\zeta| \leq 1), \quad p > 2,$$

то соотношения (68) сохраняются с заменой $L_p(f; G)$ нормой

$$L_{p,2}(f; E) = L_p(f; |z| \leq 1) + L_p(|z|^{-2} f\left(\frac{1}{z}\right), |z| \leq 1),$$

а (69) заменяется соотношением

$$g = Tf = O(L_{p,2}(f) |z|^{\frac{2-p}{p}}). \quad (69')$$

4. Пусть $f \in L_p(E)$, $p > 1$. Тогда функция $g(z) \equiv Tf$ имеет обобщенную производную $\partial_z g \equiv \partial_z Tf = (\partial_z \bar{T}f)$, для которой

$$\frac{\partial Tf}{\partial z} = \Pi f \equiv -\frac{1}{\pi} \iint_E \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{(\xi - z)^2}; \quad (70)$$

интеграл понимается в смысле главного значения по Коши и представляет собой ограниченный оператор Π в любом пространстве $L_p(E)$, $p > 1$, а также в гильбертовых функциональных пространствах C_α .

Последнее утверждение вытекает из известных результатов Кальдерона — Зигмунда по многомерным сингулярным операторам; ограниченность в C_α устанавливается с помощью непосредственного изучения интегрального оператора (70).

Остановимся вначале на применениях оператора (65) в теории уравнений Бельтрами (62). В комплексной записи эта система принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - q(z) \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ w &= u + iv, \quad |q(z)| \leq q_0 < 1, \quad q_0 = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

причем q элементарно выражается через α , β , γ . По всей вероятности, впервые в общем виде проблему отыскания однолистных решений уравнения (71) в локальной постановке решил (1916 г.) Л. Лихтенштейн, предположив, что $q \in C_\alpha(G)$. В более общем случае, когда функция $q(z)$ просто непрерывна, проблема решена геометрическими методами в исследованиях (1935 г.) М. А. Лаврентьева. Метод решения этой проблемы, основанный на применении оператора (65), предложен (1955 г.) И. Н. Векуа. Он позволяет довести исследование задачи до конца при одном только предположении об измеримости функции $q(z)$, удовлетворяющей условию (71). Несколько позднее, но независимо от И. Н. Векуа аналогичный метод был предложен Альфорсом.

Ищем решения уравнения (71) в виде

$$w(z) = z - \frac{1}{\pi} \iint_E \frac{f(\xi, \eta)}{\xi - z} d\xi d\eta \equiv z + Tf(z), \quad f \in L_p(E). \quad (72)$$

Используя формулы (66), (70), из (71) для определения функции f получаем двумерное сингулярное интегральное уравнение

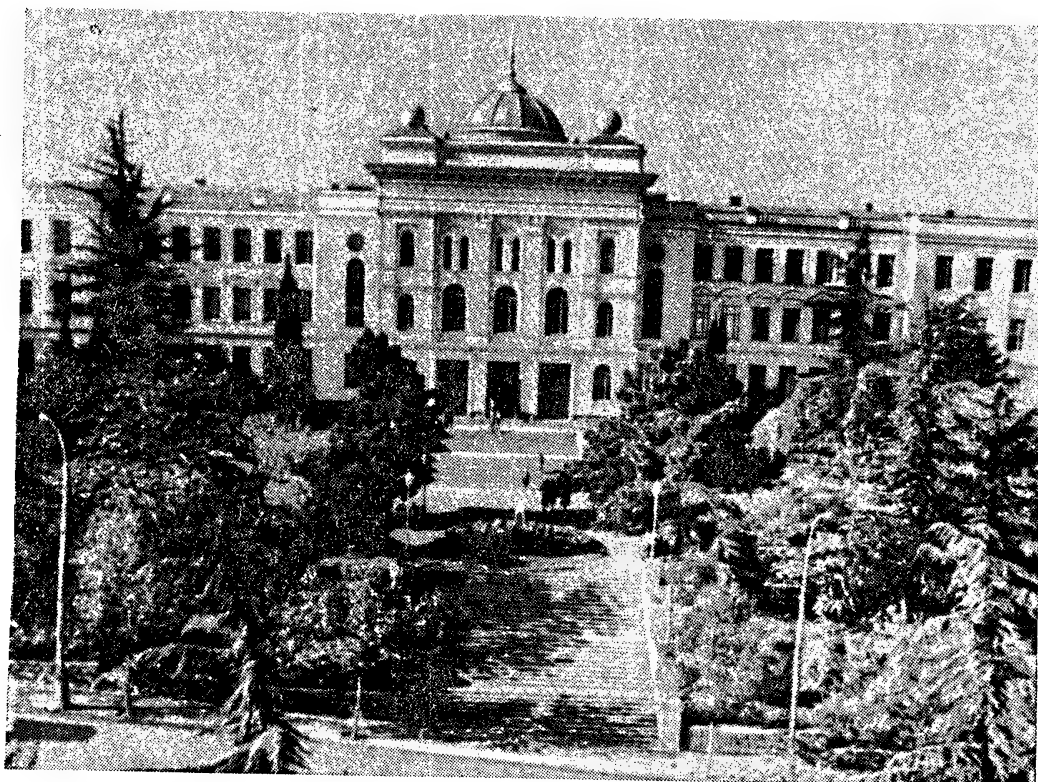
$$f - q\Pi f = q. \quad (73)$$

Норма оператора Π в L_p , как следует из теоремы Рисса о выпуклости, непрерывно зависит от p , и, поскольку элементарные вычисления показывают, что в L_2 эта норма равна единице, из неравенства (71) следует, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и $2 < p < 2 + \varepsilon$ норма оператора $q\Pi f$ меньше единицы. В силу принципа сжатых отображений уравнение (73) имеет единственное решение в $L_p(E)$, которое можно получить методом последовательных приближений. Как следует из формулы (69), функция (72) обладает свойствами

$$w(\infty) = \infty, \quad z^{-1}w(z) \rightarrow 1 \text{ при } z \rightarrow \infty, \quad (74)$$

а в силу второго неравенства (68) она непрерывна в смысле Гельдера с показателем $\alpha = \frac{p-2}{p} > 0$.

Теорема II. Пусть $q(z) \equiv q(x, y)$ — произвольная измеримая функция, удовлетворяющая неравенству (71) и тождественно исчезающая в окрестности бесконечно удаленной точки. Тогда функция (72), где f — решение уравнения (73), удовлетворяет уравнению (71) и осуществляет гомеоморфное отображение z -плоскости на w -плоскость,



Тбилисский государственный университет.

удовлетворяющее условию Гельдера вместе с обратной функцией $z = z(w)$. Если $q \in C_\alpha^m$, $0 < \alpha < 1$, $m \geq 0$, то функция (72) принадлежит к классу C_α^{m+1} . Каждое обобщенное решение w_1 уравнения (71) в области G представимо в виде

$$w_1(z) = \Phi(w(z)), \quad (74')$$

где $\Phi(w)$ — аналитическая функция в $w(G)$.

Основной гомеоморфизм уравнения (71), построенный по формуле (72), отображает всю z -плоскость на всю w -плоскость и поэтому оказывается также полным гомеоморфизмом. Существование полного гомеоморфизма можно доказать и без предположения, что $q \equiv 0$ в окрестности точки $z = \infty$, причем условия (74) однозначно его определяют.

Первоначально теорема II была доказана И. Н. Векуа в предположении, что $q \in C_\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Обобщение на случай измеримых q , а также дальнейшие приложения метода к теории квазиконформных отображений принадлежат (1957 г.) Б. В. Боярскому.

Переходя к изучению системы (63), заметим прежде всего, что ее удобно записать в комплексном виде (64), ибо это позволяет воспользоваться свойством (66) интегрального оператора (65). В самом деле, этот оператор дает возможность проинтегрировать уравнение (64) в простейшем случае $B \equiv 0$ в G :

$$f(z) = \Phi(z) \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_G \frac{A(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\xi - z} \right\} \equiv \Phi(z) e^{-TA(z)}, \quad (75)$$

где $\Phi(z)$ — произвольная аналитическая функция в G . Формула (75) впервые была получена (1931 г.) румынским математиком Теодореску в предположении, что A — ограниченная измеримая функция. В настоящее время доказано, что эта формула сохраняет силу и в более общем случае, когда $A \in L_p(G)$, $p > 2$.

Формулу вида (75) можно обобщить и на случай произвольного уравнения (64). Будем говорить, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$Lf \equiv \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + Af + B\bar{f} = F \quad (76)$$

в окрестности точки z_0 , если в некоторой окрестности G_0 точки z_0 она обладает обобщенной производной f_z и равенство (76) выполняется почти всюду. Если функция f удовлетворяет уравнению (76) в окрестности каждой точки области G , за исключением некоторого дискретного относительно G множества G_i , то будем говорить, что f является обобщенным решением уравнения (76) в области G ; G_i называется множеством особых точек решения f . В случае пустого множества G_i решение f называется регулярным.

Теорема III.1. Пусть функции A, B и F принадлежат пространству $L_{p,2}(E)$ при $p > 2$. Тогда каждое регулярное решение уравнения (76) удовлетворяет (в любой области G) условию Гельдера с показателем $\alpha = \frac{(p-2)}{p}$.

2. Пусть A, B, F принадлежат $C_\alpha^m(G)$, $m \geq 0$, $0 < \alpha < 1$. Тогда каждое регулярное решение уравнения (76) принадлежит к классу $C_\alpha^{m+1}(G)$.

3. Пусть $A, B, F \in L_{p,2}(E)$, $p > 2$, и пусть

$$g(x, y) = \begin{cases} A + B \frac{\bar{f}}{f}, & \text{если } f \neq 0, \quad z \in G, \\ A + B, & \text{если } f = 0, \quad z \in G. \end{cases}$$

Тогда каждое обобщенное решение в любой области G однородного ($F \equiv 0$) уравнения (76) представимо в виде

$$f(x, y) = \Phi(z) e^{-\omega(x, y)}, \quad \omega(x, y) \equiv -T_G g(z), \quad (77)$$

причем $\omega(x, y)$ в силу теоремы I.3 непрерывна по Гельдеру (случай $G = E$ не исключается), а $\Phi(z)$ — аналитическая в G функция.

Формула (77) называется представлением первого рода обобщенных аналитических функций. Важно отметить, что представление (77) обобщается и на тот случай, когда условия $A, B \in L_{p,2}(E)$ заменяются условиями $\Phi_A A, \Phi_B B \in L_p(\bar{G})$, $p > 2$, где Φ_A, Φ_B — некоторые аналитические функции в области G . Формула (77) играет особенно важную роль в теории обобщенных аналитических функций. Целый ряд фундаментальной важности свойств аналитических функций переносится на рассматриваемый класс функций.

Теорема IV.1. В условиях теоремы III.3 множество $\mathcal{M}$ нулей и особых точек (полюсов и существенно особых точек) обобщенной аналитической функции совпадает с множеством нулей и особых точек некоторой аналитической функции; если $f \neq 0$, то $\mathcal{M}$ — дискретное множество точек относительно G , причем кратности нулей и полюсов являются целыми числами.

2 («внутренняя» теорема единственности). Если в этих же условиях регулярное решение однородного уравнения (76) (при $F \equiv 0$) обращается в нуль на некотором множестве точек, имеющем хотя бы одну внутреннюю предельную точку, или имеет «нуль бесконечного порядка», то $f \equiv 0$ внутри G .

3 («граничная» теорема единственности). Если в этих же условиях регулярное решение однородного уравнения (76) (при $F \equiv 0$) имеет угловые граничные значения на некоторой спрямляемой дуге γ и эти граничные значения на γ равны нулю, то $f \equiv 0$ внутри G .

Внутренняя теорема единственности впервые была доказана (1933 г.) Т. Карлеманом. Она является, несомненно, одним из значительных достижений в рассмотренном круге вопросов в период до создания общей теории обобщенных аналитических функций. При использовании теоремы Карлемана (доказательство которой основано на совершенно иных соображениях) представление (77) легко вытекает из формулы (75). Таким способом оно было получено (1952 г.) И. Н. Векуа. Несколько иным путем этот результат был получен (1951 г.) независимо от И. Н. Векуа Берсом без явной формулы для функции $\omega(x, y)$.

Следствия формулы (77) не ограничиваются теоремами IV. Приведем полную формулировку обобщенного принципа максимума и соответствующей теоремы Лиувилля.

Теорема V.1 (обобщенный принцип максимума). Пусть $A, B \in L_{p,2}(G)$, $p > 2$. Каждое непрерывное в замкнутой области $\bar{G} = G + \partial G$ решение однородного уравнения (76) удовлетворяет неравенству

$$|f(x, y)| \leq M \max_{t \in \partial G} |f(t)|, \quad (x, y) \in G + \partial G, \quad (78)$$

где $M \geq 1$ — некоторая постоянная, зависящая только от A, B и p .

2 (обобщенная теорема Лиувилля). В условиях $A, B \in L_{p,2}(E)$ каждое регулярное решение f однородного уравнения (76) (при $F \equiv 0$), ограниченное в окрестности бесконечно удаленной точки, имеет вид

$$f(x, y) = ce^{\omega(z)} = c \exp \left\{ -T_E \left(A + B \frac{\bar{f}}{f} \right) \right\}, \quad c = c_1 + ic_2, \quad (79)$$

где c_1, c_2 — действительные постоянные. Если f обращается в нуль, хотя бы в одной точке замкнутой плоскости E , то f тождественно равна нулю на E .

Опираясь на утверждение V.1, легко доказать аналоги теорем Вейерштрасса, аналог леммы Шварца, принцип аргумента, теорему Руше и др. Решения вида (79) при $c \neq 0$ играют роль постоянных из-

теории аналитических функций и поэтому называются обобщенными постоянными.

Из формулы (66) вытекает, что каждое регулярное обобщенное решение уравнения (76) удовлетворяет также интегральному уравнению

$$f(z) - \frac{1}{\pi} \int \int_G \frac{A(\zeta) f(\zeta) + B(\zeta) \bar{f}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta d\eta = f - T_G(Af + B\bar{f}) = g, \quad (80)$$

где $g = TF + \Phi$, Φ — аналитическая в G функция, и, обратно, каждое решение интегрального уравнения (80) является регулярным обобщенным решением уравнения (76). Поэтому уравнение (80) можно рассматривать как аппарат для построения любого решения уравнения (76). Приведем наиболее важные результаты из тех, которые можно получить в этом направлении.

Теорема VI.1. Предположим, что $A, B \in L_{p,2}(E)$, $p > 2$, и что $g \in L_{q,0}(E)$, $q \geq \frac{p}{p-1}$, т. е. что $g(z)$, $g\left(\frac{1}{z}\right)$ суммируемы со степенью q в единичном круге. Тогда оператор $P_E f = T_E(Af + B\bar{f})$ вполне непрерывен в пространстве $L_{q,0}(E)$ над полем действительных чисел, причем однородное уравнение (80) при $G = E$ имеет только нулевое решение в $L_{q,0}(E)$.

2. Пусть G — произвольная ограниченная область, причем $A, B \in L_p(G)$, $p > 2$, $F \in L_1(G)$ (так что $TF \in L_\gamma(G)$, $\gamma > 2$). Для любой функции $\Phi \in L_q(G)$, $q \geq \frac{p}{p-1}$, уравнение (80) однозначно разрешимо, причем

$$f = f_0 + f_*, \quad f_0 = \Phi + R\Phi, \quad f_* = (T + RT)F, \quad (81)$$

где R (резольвента уравнения (80)) — вполне непрерывный оператор интегрального типа

$$R\Phi(z) = \int \int_G \Gamma_1(z, \zeta) \Phi(\zeta) d\zeta d\eta + \int \int_G \Gamma_2(z, \zeta) \bar{\Phi}(\zeta) d\zeta d\eta. \quad (82)$$

Уравнение (80) можно решать методом последовательных приближений.

3. Пусть $\Phi(z)$ — аналитическая в G функция, которая может иметь любые особенности, и $t \in G$. Тогда существует обобщенное решение f однородного уравнения (76), для которого отношение $f_0 = \frac{f}{\Phi}$ непрерывно продолжимо на E , принадлежит $c_\alpha(E)$, $\alpha = \frac{p-2}{p}$, не обращается в нуль ни в одной точке на E и $f_0(t) = 1$.

Для доказательства последнего утверждения рассмотрим уравнение

$$f_0(z) - \frac{z-t}{\pi} \int \int_G \frac{A(\zeta) f_0(\zeta) + B_0(\zeta) \bar{f}_0(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-t)} d\zeta d\eta = 1, \quad (83)$$

$$B_0 = \frac{\bar{\Phi}}{\Phi} B.$$

Уравнение (83) однозначно определяет функцию f_0 , ибо соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение $f_0 \equiv 0$. Это вытекает из формулы (66) и обобщенной теоремы Лиувилля. Из последней теоремы вытекает также, что решение $f_0(z)$ не может иметь ни одного нуля на E . Как видно из формулы (77), функция f удовлетворяет нелинейному уравнению

$$f(z) = \Phi(z) \exp \left\{ \frac{z-t}{\pi} \int_G \frac{A(\zeta) f(\zeta) + B\bar{f}(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-t)f(\zeta)} d\zeta d\bar{\zeta} \right\}. \quad (84)$$

Следовательно, теорему VI.3 можно рассматривать, как обращение формулы (77).

Формулы (81) (при $F \equiv 0$) и (82) называются представлением второго рода обобщенных аналитических функций и наряду с представлением первого рода (77) имеют фундаментальное значение в рассматриваемой теории. Покажем, например, как из представления второго рода получается обобщенная формула Коши, представляющая решение f однородного уравнения (76) в каждой внутренней точке через значения f на границе Γ области G . При $F \equiv 0$ правая часть уравнения (80) совпадает с функцией $\Phi(z)$. Учитывая, что $T_G(Af + B\bar{f})$ в случае ограниченной области G аналитическая вне G и исчезает на бесконечности, легко получаем

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z}. \quad (85)$$

Подставляя эту формулу в (81), (82) и делая очевидные преобразования, находим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Lambda_1(z, \zeta; G) f(\zeta) d\zeta - \Lambda_2(z, \zeta; G) \bar{f}(\zeta) d\bar{\zeta}. \quad (86)$$

Это и есть обобщенная формула Коши. Функции Λ_1, Λ_2 зависят, вообще говоря, от области G и легко выражаются через функции Γ_1, Γ_2 из (82). С другой стороны, если обозначить $X_1(z, \zeta), X_2(z, \zeta)$ — решения однородного уравнения (76), соответствующие в силу теоремы VI.3 функциям $\frac{1}{2(\zeta-z)}, \frac{1}{2i(\zeta-z)}$, то можно показать, что

$$\Lambda_1(z, \zeta) = X_1(z, \zeta) + iX_2(z, \zeta), \quad \Lambda_2(z, \zeta) = X_1(z, \zeta) - iX_2(z, \zeta).$$

Отсюда легко вывести: пара функций Λ_1, Λ_2 удовлетворяет системе

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\bar{z}} \Lambda_1 + A(z) \Lambda_1 + B(z) \bar{\Lambda}_2 &= 0, \\ \partial_z \Lambda_2 + A(z) \Lambda_2 + B(z) \bar{\Lambda}_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

При $z = \zeta$ первая функция Λ_1 имеет главную часть $\frac{1}{(z-\zeta)}$, вторая функция — главную часть $O(|z-\zeta|^{-\frac{2}{p}})$; для фиксированных z при $\zeta \rightarrow \infty$ функции Λ_1, Λ_2 имеют нуль 1-го порядка. Отмеченные свойства ядер формулы (86) позволяют построить теорию обобщенных

интегралов типа Коши, получить и исследовать представления обобщенных аналитических функций в виде контурных интегралов вдоль Γ с вещественной плотностью и др.

Приведем еще два важнейших утверждения.

Теорема VII (принцип продолжения по непрерывности). Пусть $A, B \in L_{p,2}(E)$, $p > 2$, и G_1, G_2 — произвольные области, границы которых имеют общую спрямляемую жорданову дугу γ . Если f_1, f_2 удовлетворяют однородному уравнению (76) в областях G_1 и G_2 , непрерывны соответственно в $G_1 + \gamma, G_2 + \gamma$ и $f_1 = f_2$ на γ , то функция

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in G_1, \\ f_2(z), & z \in G_2, \end{cases}$$

является обобщенной аналитической функцией в $G_1 + G_2 + \gamma$.

На основании этой теоремы можно получить обобщенный принцип симметрии Римана — Шварца о продолжении через отрезок действительной оси или дугу окружности.

Теорема VII (принцип компактности). Пусть X — некоторое компактное в $L_{p,2}(E)$, $p > 2$, множество функций и K — объединение всех обобщенных аналитических функций при всевозможных $A, B \in X$. Если семейство $\{f_n(z)\}$ функций из множества K равномерно ограничено внутри G , то оно компактно.

Изложим в заключение способ построения полных систем обобщенных аналитических функций относительно произвольной области G . По определению такая система обладает свойством, заключающимся в том, что линейная оболочка системы плотная во множестве регулярных обобщенных решений однородного уравнения (76). Если область G ограничена простыми кривыми Жордана $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, причем Γ_0 содержит внутри $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, а точки $z_1, \dots, z_m$ содержатся соответственно внутри $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, то система рациональных функций

$$(z - z_0)^{n-1}, (z - z_j)^{-k}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (88)$$

как известно, полная в классе аналитических функций в области G . Формула (86) сопоставляет системе (88) полную систему частных решений однородного уравнения (76) в классе обобщенных аналитических функций. Используя полученную систему частных решений, можно построить теорию рядов Тейлора и Лорана для обобщенных аналитических функций, доказать соответствующий аналог теорем Абеля и др. Теория обобщенных степенных рядов несколько иным способом построена в исследованиях Берса и Агмона.

Обобщенные аналитические функции, удовлетворяющие однородному уравнению (76), с точки зрения топологических свойств осуществляемых ими отображений резко отличаются от аналитических функций комплексного переменного. Как впервые обнаружил (1956 г.) Б. В. Шабат, некоторые решения указанного уравнения (даже при постоянных коэффициентах) порождают отображения, которые могут переводить области в одномерные континуумы, изменять ориентацию отображения вдоль некоторых линий внутри области, порождать

«складчатые» римановы поверхности и т. д. Кроме того, для таких уравнений не имеет места теорема Римана в обычной ее формулировке. Однако легко доказывается следующее предложение: для всякой заданной точки z_0 можно указать обобщенную функцию (при условии $A, B \in L_{p,2}(E)$, $p > 2$), однолиственную в некоторой окрестности G_0 этой точки (И. Н. Векуа). Более того, существуют даже целые семейства решений однородного уравнения (76), которые в рассматриваемой области G осуществляют «внутренние» отображения, т. е. отличающиеся от конформных только на некоторый гомеоморфизм (И. И. Данилюк, 1958 г.).

Рассмотрим вкратце общую эллиптическую систему вида (61) и покажем, как развитые выше методы применяются для ее исследования. Эквивалентное комплексное уравнение имеет вид

$$\partial_z w - q_1 \partial_z w - q_2 \partial_z \bar{w} + Aw + B\bar{w} = F; \quad (89)$$

коэффициенты этого уравнения элементарно выражаются через коэффициенты системы (61), причем из эллиптичности последней вытекает, что

$$|q_1| + |q_2| \leq q_0 < 1, \quad q_0 = \text{const.} \quad (90)$$

Если $q_2 \equiv 0$, $B \equiv 0$, $F \equiv 0$, то главная часть уравнения (89) является уравнением Бельтрами (71), общее решение которого представляется формулой (74'). С помощью некоторого гомеоморфизма w_0 уравнения вида (71) уравнение (89) в рассматриваемом случае приводится к виду (89), где $q_1 \equiv 0$, $q_2 \equiv 0$, $B \equiv 0$, $F \equiv 0$. Общее решение представляется в виде (75). Сопоставляя (74'), (75) и вводя в общем случае обозначения

$$q = q_1 + q_2 \frac{\partial_z \bar{w}}{\partial_z w}, \quad A_0 = A + B \frac{\bar{w}}{w},$$

приходим к обобщению представления (77): каждое обобщенное решение однородного уравнения (89) можно представить в виде

$$w(z) = \Phi(w_0(z)) \exp \{TA_0\}, \quad (91)$$

где Φ — аналитическая функция, $w_0(z)$ — гомеоморфизм уравнения Бельтрами с коэффициентом q , TA_0 — непрерывная в смысле Гельдера функция. Очевидно, что представление (91) имеет место и тогда, когда коэффициенты левой части уравнения (89) зависят и от w , $\bar{w}$ и их частных производных любого порядка, лишь бы на рассматриваемых решениях выполнялось условие (90) и обычные требования, налагаемые на A и B . Как и (77), формула (91) допускает обращение. Указанные обобщения получены также Берсом, Ниренбергом (1954, 1955 гг.) и Б. В. Боярским (1957 г.).

Если коэффициенты A , B и правая часть F уравнения (76) — аналитические функции вещественных переменных x , y , то существует метод исследования, отличный от приведенного выше. Он основан на

том, что в рассматриваемом случае каждое достаточно гладкое решение уравнения (76) само аналитическое по x, y и поэтому допускает продолжение в область комплексных значений x, y . Считая, что $z = x + iy, \zeta = x - iy$, так что $z = \bar{\zeta}$ тогда и только тогда, когда x, y действительны, и обозначая $f(x, y) = f_1(z, \zeta), \dots, F(x, y) = F_1(z, \zeta)$, получаем уравнение

$$\frac{\partial f_1(z, \zeta)}{\partial \zeta} + A_1(z, \zeta) f_1(z, \zeta) + B_1(z, \zeta) \overline{f_1(\bar{\zeta}, \bar{z})} = F_1(z, \zeta), \quad (92)$$

совпадающее с (76) на плоскости $z = \bar{\zeta}$ в пространстве двух комплексных переменных z, ζ . Приводя уравнение (92) к эквивалентному уравнению типа Вольтерра и решая его, приходим к общему представлению всех решений уравнения (76) в однородном случае $F \equiv 0$

$$f(z) = \exp \left\{ \int_{z_0}^{\bar{z}} A_1(z, \tau) d\tau \right\} \left[\Phi(z) + \int_{z_0}^z \Gamma_1(z, \bar{z}, t) \Phi(t) dt + \right. \\ \left. + \int_{z_0}^{\bar{z}} \Gamma_2(z, z, \bar{t}) \bar{\Phi}(\bar{t}) d\bar{t} \right], \quad (93)$$

где $\Phi(z)$ — произвольная аналитическая функция в G , а Γ_1, Γ_2 (так называемые резольвенты уравнения) строятся методом последовательных приближений. Такой подход был предложен (1952 г.) И. Н. Векуа. Он наиболее тесно примыкает к упомянутым выше методам теории эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами.

Случай ограниченных областей и коэффициентов A_1, B_1 без особенностей полностью укладывается в рамки изложенной выше теории. Однако есть случаи, когда рассматриваемый метод имеет преимущества.

Первый из них соответствует предположению, что A и B — целые аналитические функции двух вещественных переменных. Условие $A, B \in L_{p,2}(E)$ не выполняется, между тем только что рассмотренным методом можно построить полную теорию уравнений вида (76). Второй случай возникает, когда $A(x, y)$ и $B(x, y)$ из уравнения (76) имеют особенности высокого порядка в отдельных точках или даже на целых линиях, входящих в границу. Пусть, например,

$$A = -\frac{\alpha}{4ir}, \quad B = -\frac{\alpha}{4ir}, \quad r \geq 0, \quad (94)$$

где α — действительное число. Соответствующее однородное уравнение (76) при $\alpha = n - 2$ описывает осесимметрические гармонические векторные поля в n -мерном пространстве; при других α к этому уравнению приводятся осесимметрические задачи теории упругости, некоторые задачи газовой динамики и др. Осуществляя выход в область комплексных уравнений и используя связь между получающимся уравнением и классическим уравнением Эйлера — Дарбу, удается выразить

ядра представления (93) через гипергеометрическую функцию, выяснить необходимые и достаточные условия ограниченности решения вплоть до оси $r = 0$, построить решения с заданными особенностями и, наконец (при $\alpha = 1$), обобщенную формулу Коши. Эта формула Коши носит «глобальный» характер в том смысле, что она справедлива в любой области G верхней полуплоскости с одними и теми же ядрами и соответствующий интеграл типа Коши дает решение рассматриваемого уравнения, регулярное вплоть до оси $r = 0$. Кроме уравнений (87) и аналогичных уравнений для сопряженного однородного уравнения (76), относительно второй пары переменных (это соответствует замене коэффициентов A, B коэффициентами $-A, -\bar{B}$); соответствующие ядра осесимметрического уравнения удовлетворяют условиям

$$\Lambda_1(z, x) + \Lambda_2(z, x) = 0, \quad \Lambda_1(x, \zeta) = \Lambda_2(x, \zeta) = 0, \\ -\infty \leq x \leq +\infty.$$

Отмеченное обобщение изложенного выше метода вместе с некоторыми приложениями в теории краевых задач (см. § 3) предложено (1960—1962 гг.) И. И. Давилуком. В последнее время близкие к этим вопросы были предметом исследования С. А. Терсенова. Им обобщены некоторые теоремы и формулы серии (75) — (79), построена обобщенная формула Коши для любого и рассмотрены краевые задачи нескольких типов. В вышедших недавно работах Г. Н. Положего и его учеников исследуются уравнения, родственные указанным, и рассматриваются приложения их к осесимметрическим задачам теории упругости.

Кратко охарактеризованные в этом параграфе методы допускают далеко идущее обобщение на случай систем уравнений 1-го порядка эллиптического типа с $2n$ независимыми функциями двух независимых переменных. Глубокие обобщения в этом направлении сделаны (1958—1959 гг.) Б. В. Боярским. При некоторых вполне естественных предположениях рассматриваемая система приводится к каноническому виду (в однородном случае)

$$\partial_z w - Q(z) \partial_{\bar{z}} w + Aw + B\bar{w} = 0, \quad (95)$$

где w — искомый вектор с n комплекснозначными компонентами, Q, A, B — квадратные матрицы порядка n . Теория уравнений вида (95) имеет много общего с рассмотренным выше случаем $n = 1$. Существенно новым фактом, характерным для случая $n > 1$, является то, что здесь не всегда сохраняется аналог теоремы Лиувилля. Может случиться, что уравнение (95) будет иметь конечное число линейно независимых регулярных на всей плоскости решений, обращающихся в нуль на бесконечности.

В заключение отметим, что как в нашей стране (Ю. Л. Родин, В. Г. Михальчук и др.), так и за рубежом (Берс) интенсивно изучались эллиптические уравнения и системы на римановых поверхностях.

3

Теория краевых задач

В различных прикладных областях (см., в частности, следующий параграф) искомая обобщенная аналитическая функция должна удовлетворять тем или иным граничным условиям. Наиболее полно изучена общая краевая задача Гильберта (задача A)

$$\operatorname{Re}(\bar{\lambda}(z)f) \equiv \alpha u + \beta v = \gamma, \quad \lambda = \alpha + i\beta, \quad |\lambda| \equiv 1, \quad (96)$$

где α, β, γ — заданные функции на границе Γ рассматриваемой области G . Особый интерес к этой задаче объясняется чрезвычайно широким кругом ее применений в ряде областей теоретической и прикладной математики (анализ, геометрия, теория упругости, гидродинамика и др.). Кроме того, по своему характеру задача (96) выходит за пределы обычных классических закономерностей — в общем случае к ней неприменима известная альтернатива Фредгольма.

Предположим, что $A, B, F \in L_{p,2}(E)$, $p > 2$, граница Γ состоит из конечного числа дуг, удовлетворяющих условию Ляпунова, причем внутренние углы ν_j между этими дугами таковы, что $0 < \nu_j \leq 2$; наконец, предположим для простоты, что коэффициенты условия (96) удовлетворяют условию Гельдера с показателем $0 < \nu \leq 1$. При этих условиях решения естественно искать в классе непрерывных в $G + \Gamma$ функций. Вводим в рассмотрение также сопряженную задачу (задачу A')

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f'}{\partial \bar{z}} - Af' - \bar{B}\bar{f}' &= 0, \quad z \in G, \\ \operatorname{Re}\left[\lambda(z) \frac{dz}{ds} f'(z)\right] &= 0, \quad z \in \Gamma, \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

в том же классе функций. Из этих предположений вытекает одно важное свойство «топологического» характера: нули каждого нетривиального решения f однородной задачи A изолированы не только относительно G , но и относительно $G + \Gamma$. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Теорема IX. Предположим, что при указанных выше условиях Γ не имеет угловых точек и $f(z)$ — непрерывное в $G + \Gamma$ нетривиальное решение однородной задачи A (76), (96). Тогда

1. Функция f удовлетворяет условию Гельдера в замкнутой области $G + \Gamma$ и имеет конечное число нулей z_j на множестве $G + \Gamma$; в окрестности каждой точки z_j (включая граничные) имеет место разложение $f(z) = (z - z_j)^{n_j} \varphi_j(z)$, где $\varphi_j(z)$ непрерывна и отлична от нуля в окрестности точки z_j , а n_j — целые положительные числа.

2. Пусть N_G — сумма целых чисел n_j , относящихся к внутренним относительно G точкам, а N_Γ — сумма остальных чисел n_j , т. е. относящихся к границе Γ . Тогда на каждом граничном контуре Γ_i может

лежать лишь четное число нулей (т. е. N_{Γ_i} — число четное), причем справедливо соотношение

$$2N_G + N_{\Gamma} = 2n, \quad (98)$$

где

$$n = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg \lambda(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d \arg \lambda(t). \quad (99)$$

3. Если $n < 0$, то однородная задача $\dot{A}$ имеет только тривиальные решения; если $n \geq 0$, то $\dot{A}$ не может иметь более чем $2n + 1$ линейно независимых решений; при $n = 0$ каждое решение (если оно существует) имеет вид $c_0 w_0(z)$, где c_0 — действительное число и $w_0 \neq 0$ на $G + \Gamma$.

Соотношение (98) обобщается на тот случай, когда решение задачи $\dot{A}$ имеет конечное число полюсов в $G + \Gamma$.

Существенную роль при исследовании задачи A играет понятие сопряженной задачи (97). Полный качественный анализ задачи A можно получить с помощью теории сингулярных интегральных уравнений, если воспользоваться либо общим представлением второго рода для обобщенных аналитических функций, либо обобщенной формулой Коши. Сформулируем соответствующие результаты в виде следующего утверждения.

Теорема X.1 (критерий разрешимости неоднородной задачи). Для того чтобы неоднородная задача A была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы для любого решения f' сопряженной задачи (97) выполнялось условие

$$\frac{1}{2i} \int_{\Gamma} \lambda(t) f'(t) \gamma(t) dt - \operatorname{Re} \int_G \int f' F(z) dx dy = 0. \quad (100)$$

2 (теорема об индексе задачи). Справедлива формула

$$l - l' = 2n + 1 - m, \quad (101)$$

где l, l' — (конечные) числа линейно независимых (над полем действительных чисел) решений однородных задач $\dot{A}, \dot{A}'$, n — число (99), $m + 1$ — порядок связности области.

Сопоставляя теоремы IX и X, получаем ряд важных следствий. Приведем некоторые из них:

- 1) неоднородная задача A разрешима при любой правой части (F, γ) тогда и только тогда, когда $l' = 0$;
- 2) если $n < 0$, то $l = 0$, $l' = m - 2n - 1$;
- 3) если $n > m - 1$, то $l = 2n + 1 - m$, $l' = 0$;
- 4) если $m = 0$, т. е. если G — односвязная область, то при $n < 0$ получаем $l = 0$, $l' = -2n - 1 > 0$, а при $n \geq 0$ получаем $l = 2n + 1$, $l' = 0$.

Приведенные результаты полностью характеризуют задачу в односвязном (при $m = 0$) и многосвязном при $n < 0$, $n > m - 1$, случаях. «Особый» случай $0 \leq n \leq m - 1$ нуждается в дополнительном исследовании.

довании; такое исследование проведено И. Н. Векуа и Б. В. Боярским. Изучены также вопросы «корректности» задачи А.

Рассмотрим еще один способ изучения задачи А, основанный на использовании некоторых интегральных операторов типа (65), распространенных по области G . При исследовании этим способом не используются ни общие представления обобщенных аналитических функций, ни теория сингулярных уравнений. Получающиеся уравнения содержат вполне непрерывные операторы по области G .

Ограничимся для простоты случаем односвязной области G и неотрицательного индекса ($n \geq 0$). Первое предположение позволяет свести задачу А к виду

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + B\bar{f} = F(bG), \quad \operatorname{Re}[z^{-n}f(z)] = \gamma \text{ (на } \Gamma) \quad (102)$$

в единичном круге G , а второе — рассмотреть регулярный интегральный оператор

$$P_n f = -\frac{1}{\pi} \iint_G \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{z^{2n+1}\bar{f}(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}z} \right] d\xi d\eta. \quad (103)$$

Этот оператор по-прежнему непрерывен при $f \in L_p$, $p > 2$, и дает одну из «первообразных» относительно оператора $\partial \bar{z}$, но в отличие от оператора (65) обладает тем дополнительным свойством, что

$$\operatorname{Re}[z^{-n}P_n f] = 0 \quad (102')$$

для любой функции $f \in L_p$, $p > 2$. Таким образом, задача полностью эквивалентна уравнению

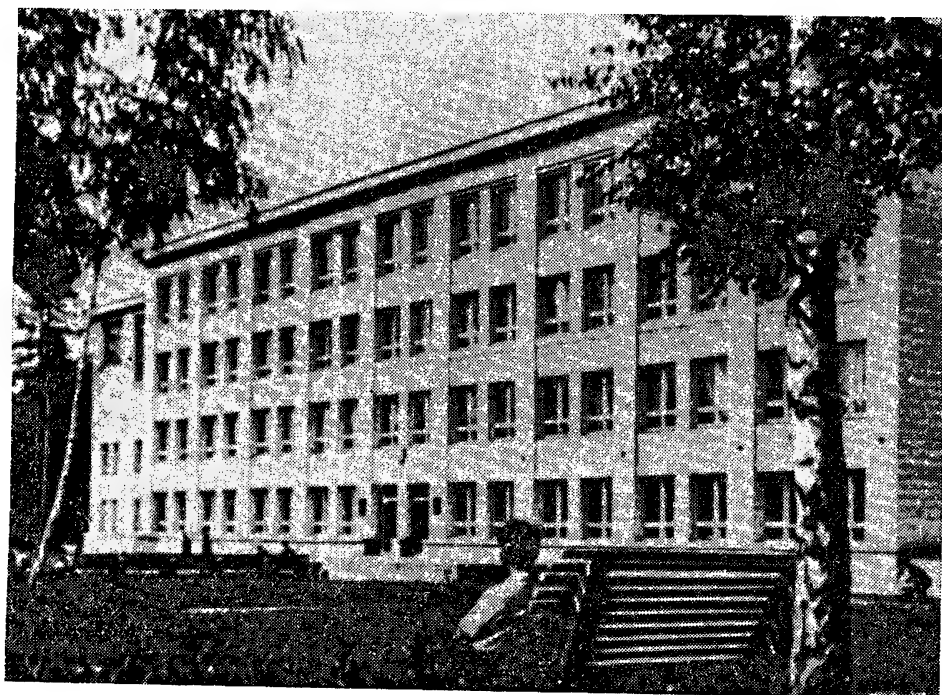
$$f(z) + P_n(B\bar{f}) = \Phi(z) + P_n F, \quad (104)$$

в котором $\Phi(z)$ — аналитическая функция, дающая решение задачи (102). Эта функция в случае единичного круга выписывается явно с помощью интеграла Шварца и содержит ровно $2n + 1$ действительных постоянных.

Теорема XI. Оператор $P_n(Bf)$ вполне непрерывен в $L_q(G)$, $q \geq \frac{p}{p-1}$; однородное уравнение, соответствующее (104), имеет только нулевое решение, так что неоднородное уравнение (104) всегда и однозначно разрешимо при любой правой части.

На основании этой теоремы снова получаются соответствующие результаты теоремы X.

Рассмотрен также случай отрицательного индекса (99). Указанный метод применим к исследованию задачи с наклонной производной для общего эллиптического уравнения 2-го порядка на плоскости, а его видоизменение, включающее сингулярный оператор типа (70), дает возможность изучить задачу Дирихле для общего квазилинейного уравнения эллиптического типа. Дальнейшее развитие метода применительно к задаче (96) для «общего» уравнения (89) в линейном и квазилинейном случаях принадлежит (1956—1958 гг.) В. С. Виноградову.



Новосибирский государственный университет.

Задачи ближайшего по трудности класса возникают тогда, когда граничное условие содержит производные 1-го порядка искомых функций (см. § 4). Используя комплексные обозначения и уравнение (76) в точках границы Γ , наиболее общую задачу этого класса можно привести к виду

$$\frac{\partial f}{\partial z} + B\bar{f} = O(b \ G), \quad \operatorname{Re} \left[a(z) \frac{\partial f}{\partial z} + b(z) f \right] = \gamma \quad (\text{на } \Gamma). \quad (105)$$

Впервые рассматриваемые методы применил (1955 г.) к этой задаче Б. В. Боярский. Он получил критерий разрешимости неоднородной задачи и формулу индекса. Иной подход к исследованию задачи (105) был предложен (1958 г.) И. И. Данилюком. Этот способ основан на «теореме эквивалентности», редуцирующей задачу (105) к рассмотренной ранее задаче типа (96), но уже для системы вида (76) с утроенным числом неизвестных комплексных функций. В простейшем случае (105) новая задача имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial z} + A_1 F + B_1 \bar{F} = O(b \ G), \quad \operatorname{Re} [g_1(t) F] = \gamma_1, \quad (106)$$

где $F = (F_1, F_2, F_3) \equiv (f, f_z, \bar{f})$, $A_1 B$ — треугольные матрицы, явно выписывающиеся через коэффициент B , $\gamma_1 = (\gamma, 0, 0)$, и

$$g_1 = \begin{pmatrix} b & a & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ i & 0 & i \end{pmatrix}. \quad (107)$$

К задаче (106) почти без изменения применимы и метод общих представлений и сингулярных интегральных уравнений, и метод интегральных уравнений вида (103), (104). В этом направлении найдены также другие условия разрешимости неоднородных задач, формула для индекса задачи $l - l' = 2n - 3 (m - 1)$, где $2\pi n = \Delta_\Gamma \arg \bar{a}(z)$, изучены «спектральные» свойства задачи, получающейся из (105) заменой B и b величинами соответственно λB и λb , где λ — постоянный параметр. Канонический вид задачи (в односвязном случае) соответствует матрице g_κ вида (107) при $b = 0$, $a = t^n$, а аналог оператора (103) (при $n \geq 0$) имеет вид

$$P\omega = -\frac{1}{\pi} \int_G \int \left[\frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z} + G_\kappa(z) \frac{\bar{z}\bar{\omega}(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}z} \right] d\bar{\zeta}d\eta, \quad G_\kappa = g_\kappa^{-1} \bar{g}_\kappa. \quad (108)$$

Этот оператор вполне непрерывен в соответствующем пространстве, и с его помощью задача редуцируется к эквивалентному интегральному уравнению, аналитически содержащему параметр λ . Исследования показывают, что спектр Λ этого уравнения дискретен. Поэтому, если $\lambda \notin \Lambda$, то при $n \geq 0$ имеем $l' = 0$, $l = 2n + 3$, а при $n < 0$ получаем $0 \leq l \leq 2$, причем возможны все промежуточные значения $l = 0, 1, 2$.

Упомянутая выше теорема эквивалентности перенесена также на случай общего нелинейного уравнения 1-го порядка и произвольного (в том числе нелинейного) краевого условия. В случае линейного краевого условия с помощью операторов вида (108) задача для общего нелинейного уравнения приводится к нелинейному сингулярному уравнению, которое исследуется затем методами нелинейного функционального анализа. Обобщения указанного подхода на случай линейных уравнений и граничных операторов более высокого порядка содержатся в исследованиях Тен-Ен-Чера и А. Джураева.

Остановимся кратко на результатах, полученных И. И. Данилюком для случая осесимметрических пространственных гармонических векторных полей, когда коэффициенты имеют вид (94) (при $\alpha = 1$). Пусть G — область, расположенная в полуплоскости $r \geq 0$, и часть ее границы Γ , не лежащая на оси $r = 0$, состоит из конечного числа кривых без точек общих и самопересечения. Часть из них $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ лежит строго выше оси $r = 0$, другая часть $\Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(n)}$ состоит из простых незамкнутых дуг, опирающихся концами на ось $r = 0$. Совокупность отрезков оси $r = 0$, входящих в границу G , обозначим Γ_0 ; следовательно, $\partial G = \Gamma + \Gamma_0$ и порядок связности G равен $(m + 1)$. Граничное условие имеет вид (96) и должно выполняться на части Γ ; на Γ_0 от искомого решения требуется только ограниченность. Рассмотрим два случая: $\alpha_1) \lambda(z) = a(z)$, где $a(z)$ непрерывна в смысле Гельдера на кривой $\Gamma + \bar{\Gamma}$ ($\bar{\Gamma}$ — симметричный с Γ относительно оси $r = 0$ контур); $\alpha_2) \lambda(z) = a(z) \frac{dz}{ds}$, где $z = z(s)$ — отнесенное к длине дуги уравнение контура Γ , а функция $a(z)$ удовлетворяет условию α_1 . Наконец, допустим, что кривая $\Gamma + \bar{\Gamma}$ в окрестности точек

ее пересечения с осью x имеет непрерывную кривизну. Введем также обозначение

$$\kappa = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^m [\arg \bar{a}(z)]_{\Gamma_i} + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n [\arg \bar{a}(z)]_{\Gamma^{(i)}}. \quad (109)$$

При сделанных предположениях доказывается, прежде всего, что любое нетривиальное решение $f(x, r)$ рассматриваемой однородной задачи $\bar{A}$ (76), (96) в осесимметричном случае имеет конечное число нулей на $G + \partial G$. Пусть N_G — сумма всех нулей (включая их кратности), внутренних относительно G . Если нуль z_0 лежит выше оси $r = 0$ на Γ , то

$$f = (z - z_0)^{\frac{n'}{v}} f_0' \quad (\text{в случае } \alpha_1) \quad \text{и} \quad f = (z - z_0)^{\frac{(n''+1)}{v-1}} f_0'' \quad (\text{в случае } \alpha_2),$$

где n', n'' — целые числа, f_0', f_0'' непрерывны и отличны от нуля в окрестности z_0 . Обозначим N_Γ сумму всех целых чисел n' или n'' , входящих в указанные разложения, N_0 — сумму кратности нулей, внутренних относительно Γ_0 , N — аналогичную сумму, относящуюся к нулям в точках пересечения Γ с осью $r = 0$, наконец, N_∞ — кратность нуля функции f на бесконечности. Теперь можем сформулировать утверждение, аналогичное теореме IX.2.

Теорема XII. Пусть $f(x, r)$ — нетривиальное и непрерывное в $G + \partial G$ решение однородной задачи (76), (96) в осесимметричном случае. Тогда

1. В случае α_1

$$\left. \begin{aligned} 4N_G + 2N_\Gamma + 2N_0 + N &= 2\kappa, & \text{если } N_\infty = 0, \\ 4N_G + 2N_\Gamma + 2N_0 + 2N_\infty + N &= 2\kappa + 2, & \text{если } N_\infty > 0. \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

2. В случае α_2

$$\left. \begin{aligned} 4N_G + 2N_\Gamma + 2N_0 + N &= 4m + 2n + 2\kappa, & \text{если } N_\infty = 0, \\ 4N_G + 2N_\Gamma + 2N_0 + 2N_\infty + N &= 4m + 2n + 2\kappa + 2, & \text{если } N_\infty > 0. \end{aligned} \right\} \quad (110')$$

Формулы (110), (110') обобщаются на случай конечных областей G , а также на тот случай, когда функция f имеет конечное в $G + \partial G$ число полюсов. Из них вытекают следствия о разрешимости рассматриваемой задачи.

Переходя к неоднородной задаче, ограничимся случаем, когда $n = 0, m \geq 1$ и Γ не имеет угловых точек. Сопряженную задачу будем рассматривать в классе непрерывных в $G + \partial G$ функций, исчезающих на действительной оси.

Теорема XIII.1. Для разрешимости однородного осесимметричного уравнения (76) при неоднородном краевом условии (96) необходимо и достаточно, чтобы при некоторой действительной постоянной V_x^∞ выполнялось равенство

$$\int_{\Gamma} \bar{\lambda}(z) \gamma(z) f'(z) dz - V_x^\infty \int_{\Gamma} \operatorname{Re}(i\lambda(\bar{z})) \lambda(z) f'(z) dz = 0 \quad (111)$$

для каждого решения f' сопряженной однородной задачи.

2. Справедлива формула индекса

$$l - l' = \kappa - m, \quad (112)$$

где κ — число (109), l — число линейно независимых (над полем действительных чисел) решений однородной задачи, исчезающих на бесконечности, l' — аналогичное число для сопряженной задачи.

Как и в рассмотренном выше случае, сопоставление теорем XII и XIII приводит к большому числу утверждений совершенно конкретного характера. Отметим также, что изучен случай и разомкнутых контуров Γ . В последние годы С. А. Терсеновым рассмотрены задачи, соответствующие случаю $n = 1, m = 0, \alpha$ — произвольное.

Остановимся еще на общей задаче линейного сопряжения в классе обобщенных аналитических функций. Точная ее постановка такова. Пусть на границе Γ произвольной конечной области G^+ заданы две, вообще говоря, комплекснозначные функции D и d . Для простоты предположим, что они удовлетворяют условию Гельдера, причем $D \neq 0$ на Γ . Через G^- обозначим дополнение множества $G^+ \cup \Gamma$ до полной плоскости E , содержащее бесконечно удаленную точку. Требуется определить кусочно-регулярную обобщенную аналитическую функцию, имеющую на бесконечности порядок, не превышающий заданное конечное число k , непрерывную на множествах $G^+, G^- \setminus \{\infty\}$, непрерывно продолжимую на Γ как изнутри G^+ , так и изнутри G^- и удовлетворяющую краевому условию

$$f^+(z) = D(z) f^-(z) + g(z), \quad z \in \Gamma. \quad (113)$$

Общая задача (76), (113) с помощью последней формулы (81) всегда может быть приведена к случаю однородного уравнения (76) ($F \equiv 0$).

Обозначим через $\chi(z)$ каноническое решение однородной задачи (113) ($g = 0$) в классе аналитических функций. Как известно, это решение можно построить с помощью интеграла типа Коши. Во всех конечных точках плоскости E оно отлично от нуля и имеет на бесконечности порядок $(-n)$, где $2\pi n = \Delta_\Gamma \arg D(z)$. Вводя в рассмотрение функцию $U(z) = f(z) / \chi(z)$, получаем для нее задачу

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} + AU + B_* \bar{U} &= 0 && (\text{внутри } G^+, G^-), \\ U^+(z) - U^-(z) &= h(z) && (\text{на } \Gamma), \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

где $B_*(z) = B(z) \bar{\chi}(z) / \chi(z)$, $h(z) = g(z) / \chi^+(z)$. При этом мы должны найти решения этой задачи, имеющие на бесконечности порядок, не превышающий числа $(k + n)$.

Рассмотрим сначала однородную задачу (113) ($g = 0$). В этом случае задача (114) тоже однородна ($h = 0$). Согласно теореме VII каждое решение представляет собой обобщенную аналитическую (соответствующую уравнению (114)) функцию на всей плоскости E и ее порядок на бесконечности не превышает $k + n$. Если $k + n < 0$, то согласно теореме V.2 решение $U(z)$ тождественно равно нулю. Если же $k + n \geq 0$, то все решения однородной задачи (114) могут быть построены на основании теоремы VI. 3. Для этого надо рассмотреть уравнение (83), заменив G плоскостью E , коэффициент B коэффициентом B_* , предположив, что $A, B_* \in L_{p,2}(E)$, $p > 2$, положив $t = \infty$, а вместо функции $\Phi(z)$ последовательно подставляя z^r, iz^r при $r = 0, 1, 2, \dots, k + n$.

Получим соответствующие решения $U_r, \tilde{U}_r$ однородной задачи (114), имеющие на бесконечности в точности порядок r . Общее решение будет иметь вид линейной комбинации (над полем вещественных чисел) этих частных решений. Таким образом, общее решение f_0 однородной задачи (76), (113) ($F \equiv 0, g = 0$) может быть представлено по формуле

$$f_0(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } k + n < 0, \\ \chi(z) \sum_{r=0}^{k+n} [C_r U_r(z) + \tilde{C}_r \tilde{U}_r(z)], & \text{если } k + n \geq 0, \end{cases}$$

где $C_r, \tilde{C}_r, r = 0, 1, \dots, k + n$, — произвольные вещественные постоянные.

Обозначим, далее, через $\Lambda_{1*}(z, \zeta), \Lambda_{2*}(z, \zeta)$ ядра обобщенной формулы Коши вида (86) применительно к дифференциальному уравнению задачи (114). Соответствующий обобщенный интеграл типа Коши с плотностью $h(z)$ даст решение неоднородной задачи (114). Следовательно, частное решение $f_1(z)$ неоднородной задачи (113) для однородного уравнения (76) ($F \equiv 0$) может быть представлено по формуле

$$f_1(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\chi^+(\zeta)} \Lambda_{1*}(z, \zeta) d\zeta - \frac{\overline{g(\zeta)}}{\overline{\chi^+(\zeta)}} \Lambda_{2*}(z, \zeta) d\bar{\zeta}.$$

Указанные результаты исследования задачи (113) в классе обобщенных аналитических функций принадлежат Л. Г. Михайлову (1957 г.).

Дальнейшие обобщения рассмотренных в настоящем параграфе задач приводят к проблематике, занимающей одно из главных мест в современных исследованиях по теории краевых задач для эллиптических уравнений и систем. Эти обобщения могут быть сделаны либо в сторону увеличения числа неизвестных функций, либо в сторону увеличения независимых переменных, либо и в том и другом направлениях.

Первое обобщение получается, если в условии (96) под $\lambda(z)$ подразумевается невырожденная квадратная матрица порядка n ($n > 1$), а под f — столбец из n неизвестных функций. В классе аналитических функций комплексного переменного первые существенные результаты для этой задачи получены (1908 г.) И. Племелем. В известном смысле полная теория задачи была создана грузинскими математиками. Из конкретных результатов этой теории наиболее существенными являются понятия частных индексов задачи и выяснения их роли, а также формула Н. И. Мухелишвили для определения индекса

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} [\arg \det \lambda(t)]_r.$$

На случай разрывных коэффициентов или нерегулярных граничных кривых теория обобщена Н. П. Векуа.

Рассуждения, почти дословно повторяющие соображения, с помощью которых получена формула индекса (101), в рассматриваемом случае приводят к формуле

$$l - l' = 2\kappa - n(m - 1).$$

В классе общих эллиптических систем на плоскости эта задача рассмотрена (1954 г.), по-видимому впервые, в исследованиях А. И. Вольперта. Здесь и была установлена последняя формула (при $m = 0$). При произвольном m эта формула получена (1959 г.) Б. В. Боярским. В исследованиях Вольперта и Боярского вводятся также понятия сопряженной задачи, в терминах которой формулируются условия разрешимости неоднородной задачи, и др. Следует отметить, что в работах А. И. Вольперта последнего времени применяются несколько иные методы, в которых одновременно используются теории фундаментальных матриц, сингулярных интегральных уравнений и некоторые топологические понятия. Общая «проблема индекса», выросшая из этого круга задач (см. также монографию И. Н. Векуа «Новые методы решения эллиптических уравнений», 1948 г.), стала одной из центральных проблем теории уравнений в частных производных.

Некоторые из указанных выше результатов распространены на римановы поверхности. Наиболее важные результаты в этом направлении получены американским математиком У. Коппельманом и советскими математиками Ю. Л. Родиным и Р. Н. Абдулаевым.

4

Некоторые приложения

Рассмотрим кусочно-регулярную поверхность S и обозначим $\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2)$ ее радиус-вектор. Если рассмотреть гладкое векторное поле $\vec{U} = \vec{U}(x^1, x^2)$ с той же областью определения, что и $\vec{r}$, то вектор-функцию $\vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{U}$ можно рассматривать как радиус-вектор некоторой поверхности S_1 . Линейные элементы поверхностей S и S_1 связаны равенством

$$ds_1^2 - ds^2 = 2d\vec{r}d\vec{U} + |d\vec{U}|^2.$$

Деформация поверхности S в поверхность S_1 , определяемая полем $\vec{U}$, называется бесконечно малым изгибанием, если в каждой точке (x^1, x^2)

$$d\vec{r} \cdot d\vec{U} = 0. \quad (115)$$

Рассматривая теперь деформацию поверхности S , определенную формулой $\vec{r}_\varepsilon = \vec{r} + \varepsilon \vec{U}$, легко убеждаемся, что при условиях (115) первые вариации коэффициентов $a_{\alpha\beta}$ основной дифференциальной формы, главной кривизны K и символов Кристоффеля $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ равны нулю.

Предполагаем, что кривизна K всюду на S положительна; она может претерпевать разрывы первого рода лишь на линиях склеивания. На такой поверхности существует так называемая сопряженно изомет-

рическая сеть координатных линий, относительно которой вторая основная квадратичная форма имеет вид

$$E = \Lambda(dx^2 + dy^2), \quad \Lambda = \sqrt{aK} \neq 0, \quad a = \det \|a_{\alpha\beta}\|.$$

В этой системе координат деривационные формулы Гаусса можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{a} \sqrt{K}} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\bar{z}} \right\} + \frac{B}{\sqrt{a} \sqrt{K}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dz} = 0, \quad (116)$$

где

$$B = -\frac{1}{\sqrt{a} \sqrt{K}} \cdot \frac{\partial \sqrt{a} \sqrt{K}}{\partial \bar{z}} + \Gamma_{12}^2 - i\Gamma_{21}^1.$$

Записывая (115) в виде равенств

$$\vec{r}_{\bar{z}} \cdot \vec{U}_{\bar{z}} = 0, \quad \vec{r}_z \cdot \vec{U}_{\bar{z}} + \vec{r}_{\bar{z}} \cdot \vec{U}_z = 0$$

и умножая (116) скалярно на $\vec{U}$, получаем уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + B\bar{w} = 0, \quad w = \frac{u_1 + iu_2}{\sqrt{a} \sqrt{K}} \equiv \frac{2\vec{U} \cdot \vec{r}_{\bar{z}}}{\sqrt{a} \sqrt{K}}. \quad (117)$$

Нормальная составляющая смещения u_0 представляется по формуле

$$u_0 = \frac{1}{K \sqrt{a}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [\sqrt{K} (u_1 + iu_2)] \right\}.$$

Принимая во внимание формулу $aK = b$, $b = b_{11}b_{22} - b_{12}^2$, где $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$ — тензор второй основной квадратичной формы, и учитывая, что первые вариации a и K равны нулю, получаем $\delta b = 0$. Отсюда в сопряженно изометрической системе координат находим

$$\delta b_{11} = -\delta b_{22}. \quad (118)$$

Из уравнений Кодацци получаем еще два уравнения для вариации $\delta b_{\alpha\beta}$; в этой же системе координат, учитывая (118), в комплексном виде их можно записать так:

$$\frac{\partial w_*}{\partial \bar{z}} - \bar{B}w_* = 0, \quad w_* = \sqrt[4]{K} (\delta b_{22} + i\delta b_{12}). \quad (119)$$

Вариации коэффициентов второй основной квадратичной формы геометрически вполне определяют деформированную поверхность. Как видно из (118) и (119), эти вариации однозначно определяются через решение уравнения (119). Поэтому уравнение (119) называется геометрическим уравнением бесконечно малых изгибов поверхности положительной кривизны.

Уравнение (115) имеет тривиальные решения вида $\vec{U} = \vec{A} \times \vec{r} + \vec{C}$, где $\vec{A}$, $\vec{C}$ — произвольные постоянные векторы. Такому вектору $\vec{U}$ соответствует деформация, для которой $\delta a_{\alpha\beta} = 0$, $\delta b_{\alpha\beta} = 0$,

$\alpha, \beta = 1, 2$; ее естественно назвать тривиальным бесконечно малым изгибанием. Касательные составляющие такого вектора, очевидно, будут удовлетворять уравнению (117) (которое можно назвать кинематическим уравнением бесконечно малых изгибаний), поэтому уравнение (117) имеет шесть линейно независимых тривиальных (но не нулевых) решений.

Уравнения (117), (119) обращаются в систему Коши — Римана тогда и только тогда, когда $B = 0$. Можно показать, что этому условию удовлетворяет класс поверхностей 2-го порядка положительной кривизны. Свойства аналитических функций $z = x + iy$ можно теперь интерпретировать как свойства, характеризующие бесконечно малые изгибания поверхностей 2-го порядка при $K > 0$. В случае произвольной поверхности положительной кривизны эти свойства выражаются через свойства обобщенных аналитических функций, удовлетворяющих уравнениям (117), (119). Часто непосредственная геометрическая интуиция может подсказать, что многие свойства поверхностей 2-го порядка сохраняются и в общем случае. Можно поэтому утверждать, что свойства аналитических функций $z = x + iy$ обобщаются на класс обобщенных аналитических функций в той мере, в какой свойства, характеризующие бесконечно малые изгибания поверхностей 2-го порядка положительной кривизны (например, эллипсоидов), присущи также широкому классу поверхностей положительной кривизны. Следуя этому геометрическому принципу, можно предугадать многие из тех свойств обобщенных аналитических функций, которые были доказаны выше аналитическим путем.

Жесткость поверхности, подчиненной тем или иным связям, означает, что уравнение (119) не имеет ненулевого решения, удовлетворяющего добавочным условиям, которые выражают наличие связей. Пусть рассматривается, например, замкнутая регулярная поверхность положительной кривизны (овалоид). Известно, что такая поверхность жесткая (теорема Либмана — Бляшке). Это означает, что уравнение (119) не имеет непрерывного и ограниченного на всей плоскости решения, обращающегося в нуль на бесконечности. Можно показать, что все условия обобщенной теоремы Лиувилля (см. § 2) соблюдены, поэтому жесткость овалоидов есть непосредственное следствие этой теоремы. В частности, классическая теорема Лиувилля означает жесткость полной сферической поверхности. Аналогично из теорем единственности (см. § 2) вытекает утверждение: если касательные компоненты вектора смещения обращаются в нуль на множестве, имеющем хотя бы одну внутреннюю предельную точку или порцию положительной меры на границе, то такая поверхность является жесткой в отношении бесконечно малых изгибаний.

Из условия (115) следует, что $d\vec{U} = \vec{V} \times d\vec{r}$. Если L — гладкая кривая на поверхности S , а $\vec{l}, \vec{s}$ — орты тангенциальной нормали и касательной к L , то можно показать, что $\vec{T}_{(l)} = \frac{d\vec{V}}{ds} = \vec{l}G_l + \vec{s}H_l$, причем вектор $\vec{T}_{(l)}$ можно интерпретировать как усилие, приложенное к пло-

щадке с нормалью $\vec{l}$ и соответствующее состоянию безмоментного напряженного равновесия некоторой оболочки (постоянной толщины), срединная поверхность которой совпадает с рассматриваемой поверхностью. Величины G_l и H_l суть нормальное и касательное усилия, причем для оболочек положительной кривизны

$$G_l = -\frac{1}{\sqrt[4]{K}} \operatorname{Re} \left[w_* \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right], \quad H_l = \frac{1}{\sqrt[4]{K}} \operatorname{Re} \left[w_* \frac{dz}{ds} \cdot \frac{dz}{dl} \right]. \quad (120)$$

Таким образом, всякое нетривиальное бесконечно малое изгибание поверхности можно интерпретировать как вполне определенное состояние безмоментного напряженного равновесия оболочки и наоборот.

Если рассматривается тонкая упругая оболочка, подчиняющаяся закону Гука, то с достаточным приближением можно считать, что всякое бесконечно малое изгибание срединной поверхности поддерживает в оболочке состояние чисто моментного напряжения равновесия, ибо такая деформация не вызывает удлинений линейных элементов и сдвигов. Поэтому связи, совместные с бесконечно малыми изгибаниями и однозначно их определяющие, эквивалентны статическим условиям, обеспечивающим в упругой оболочке чисто моментное напряженное состояние равновесия. В частности, при жестких связях, не совместных с бесконечно малыми изгибаниями, упругая оболочка не может находиться в состоянии чисто моментного напряженного равновесия. Но жесткие связи с большим запасом прочности практически не всегда приемлемы. При таких связях любая деформация поверхности вызывает растяжения (сжатия) и сдвиги, что иногда приводит к появлению трещин и складок, разрушению связей и пр. Поэтому значительный интерес представляют связи, которые, не обладая значительным запасом прочности, сравнительно легко поддаются возмущениям, приводящим их к связям, совместным с изгибаниями.

Рассмотрим оваловид S с конечным числом отверстий и щелей. Пусть в эти отверстия и щели вставлены некоторые жесткие или упругие тела, плотно их заполняющие, причем поверхность Σ этих тел в процессе деформации все время плотно прилегает к контурам L отверстий и щелей. Последнее условие можно записать в виде

$$\vec{v}\vec{U} = \vec{v}\vec{W} \text{ на } L, \quad (121)$$

где $\vec{v}$ — нормаль к Σ , а $\vec{U}$, $\vec{W}$ — векторы смещения соответственно S и Σ . Предположим, что Σ — абсолютно жесткая и идеально гладкая поверхность, а S и Σ взаимно ортогональны. Тогда условие (121) в случае поверхности положительной кривизны принимает вид

$$u_l = \sqrt[4]{a\sqrt{K}} \operatorname{Re} \left[w(z) \frac{dz}{dl} \right] = \gamma, \quad (122)$$

где γ — известные функции, равные нулю, если Σ неподвижны. Таким образом, мы пришли к рассмотренной в § 3 задаче (117), (122).

Можно указать также другие способы осуществления таких контурных связей, которые приводят к краевому условию (96). Предположим,

например, что вдоль L поверхность S склеена с соответствующими асимптотическими полосами (так называемый овалоид с отороченными краями). Тогда вдоль L должно выполняться условие

$$G_l = 0, \quad \text{т. е. } \operatorname{Re} \left[w_* \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right] = 0. \quad (123)$$

Краевое условие (123) является сопряжением к условию (122). Индексы этих задач соответственно равны $2(m-1)$, $(1-m)$. Используя соответствующие результаты § 3 относительно краевых задач рассматриваемого вида, приходим к следующим утверждениям.

Теорема XIV. 1. Пусть в указанных условиях $m > 1$. Тогда овалоид кинематически жесткий, т. е. не допускает бесконечно малых изгибаний (даже тривиальных).

2. Если $m = 1$, то овалоид либо кинематически жесткий, либо допускает одно (линейно независимое от остальных) бесконечно малое изгибание, причем если контуры отверстий расположены на параллельных плоскостях, то эти изгибания тривиальны.

3. Если $m = 0$, то овалоид допускает три линейно независимых бесконечно малых изгибания, причем эти изгибания тривиальны, если контур отверстия — плоская кривая.

4. Овалоид с отороченными краями геометрически жесткий, т. е. не допускает нетривиальных бесконечно малых изгибаний.

Заметим также, что в случае неортогональных S и Σ рассматриваемая задача сводится к некоторой задаче с наклонной производной (см. § 3).

Поля смещений и изгибаний по поверхностям положительной кривизны K описываются решениями эллиптических уравнений. Если же K меняет знак, то соответствующие уравнения принадлежат к «смешанному» типу. Отметим также, что методы теории обобщенных аналитических функций с успехом применены в исследовании нелинейных проблем изгибания поверхностей А. В. Погореловым, Н. В. Фоменко и др.

В заключение остановимся кратко на гидродинамических приложениях. Изучение обтекания тела вращения осесимметрическим потоком идеальной жидкости приводит к задаче (96) в случае α_2 при $a \equiv 1$. Если число m контуров $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, лежащих строго выше оси симметрии $r = 0$, положительно, то потенциал такого течения, вообще говоря, многозначен. Поэтому удобнее отыскивать поле скоростей. Краевое условие означает, что скорость в граничных точках, где она отлична от нуля, параллельна касательной к контуру.

Допустим, что на границе Γ рассматриваемой области G имеется q угловых точек выше оси $r = 0$, в которых угол относительно G равен $\nu\pi$, $\nu \geq 1$. Тогда из соотношений вида (110), (110') следует, что при $q \geq 2m$ задача об обтекании в классе непрерывных в $G + \partial G$ и исчезающих на бесконечности функций имеет только тривиальное решение, а при $q > 2m$ это же утверждение справедливо и для класса только ограниченных на бесконечности функций. Это означает, что в указанных случаях (в схеме безотрывочного течения) следует рассмат-

ривать течения, либо обращающиеся в некоторых угловых точках в бесконечность, либо имеющие вихри (например, изолированные) внутри поля течения.

Из упомянутых соотношений вытекает еще одно следствие, если рассматривать случай обтекания единственной незамкнутой дуги Γ_1 , расположенной выше оси $r = 0$, допуская, что поле скоростей имеет полюс 3-го порядка, расположенный на оси $r = 0$ (это означает, что на оси $r = 0$ расположен диполь, ось которого совпадает с осью $r = 0$). Если скорость обращается в нуль на концах дуги Γ_1 , то на бесконечности она отлична от нуля и система «диполь + контур» движется вдоль действительной оси с ненулевой скоростью. В рассматриваемом случае одной незамкнутой дуги $m = 1$, $q = 2$, следовательно, в классе потенциальных, непрерывных вплоть до Γ_1 и исчезающих на бесконечности течений задача имеет только нулевое решение. Можно также показать, что для разрешимости задачи о непрерывном обтекании Γ_1 при любой скорости на бесконечности необходимо и достаточно, чтобы Γ_1 была параллельна оси $r = 0$. Если же Γ_1 не параллельна оси $r = 0$, то эта задача не имеет нетривиального решения даже в классе отличных от нуля на бесконечности функций, однако «неоднородная» задача (соответствующая, например, некоторому распределению источников и вихрей вне Γ_1) разрешима при вполне определенном значении скорости на бесконечности.

В последние годы методы теории обобщенных аналитических функций нашли важные приложения в исследованиях В. Н. Монахова по нелинейным гидродинамическим задачам со свободной границей.

Внутренние экстремальные свойства однолистных аналитических функций в односвязных и многосвязных областях

Начало исследованиям по теории однолистных функций в СССР положено работой И. И. Привалова, изданной в 1924 г. (основные результаты этой работы вошли в его учебник «Введение в теорию функций комплексного переменного», выдержавший много изданий). Наиболее важную роль в истории развития отечественных исследований по однолистным функциям сыграли работы Г. М. Голузина и М. А. Лаврентьева. Многие из них оказали большое влияние на общее развитие исследований в данной области.

Первая (1929 г.) и вторая (1935 г.) работы Г. М. Голузина, относящиеся к рассматриваемой области, принадлежали еще к элементарному направлению в исследовании экстремальных свойств функций классов S (регулярных, нормированных, однолистных в круге $|z| < 1$) и Σ (регулярных, нормированных, однолистных в области $1 < |z| < \infty$). Из многих результатов, полученных в этих исследованиях, отметим две теоремы.

Теорема 1. Если $f(z)$ регулярна в круге $|z| < 1$ и удовлетворяет там неравенству

$$|zf'(z) - rN(r)| < rM(r), \quad r = |z|,$$

где $N(r)$ — комплексная и $M(r) > 0$ — заданные функции r , непрерывные при $0 \leq r < 1$, то

$$\int_0^r [F(\rho) - \sqrt{G(\rho)}] d\rho \leq \operatorname{Re}(Cf(z)) \leq \int_0^r [F(\rho) + \sqrt{G(\rho)}] d\rho,$$

где

$$F(\rho) = \operatorname{Re}[CN(\rho)], \quad G(\rho) = |CM(\rho)|^2 - \operatorname{Im}^2[CN(\rho)],$$

C — произвольная комплексная постоянная.

Теорема 2. Граница выпуклости r_p^0 класса $S(p)$ (p — целое число не меньшее единицы) регулярных однолистных в круге $|z| < 1$ функций $f(z)$, определяемых разложением вида

$$f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk+1} z^{pk+1}, \quad (124)$$

выражается формулой

$$r_p^0 = \sqrt[p]{p+1 - \sqrt{p^2 + 2p}}.$$

Первая из этих теорем послужила Г. М. Голузину основанием для создания метода получения целого ряда оценок (часто неточных) в классах S и Σ , а вторая содержит решение задачи, долгое время остававшейся нерешенной.

В 1936 г. вышла из печати работа Г. М. Голузина, в которой он применил известный еще с 1923 г. параметрический метод Левнера для решения внутренних экстремальных задач в классе S . Наряду с известными ранее результатами, полученными путем применения других приемов и методов, Голузин получил новые оценки, из которых особого внимания заслуживает следующая теорема вращения для класса S . Если $f(z) \in S$, то

$$|\arg f'(z)| \leq \begin{cases} 4 \arcsin |z|, & 0 < |z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \pi + \ln \frac{|z|^2}{1-|z|^2}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \leq |z| < 1. \end{cases} \quad (125)$$

Обе оценки точные. Первая реализуется функцией

$$w = f_0(z) = \int_0^z \frac{1 - \zeta e^{-i\alpha}}{(1 + \zeta e^{i\alpha})^2} d\zeta,$$

где α — произвольная действительная постоянная. Эта функция отображает круг $|z| < 1$ на z -плоскость с разрезом по лучу, на продолжении которого не лежит точка $w = 0$. Вторая оценка реализуется функ-

цией, близкой к известной спиральной функции Бибербаха:

$$f_1(z) = \frac{1}{2(1+i)} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{i+1} - 1 \right].$$

Точность второй оценки (125) доказал (1936 г.) И. Е. Базилевич.

Теорема вращения для класса S является одним из наиболее важных результатов, полученных с помощью параметрического метода Левнера. В основу этого метода положены следующие теоремы, впервые строго доказанные Г. М. Голузиным.

Теорема 3. Пусть B — односвязная область без внешних точек, содержащая точку $w = 0$ и не содержащая точку $w = \infty$, а граница области состоит из конечного числа дуг Жордана. Тогда существует комплексная функция $k(t)$ действительного аргумента t , $0 \leq t < \infty$, непрерывная, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, $|k(t)| = 1$, и такая, что функция $w = f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, однолистно отображающая круг $|z| < 1$ на область B , может быть представлена в форме

$$f(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} \beta e^t f(z, t),$$

где $f(z, t)$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f \frac{1 + f k(t)}{1 - f k(t)}, \quad 0 < t < \infty,$$

удовлетворяющее начальному условию $f(z, 0) = z$.

Теорема 4. Пусть дана комплексная функция $k(t)$, $|k(t)| = 1$, непрерывная или имеющая конечное число точек разрыва первого рода в промежутке $0 \leq t < \infty$. Тогда интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -w \frac{1 + w k(t)}{1 - w k(t)},$$

удовлетворяющий начальному условию $w|_{t=0} = z$, представляет собой функцию $w = f(z, t)$, $f(0, t) = 0$, $f'_z(0, t) = e^{-t}$, которая при каждом t , $0 \leq t < \infty$, как функция z будет регулярной и однолистной в круго $|z| < 1$. Таким же будет и предел

$$f(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t f(z, t), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1,$$

который, наверное, существует.

П. П. Куфареву принадлежит обстоятельное исследование об однопараметрических семействах функций класса S .



Г. М. Голузин.



И. Е. Базилевич.

И. Е. Базилевич обобщил параметрический метод Левнера на классы $S(p)$ и $\Sigma(p)$ ($p \geq 1$ — целое) p -кратно симметричных функций классов S и Σ и получил интересные оценки в этих классах. В частности, он доказал, что если $f(z) \in S(p)$ и $f(z)$ определяется разложением (124), то

$$|a_{2p+1}| \leq \frac{1}{p} + \frac{2}{p} \exp\left(2 \frac{1-p}{1+p}\right), \quad (126)$$

причем оценка точная и экстремальная функция при $p > 1$ отлична от функции

$$f_p(z) = z(1 - z^p)^{-\frac{2}{p}},$$

которая реализует известную оценку

$$|a_{p+1}| \leq \frac{2}{p}$$

для функций класса $S(p)$ и является аналогом весьма часто встречающейся в теории экстремальных свойств функций класса S функции Кебе

$$f_1(z) = z(1 - z)^{-2}.$$

Используя теорему 4, И. Е. Базилевич доказал, что главная ветвь функции

$$w(z) = \left[\lambda \int_0^z (p(\zeta) - i\alpha) \zeta^{-i\alpha\lambda} f^\lambda(\zeta) d\zeta \right]^{\frac{1}{\lambda(1-i\alpha)}}, \quad (126')$$

где $\lambda > 0$, α — произвольное вещественное число, $p(z)$, $p(0) = 1$, регулярна в $|\zeta| < 1$ и $\operatorname{Re} p(z) > 0$ в круге $|z| < 1$, а $f(z) \in S^*$ (подкласс регулярных однолистных звездных функций класса S) есть функция класса S . Формула (126') определяет достаточно широкий подкласс класса S , содержащий кроме S^* еще подкласс $\tilde{S}_\vartheta$ ϑ -спиральных $\left(-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}\right)$ в круге $|z| < 1$ функций, для которых выполняется в этом круге неравенство

$$\operatorname{Re} \left(e^{i\vartheta} \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0$$

при условиях нормировки $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Недавно Базилевич получил еще более общую формулу. Н. А. Лебедев, П. П. Куфарев и Н. В. Семухина обобщили (1955—1956 гг.) параметрический метод Левнера на кольцо, а М. Р. Куваев (совместно с П. П. Куфаревым) — на многосвязные области порядка связности $n > 2$. Однако во всех этих случаях параметрический метод пока малоэффективен.

В 1937 г. была издана работа Г. М. Голузина, посвященная установлению различных оценок для однолистных функций в конечносвязных однолистных областях. В этой работе Голузин упрощает и развивает метод Грунского, предложенный для более простого доказательства теоремы Гретша о точной области значений $\ln f'(z)$ при фиксированном z из многосвязной области B , содержащей точки 0 и ∞ , когда функция $f(z)$ пробегает класс S_B однолистных в B функций, нормированных условиями $f(\infty) = \infty$, $f'(\infty) = 1$ (эта область является кругом). Сам Гретш доказывал эту теорему методом, основанным на исследовании спиралеобразных отображений и его методе полос. Метод полос успешно применен Г. М. Голузиным в исследованиях о проблемах покрытий.

Приведем некоторые теоремы Голузина, относящиеся к однолистным функциям в многосвязной области.

Пусть $a = \operatorname{tg} \theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, а z и z' — какие-либо две различные точки области B . Обозначим

$$w = j_a(\zeta, z, z') \quad (127)$$

функцию, однолистую в B , имеющую простой корень в точке z и простой полюс в точке z' с вычетом, равным единице, и отображающую B на w -плоскость, разрезанную по дугам логарифмических спиралей наклона a с общей асимптотической точкой $w = 0$. Это значит, что на каждой компоненте Γ_v границы области B

$$\operatorname{Im}(e^{-i\theta} w) = C_v,$$

$C_v = \text{const}$, $v = 1, 2, \dots, m$. Существование и единственность функции (127) можно доказать.

Функция $j_0(\zeta, z, z')$ отображает область B на w -плоскость, разрезанную по отрезкам лучей, выходящих из точки $w = 0$, а $j_\infty(\zeta, z, z')$ отображает B на плоскость, разрезанную по дугам семейства окружностей

$$|w| = R, \quad 0 < R < \infty.$$

Положим

$$\left. \begin{aligned} p(\zeta, z, z') &= \sqrt{j_0(\zeta, z, z') j_\infty(\zeta, z, z')}, \\ q(\zeta, z, z') &= \sqrt{\frac{j_0(\zeta, z, z')}{j_\infty(\zeta, z, z')}} \end{aligned} \right\} \quad (128)$$

и обозначим $S_B(z, z')$ — класс однолистных в B функций $f(\zeta)$, нормированных условиями

$$f(z) = 0, \quad \lim_{\zeta \rightarrow z'} (\zeta - z') f(\zeta) = 1.$$

Тогда справедливы следующие точные оценки для $f(z) \in S_B(z, z')$:

$$\operatorname{Re}(e^{-2i\theta} \ln f'(z)) \geq \operatorname{Re}(e^{-2i\theta} \ln j'_a(z, z, z')), \quad (129)$$

$$\operatorname{Re}\left(e^{-2i\theta} \ln \frac{f'(z)}{p'(z, z, z')}\right) \geq \ln q(z, z, z'). \quad (129')$$

Здесь всегда $q(z, z, z') \in (0, 1)$. Эти оценки достигаются только с помощью функций

$$f_0(\zeta) = j_a(\zeta, z, z') + \text{const.}$$

Из оценки (129)' получаем теорему искажения для класса $S_B(z, z')$ в виде

$$|j'_0(z, z, z')| \leq |f'(z)| \leq |j'_\infty(z, z, z')|,$$

поскольку, как можно доказать,

$$\ln j_a(\zeta, z, z') = \ln p(\zeta, z, z') + e^{2i\theta} \ln q(z, z, z').$$

Из оценки (129)' вытекает уточненная теорема Гретша: мажорантная область для $w = \ln f'(z)$, где z — фиксированная конечная точка области B , а $f(\zeta)$ пробегает класс $S_B(z, z')$, есть круг

$$|w - \ln p'(z, z, z')| \leq -\ln q(z, z, z'). \quad (130)$$

Во всех этих оценках подразумевается та ветвь функции $\ln w(\zeta)$, для которой справедливо условие $\ln 1 = 0$. Знак равенства в формуле (130) реализует только функция $j_a(\zeta, z, z') + \text{const}$ с надлежаще выбранным a .

Важную роль в получении этим методом различных оценок в многосвязной области B , содержащей точку 0, не содержащей точки ∞ и не симметричной относительно $\zeta = 0$, играет область B^* , которая получается из двух экземпляров области B , расположенных на двух листах двулистной плоскости Римана, соединяющихся вдоль луча $[0, \infty]$, с помощью преобразования $\zeta^* = \sqrt{\zeta}$.

Если образ $f(B)$, взятый в двух экземплярах на аналогичной римановой поверхности, подвергнуть такому же преобразованию $w^* = \sqrt{w}$, то получим однолиственную функцию $F(\zeta^*) = \sqrt{f(\zeta^*)}$ в области B^* . Значение всех указанных выше преобразований состоит в том, что область B^* симметрична относительно точки $\zeta^* = 0$ и, кроме того,

$$F(-\zeta^*) = -F(\zeta^*).$$

Если p^*, q^*, j_a^* — функции, аналогичные p, q, j_a , для области B^* , то справедливы оценки для $f(\zeta) \in S_B(z, z')$

$$\operatorname{Re} \left[e^{-2\theta i} \ln \frac{zf'(z)}{f(z)} \right] \geq \frac{1}{2} \{ \operatorname{Re} e^{-2\theta i} \ln [-4zj_a^*(z^*, z^*, -z^*)] \},$$

$$\left| \ln \frac{zf'(z)}{f(z)} - \frac{1}{2} \ln [-4zp^*(z^*, z^*, -z^*)] \right| \leq -\frac{1}{2} \ln q^*(z^*, z^*, -z^*),$$

где $z^* = \sqrt{z}$. Последние неравенства определяют мажорантную область для

$$w = \ln \frac{zf'(z)}{f(z)},$$

если $z \in B$ фиксировано, а $f(\zeta)$ пробегает класс $S_B(z, z')$.

Аналогичные оценки получены Г. М. Голузиным и для $\ln \frac{f(z)}{z}$ в классе $S_B(z, z')$.

Применив вместо спиралеобразных отображений отображения на плоскость, разрезанную по отрезкам семейства параллельных прямых, Г. М. Голузин с помощью аналогичного приема получил мажорантную область для $\frac{f''(z)}{f'(z)}$ и $\frac{f(z)}{z}$, где $f(z) \in S_B(z, z')$. Это привело его к следующей замечательной теореме (B совпадает с $|\zeta| > 1$).

Граница выпуклости R^0 класса Σ равна $\frac{1}{r^0}$, где $r^0 \in (0, 1)$ — корень уравнения $\frac{E(\lambda)}{K(\lambda)} - \frac{3}{4} \frac{1+r^2}{(1+r)^2} = 0$, $\lambda = \frac{2\sqrt{r}}{1+r}$, $E(\lambda)$ и $K(\lambda)$ — полные эллиптические интегралы соответственно второго и первого рода с модулем λ . Вычисления дают $r^0 = 0,559 \dots$, $R^0 = 1,78 \dots$ (величину R^0 долгое время не удавалось найти).

Исследования однолистных функций класса $S_B(z, z')$ в многосвязных однолистных областях, проводившиеся Г. М. Голузиным, продолжили Ю. Е. Аленицын, И. М. Милин, И. П. Митюк, П. М. Тамразов. Существенно важным моментом в работе Голузина, выполненной в 1937 г., было установление мажорантных областей для различных функционалов, определенных в классе $S_B(z, z')$. Это было началом нового направления в теории однолистных функций, которое характеризуется стремлением к установлению мажорантных областей для изучаемых функционалов, определенных в заданной односвязной или многосвязной области B на том или ином комплексном классе однолистных функций в этой области. Большой вклад в разработку этого направления исследований внесли ученики Г. М. Голузина Ю. Е. Аленицын и Н. А. Лебедев. Докторская диссертация Лебедева целиком посвящена этой теме. Важные результаты для различных специальных классов однолистных функций в круге $|\zeta| < 1$ и круговой области $|\zeta| > 1$ получены И. А. Александровым и его учениками.

Все указанные работы о мажорантных областях тесно связаны с вариационными методами теории однолистных функций. С помощью параметрического метода Левнера Г. М. Голузину удалось получить замечательные усиления теорем искажения для классов S и Σ . Приведем некоторые из его результатов.

Пусть действительные числа $\alpha_{k,j}$ ($\alpha_{k,j} = \alpha_{j,k}$; $j, k = 1, \dots, n$) таковы, что квадратичная форма $\sum_{k,j=1}^n \alpha_{k,j} x_k x_j$ действительных переменных x_j , $j = 1, 2, \dots, n$, положительна. Обозначим ζ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) — произвольные точки из области $|\zeta| > 1$. Тогда для любой функции $F(\zeta) \in \Sigma$ справедливы оценки

$$\prod_{j,k=1}^n \left| 1 - \frac{1}{\zeta_j \bar{\zeta}_k} \right|^{\alpha_{j,k}} \leq \prod_{j,k=1}^n \left| \frac{F(\zeta_j) - F(\zeta_k)}{\zeta_j - \zeta_k} \right| \leq \prod_{j,k=1}^n \left| 1 - \frac{1}{\zeta_j \bar{\zeta}_k} \right|^{-\alpha_{j,k}}. \quad (131)$$

При $\zeta_j = \zeta_k$ следует заменить

$$\frac{F(\zeta_j) - F(\zeta_k)}{\zeta_j - \zeta_k}$$



И. М. Милин.

величиной $F'(\zeta_j)$. Если γ_j — любые комплексные числа, $j = 1, 2, \dots, n$, а ζ_j и $F(\zeta)$ — те же, что и выше, то

$$\left| \sum_{j,k=1}^n \gamma_j \gamma_k \ln \frac{F(\zeta_j) - F(\zeta_k)}{\zeta_j - \zeta_k} \right| \leq \leq - \sum_{j,k=1}^n \gamma_j \bar{\gamma}_k \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta_j \bar{\zeta}_k} \right). \quad (132)$$

Пусть ε_j , $|\varepsilon_j| = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$, все различные, $n \geq 2$. Тогда при $f(z) \in S$ на $|z| = r > 1$

$$\min |f(\varepsilon_j z)| \leq \frac{Ar}{(1-r)^{2/n}}.$$

Здесь A зависит только от n и ε_j .

И. М. Милин разработал (1964 г.) новый метод получения оценок вида (130), (131) и других в любой m -связной одно-

листной области B , содержащей точку ∞ и ограниченной замкнутыми аналитическими кривыми Жордана. Этот метод Милин назвал методом площадей. В основу его положено обобщение ряда Лорана, и в частности ряда Тейлора, на многосвязную область указанного выше типа. Приведем одну из теорем И. М. Милина.

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} P(\zeta, t) &= -\ln q(\zeta, t, \infty), \\ R(\zeta, t) &= \frac{1}{2} \ln \frac{(\zeta - t)^2}{p^2(\zeta, t, \infty)}, \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

где ζ и t — две разные точки области B , отличные от ∞ , а функции $p(\zeta, t, \infty)$ и $q(\zeta, t, \infty)$ — частные случаи функций (128). Пусть ζ_j и t_j ($j = 1, 2, \dots, n$) — любые точки области B , а x_j и y_j — любые комплексные числа. Тогда для $F(\zeta) \in \Sigma(B)$

$$\left| \sum_{j,k=1}^n x_j y_k \ln \frac{\zeta_j - t_k}{F(\zeta_j) - F(t_k)} - \sum_{j,k=1}^n x_j y_k R(\zeta_j, t_k) \right| \leq \leq \sqrt{\sum_{j,k=1}^n P(\zeta_j, \zeta_k) x_j \bar{x}_k \cdot \sum_{j,k=1}^n P(t_j, t_k) y_j \bar{y}_k}. \quad (134)$$

При $\zeta_j = t_k$ вместо $\frac{\zeta_j - t_k}{F(\zeta_j) - F(t_k)}$ следует писать $\frac{1}{F'(\zeta_j)}$. При $x_j = y_j$, $\zeta_j = t_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, (134) является аналогом неравенства (9), в которое и переходит, если B превращается в область $|\zeta| > 1$, ибо в этом случае

$$p(\zeta, t, \infty) = \zeta - t, \quad q(\zeta, t, \infty) = 1 - \frac{1}{\zeta \bar{t}}.$$

Неравенство, получающееся в только что указанном предположении относительно области B , с помощью элементарного метода было доказано Н. А. Лебедевым.

Значительную роль в исследованиях Г. М. Голузина и других советских математиков сыграли проблемы покрытия теории однолистных функций. Еще в 1930 г. Н. Е. Кочин решил для случаев $n = 3$ и $n = 4$ известную задачу Сеге (1922 г.) относительно характера покрытия каждой совокупности n лучей, выходящих под равными углами из точки $w = 0$, при отображении круга $|z| < 1$ функциями $w = f(z) \in S$. В общем виде задача Сеге была решена (1931 г.) М. А. Лаврентьевым и В. М. Шепелевым и независимо от них (1933 г.) Ренгелем, решившим также более трудную задачу, в которой кроме n лучей, упоминаемых в задаче Сеге, фигурируют также биссекториальные лучи. Если l — длина любого из покрытых отрезков (от точки $w = 0$ до ближайшей точки границы) на основной системе лучей, а h — на системе лучей биссекториальных, то по теореме Ренгеля



А. Ф. Бермант.

$$\frac{1}{l^n} + \frac{1}{h^n} \leq 4. \quad (135)$$

Знак равенства здесь возможен только тогда, когда

$$w = e^{i\alpha} f_0(e^{-i\alpha} z),$$

где α — произвольная действительная постоянная, а

$$f_0(z) = z \left[1 + \left(2 - \frac{1}{a^n} \right) z^n + z^{2n} \right]^{-\frac{1}{n}},$$

причем $a > \frac{1}{\sqrt[n]{4}}$. Из (135) получаем

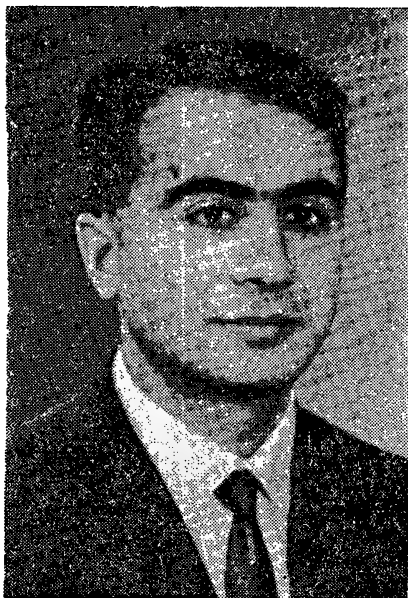
$$l \geq \frac{1}{\sqrt[n]{4}}.$$

Как показывает пример функции

$$f_1(z) = z(1 - z^n)^{-\frac{2}{n}} \in S(n),$$

оценка точная. Это и есть решение задачи Сеге.

Г. М. Голузин доказал (1939 г.) теорему Ренгеля методом полос Гретша, упростив доказательство самого Ренгеля. Этим же методом он доказал и некоторые другие теоремы, в частности такую: если $w = f(z) \in S$,



П. М. Тамразов.

то в образе круга $|z| < 1$ существует совокупность n прямолинейных отрезков, исходящих из точки $w = 0$ под равными углами, сумма длин которых сколь угодно близка к n .

Теорему покрытия для класса S_M ($M > 1$) ограниченных в круге $|z| < 1$ функций $f(z) \in S$, $|f(z)| < M$, исследовал (1949 г.) Г. В. Бадалян. Интересные результаты в этой области получены А. Ф. Бермантом. Приведем одну из его теорем.

Пусть область B w -плоскости содержит точку $w = 0$ и симметрична относительно луча $\arg w = \theta_0 = \text{const}$. Предположим, что $f(z) \in S$ и отображает круг $|z| < 1$ внутрь B . Тогда образ этого круга покрывает отрезок, исходящий из точки $w = 0$ и расположенный на луче $\arg w = \theta_0$, длины, не меньшей некоторой константы

$$K(B) \geq \frac{1}{4}, \text{ зависящей только от мно-}$$

жества $C(B)$, дополнительного к области B . Оценка точная. Экстремальная область получается из B проведением разреза вдоль части луча $\arg w = \theta_0$ от точки $K(B)e^{i\theta_0}$ до граничной точки, расположенной на этом луче.

Из этой теоремы как следствия получаются известные теоремы Кебе и Пика, а также другие теоремы, относящиеся к различным подклассам класса S . А. Ф. Бермант установил теорему, аналогичную (а иногда и более точную) теореме Ренгеля. Исследования Берманта связаны с обобщением принципа Линделефа.

Весьма общие теоремы покрытия получены (1966 г.) П. М. Тамразовым. Кроме теорем покрытия им развита теория обобщенных произведений Бляшке в многосвязных областях, решены экстремальные задачи в многосвязных областях с тремя отмеченными невырожденными граничными компонентами и получены результаты, относящиеся к конформно-метрическим свойствам многосвязных областей. П. М. Тамразов пользуется методом экстремальных метрик.

Некоторые теоремы покрытия установлены (1966 г.) также в докторской диссертации И. П. Митюка, посвященной изучению однолистных и многолистных конформных отображений однолистных областей произвольной связности (даже бесконечносвязных), в составе границ которых имеется, по крайней мере, одна или две невырожденные компоненты. В этой же работе содержится много новых результатов и, главное, разработаны новые методы исследования, обобщающие и уточняющие симметризационные методы Штейнера, Полия — Сеге, Сеге — Маркуса и др. И. П. Митюку удалось с помощью этих методов перенести и обобщить на многосвязные области ряд теорем, доказанных при более узких предположениях. В частности, ему удалось обобщить теорию

слабо p -листных функций в круге (Хейман) на круговое кольцо.

Значительный вклад в теорию однолистных функций в многосвязных областях внес Ю. Е. Аленицын, применивший в своих исследованиях функцию Альфорса $F_B(z, z_0)$, $F_B(z_0, z_0) = 0$, $F'_B(z_0, z_0) > 0$, $z_0 \in B$, отображающую заданную n -связную область B с невырожденной границей на n -кратно покрытый круг $|z| < 1$. Эта функция среди всех однозначных аналитических функций в B , нормированных в точке $z_0 \in B$ и отображающих B внутрь круга $|z| < 1$, обладает наибольшим растяжением в точке z_0 , (т. е. наибольшим значением производной в этой точке). Приведем некоторые теоремы Аленицына.

1. Если функция $f(z)$ регулярна (т. е. однозначна и аналитическая) в области B и $|f(z)| < 1$ в B , то

$$|f'(z)| \leq (1 - |f(z)|^2) F'_B(z, z), \quad z \in B.$$

Знак равенства в любой точке $z = z_0 \in B$ реализуется здесь только функциями вида

$$f_0(z, \alpha, \varepsilon) = \varepsilon \frac{F_B(z, z_0) + \alpha}{1 + \bar{\alpha} F_B(z, z_0)},$$

где α и ε — постоянные, удовлетворяющие условиям $|\alpha| < 1$, $|\varepsilon| = 1$.

2. Если функция $f(z)$ регулярна в области B и $|\operatorname{Re} f(z)| < 1$ в B , то

$$|f'(z)| \leq \frac{4}{\pi} F'_B(z, z), \quad z \in B,$$

причем знак равенства в любой точке $z = z_0 \in B$ реализуют здесь только функции вида

$$f_0(z) = \frac{2}{\pi i} \ln \left(\beta \frac{1 + \varepsilon F_B(z, z_0)}{1 - \bar{\varepsilon} F_B(z, z_0)} \right),$$

где ε и β — постоянные, $|\varepsilon| = 1$, $\beta > 0$.

Ю. Е. Аленицыну принадлежит также обобщение теоремы Кебе «об $\frac{1}{4}$ » на многосвязные области. Это обобщение, как и принцип подчинения для многосвязных областей, установленный Аленицыным, было развито в упомянутой диссертации И. П. Митюка.

Однолистным отображениям двусвязных областей посвящены исследования Г. Я. Хажалия. Эти исследования обобщены и развиты И. П. Митюком и П. М. Тамразовым. В. А. Зморович обобщил (1952 г.) теорему Рисса — Герглотца об интегральном представлении регулярной



Ю. Е. Аленицын.



В. И. Левин.

в круге $|z| < 1$ функции $p(z)$, $p(0) = 1$, с положительной действительной частью в этом круге на круговое кольцо и получил интегральные представления («структурные формулы») для специальных классов однолистных и неоднолистных однозначных голоморфных и мероморфных в круговом кольце функций, с помощью которых удалось решить многие экстремальные задачи для этих классов (Л. Е. Дундученко, С. А. Касьянюк и др.). Рассматривая n -связную область B_n , граница которой состоит из n невырожденных окружностей Γ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, В. А. Зморевич обобщил (1958 г.) известные для круга $|z| < 1$ формулы Шварца, Пуассона и Пуассона — Иенсена на область B_n в классе однозначных аналитических функций в B_n , связав их с функциями $w = F_j(z, z_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, осуществляющими однолистное отображе-

ние области B_n на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$ с разрезами по конечным прямолинейным отрезкам, параллельным оси $\operatorname{Re} w = 0$. Точка z_j является простым полюсом функции $F_j(z, z_j)$ и лежит на окружности Γ_j . Л. Е. Дундученко, применив метод функциональных уравнений, предложенный Г. М. Голузиным, построил (1966 г.) явное выражение для функций $F_j(z, z_j)$ и получил интегральные представления для специальных классов аналитических функций в области B_n .

Аппарат интегральных представлений, широко использовавшийся киевскими математиками в теории специальных классов однолистных функций (1948—1966 г.), как и многие другие результаты советских математиков, в последние годы «переоткрывался» и вновь разрабатывался американскими и японскими математиками.

В связи с изучением специальных классов однозначных аналитических функций в односвязных и многосвязных областях и исследованием экстремальных свойств этих функций нельзя не упомянуть о большом цикле работ по этим вопросам московских математиков Г. Ц. Тумаркина и С. Я. Хавинсона, которым принадлежат важные результаты для весьма общих классов экстремальных задач в однолистных конечносвязных областях. Тумаркин и Хавинсон широко используют методы функционального анализа. Эти методы привели их к установлению принципа двойственности для экстремальных задач. Существенную роль в некоторых их работах играет также функция Альфорса.

Рассмотрим результаты по коэффициентам тейлоровских разложений функций класса S и лорановских разложений функций класса Σ . Пусть

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S.$$

Известная оценка Литтлвуда $|a_n| < en$, $n = 2, 3, \dots$, получила следующие уточнения:

- 1) $|a_n| < \frac{3}{4} en$ (Г. М. Голузин, 1947 г.),
- 2) $|a_n| < \frac{1}{2} en + 1,51$ (И. Е. Базилевич, 1951 г.),
- 3) $|a_n| < 1, 243n$ (И. М. Милин, 1964 г.).

Для значений $n = 5, 6, \dots, 12$ известна более точная оценка $|a_n|$, чем оценки И. М. Милина. Доказана оценка $|a_6| \leq 6$. Хейман доказал (1956 г.), что для каждой заданной функции $f(z) \in S$ существует такое $N(f)$, что $|a_n| \leq n$ при $n > N(f)$. Однако до сих пор неизвестно даже, является ли число $N(f)$ ограниченным в классе S . Для функций класса $S(p) \subset S$, определяемых в круге $|z| < 1$ разложением вида

$$f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk+1}^{(p)} z^{pk+1}, \quad (136)$$

где $p \geq 1$ — целое, В. И. Левин установил (1934 г.) следующие оценки:

- 1) $|a_{3k+1}^{(3)}| \leq A_3 k^{-\frac{1}{3}},$
- 2) $|a_{4k+1}^{(4)}| \leq A_4 k^{-\frac{1}{2}} \ln k,$
- 3) $|a_{pk+1}^{(p)}| \leq A_p k^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\ln k}, \quad p > 4,$

где $k = 1, 2, 3, \dots$, A_3, A_4, A_p — некоторые положительные постоянные.

Точная оценка 3) для $|a_{p^2+1}^{(p)}|$ получена (1937 г.) И. Е. Базилевичем. Ему принадлежит также следующее обобщение известной теоремы Литтлвуда — Палая: если для всех k справедливы неравенства $|a_{2k}| \leq Ak^\alpha$, где $\alpha \leq -\frac{1}{2}$, то для всех k справедливы также неравенства $|a_{2k-1}| \leq A_1$, где константа $A_1 > 0$ зависит только от α и A . Кроме того, $|f(z)| \leq \frac{K}{1-|z|}$, $|z| < 1$, где K тоже зависит только от α и A . При $A = 0$ отсюда получается теорема Литтлвуда — Палая. Ю. Е. Аленицыну удалось обобщить, в некоторой части, теорему Базилевича на классы $S(p)$, $p = 2, 3, \dots$ Идея обобщения теоремы Литтлвуда — Палая принадлежит М. А. Лаврентьеву. Г. М. Голузин доказал следующую теорему из этого круга идей. Пусть $a > 0$ и $b > 0$ — целые. Если для всех k , удовлетворяющих сравнению $k \equiv b \pmod{a}$, функция (136) удовлетворяет условию $|a_k| \leq Ak^\alpha$, где $A \geq 0$ и $\alpha \geq 0$ — постоянные, то вообще при всех значениях k справедливы неравенства $|a_k| \leq A_1 k^\alpha$, где A_1 зависит только от α и A . При $\alpha < 0$ такое взаимоотношение между порядками роста модулей коэффициентов существует не всегда. Другие результаты Г. М. Голузина о коэффициентах тейлоровских разложений функций класса S изложены в монографии «Некоторые вопросы теории однолистных функций» (1949 г.). Эта монография (вместе с монографией, посвященной оценкам для аналитических функций с ограниченным средним модулем) удостоена Государственной премии.

Кроме новых результатов в ней даны также новые доказательства известных теорем, доказанных, как правило, более сложными приемами. В частности, для функций

$$F(\zeta) = \zeta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{pk-1}^{(p)}}{\zeta^{pk-1}} \in \Sigma(p),$$

где $p \geq 2$ — целое, т. е. функций, однолистных, регулярных в области $1 < |\zeta| < \infty$ и обладающих p -кратной симметрией, весьма просто получена точная оценка

$$|\alpha_{p2-1}^{(p)}| \leq \frac{1}{p} + \frac{2}{p} \exp \left\{ -2 \frac{p+1}{p-1} \right\},$$

установленная И. Е. Базилевичем еще в 1937 г. Для классов $S^*(p)$ и $S^0(p)$ (звездных и выпуклых регулярных однолистных с p -кратной симметрией в круге $|z| < 1$ функций) точные оценки модулей коэффициентов установил в 1934 г. В. И. Левин. В конце 30-х годов проблемой коэффициентов занимался И. З. Штокало.

В 1946 г. появилась первая работа Г. М. Голузина, посвященная методу внутренней вариации для функций класса S . В ней доказана весьма общая теорема («вариационная теорема Голузина»), позволяющая получить большое количество различных вариационных формул как для функций класса S , так и для многих подклассов класса S . В частности, из этой теоремы получались результаты Шиффера (1938 г.) и Шеффера и Спенсера (начало 40-х годов), относящиеся к этому направлению исследований. Пусть R — некоторый класс аналитических функций в круге $|z| < 1$. Предположим, что существует такой функционал $P(f, f')$, определенный на классе R и зависящий, кроме z , $|z| < 1$, от комплексных параметров A_k , $|A_k| \leq \delta$, $k = 1, 2, \dots, m$, что для каждой функции $f(z) \in R$ можно указать такую другую функцию $f(z, \varepsilon) \in R$, $\varepsilon \in (0; h)$, $h > 0$, которая связана с $f(z)$ равенством

$$f(z; \varepsilon) = f(z) + \varepsilon P(f; f') + o(\varepsilon^\gamma),$$

где $\gamma = \text{const} > 1$, а $o(\varepsilon^\gamma)$ — величина бесконечно малая относительно ε^γ , $\varepsilon \rightarrow 0$, в любой замкнутой области, содержащейся в круге $|z| < 1$. В таком случае функционал $P(f, f')$ определяет некоторый метод внутренней вариации функций класса R .

Теорема Голузина указывает весьма общий способ образования функционалов $P(f, f')$, если $R = S$. Приведем ее формулировку. Если функция $w = f(z)$, $f(0) = 0$, регулярна и однолистка в круге $|z| < 1$, а функция $w^* = F(z, \lambda)$, как функция z и λ , регулярна при $r \leq |z| < 1$ и $|\lambda| < \lambda_0$ и при каждом λ , $0 < \lambda < \lambda_0$, однолистка в кольце $r \leq |z| < 1$; если, кроме того, при каждом z , $r < |z| < 1$, и малых λ

$$F(z, \lambda) = f(z) + \lambda q(z) + o(\lambda^2),$$

то, прибавив к образу кольца $r < |z| < 1$ при отображении функцией $w^* = F(z, \lambda)$ область, внутреннюю по отношению к образу окружности $|z| = r$, при малом λ получим односвязную область B_λ , содер-

жащую точку $z^* = 0$, и для функции $z^* = f^*(z)$, $f^*(0) = 0$, однолистно отображающей круг $|z| < 1$ на B_λ , в $|z| < 1$ найдем

$$f^*(z) = f(z) + \lambda q(z) - \lambda z f'(z) S(z) + \lambda z f'(z) S\left(\frac{1}{z}\right) + o(\lambda^2), \quad (137)$$

где $S(z)$ — сумма членов с отрицательными степенями z в разложении функции $\frac{q(z)}{zf'(z)}$ в кольце $r < |z| < 1$ в ряд Лорана.

Если $w = f(z)$ отображает круг $|z| < 1$ на область, для которой существуют внешние точки w_k , $k = 1, 2, \dots, m$, то функция

$$F(z, \lambda) = f(z) + \lambda \sum_{k=1}^n \frac{A_k f^2(z)}{f(z) - w_k}, \quad (138)$$

где A_k — любые комплексные постоянные, $\lambda > 0$ достаточно мало, как можно убедиться, принадлежит к классу S . Если же $w_k = f(z_k)$, $|z_k| < 1$, $k = 1, 2, \dots, m$, то функция (138) при достаточно малом $\lambda > 0$ регулярна и однолистна в некотором кольце и к ней применима указанная теорема. Это приводит к имеющей многочисленные применения вариационной формуле

$$\begin{aligned} f^*(z) = f(z) + \lambda \sum_{k=1}^m \frac{A_k f^2(z)}{f(z) - f(z_k)} - \lambda f(z) \sum_{k=1}^m A_k \left[\frac{f(z_k)}{z_k f'(z_k)} \right]^2 - \\ - \lambda z f'(z) \sum_{k=1}^m A_k \left(\frac{f(z_k)}{z_k f'(z_k)} \right)^2 \frac{z_k}{z - z_k} + \\ + \lambda z f'(z) \sum_{k=1}^m \bar{A}_k \left(\frac{f(z_k)}{z_k f'(z_k)} \right)^2 \frac{\bar{z}_k z}{1 - \bar{z}_k z} + o(\lambda^2). \end{aligned} \quad (139)$$

Видоизменив формулу (138), можно получить другие вариационные формулы типа (139). Много таких формул для различных подклассов класса S и других специальных классов аналитических в круге $|z| < 1$ функций установлено И. А. Александровым и его сотрудниками. Подобные формулы получены также зарубежными математиками. Впоследствии теорема Голузина о внутренней вариации была доказана более просто (П. П. Куфарев), а также выведена методом варьирования точек ветвления Шеффера — Спенсера (Пул). С помощью метода внутреннего варьирования Г. М. Голузин получил ряд точных оценок для однолистных функций, а также установил некоторые общие закономерности для экстремальных функций в проблеме коэффициентов в классе S . Этим же методом он нашел новое решение задачи М. А. Лаврентьева об установлении вида регулярной однолистной в круге $|z| < 1$ функции $f(z)$, $f(0) = 0$, которая выпускает в $|z| < 1$ заданные конечные значения $a_1, a_2, \dots, a_m$ и для которой величина $|f'(0)|$ максимальна. Как и следовало ожидать, этот метод оказался более эффективным для специальных классов однолистных функций, где дал возможность получить новые точные оценки, а также установить точные



П. П. Куфарев.

мажорантные области для различных функционалов, встречающихся при изучении экстремальных свойств аналитических функций, что является более трудной и более общей задачей, чем задача получения точных оценок для какой-либо одной действительной количественной характеристики функций заданного класса. При установлении мажорантных областей для комплексных функционалов особенно плодотворным оказалось соединение вариационного метода Шиффера — Голузина с параметрическим методом Левнера (П. П. Куфарев). О большом вкладе в разработку теории мажорантных областей, внесенном Н. А. Лебедевым, к работам которого примыкают также исследования И. А. Александрова и других математиков, упоминалось выше.

Для решения экстремальных задач в классах аналитических функций, определяемых интегральными представлениями (структурными формулами), куда входят интегралы Стильеса, Г. М. Голузин и В. А. Зморевич предложили (1952 г.) методы экстремизации стилъесовых функционалов для случаев, где метод выпуклых оболочек не применим. И. А. Александров и В. Я. Гутлянский обобщили (1965 г.) эти методы, основываясь на исследованиях Н. А. Лебедева.



И. А. Александров.

Методы Г. М. Голузина и В. А. Зморевича позволили решить большое количество экстремальных задач теории специальных классов аналитических функций. С помощью теоремы о снижении числа переменных в экстремальных задачах, которые связаны с регулярными в круге $|z| < 1$ функциями, имеющими положительную действительную часть (доказана в 1964 г. В. А. Зморевичем), удалось довести до конца решение ряда задач о границах выпуклости и звездности, а также о границах кривизны линий уровня и ортогональных траекторий для многих специальных классов функций, однолистных в круге $|z| < 1$ и круговой области $1 < |z|$. Перечислить все эти результаты здесь невозможно. Однако нельзя не упомянуть о первых исследованиях в СССР по установлению границ кривизны линий уровня в ряде специальных классов одно-

листных функций (Я. С. Мирошниченко) и их развитии (Г. В. Корицкий). Г. В. Корицкий успешно применил предложенный И. Е. Базилевичем аппроксимативный метод, основанный на идее «погружения» исследуемого класса аналитических функций в более широкий и более просто определяемый класс аналитических функций, для завершения некоторых предварительных результатов Я. С. Мирошниченко и получения новых оценок. Вновь доказаны и некоторые оценки, полученные ранее В. А. Зморовичем. В классах S и Σ Корицкому удалось найти соответственно точную нижнюю и точную верхнюю границы кривизны линий уровня. Новые классы однолистных в круге $|z| < 1$ функций были введены Б. Н. Рахмановым. Как показал В. А. Зморович, почти все они оказа-



В. А. Зморович

лись подклассами класса почти выпуклых функций, тождественного классу функций, отображающих круг $|z| < 1$ на линейно достижимые области, введенные еще в 1938 г. польским математиком Бернацким. Теорему о тождестве этих двух классов, доказанную ранее также польскими математиками, весьма просто доказал методом структурных формул В. А. Похилевич.

Метод интегральных представлений оказался плодотворным и в теории аналитических функций комплексных переменных, где позволил установить экстремальные свойства функций различных специальных классов (А. А. Темляков, И. И. Баврин).

Теория квазиконформных отображений и примыкающие к ней вопросы

До конца XIX в. теория функций была в вещественной области теорией дифференцируемых, в комплексной области — теорией аналитических функций. В этом сказывалось определяющее влияние концепций классического анализа. В конце XIX в. возникла новая теория функций вещественного переменного, стремящаяся выяснить действительный объем общих определений (функция, производная, интеграл и т. д.) и связей между ними, не уклоняющаяся, как в классическом анализе, от изучения объектов с «плохими» свойствами, а, наоборот, включающая их в содержательное исследование. В результате анализа задач, формулировка (но не решение) которых доступна классическому анализу, старая теория функций пришла к

расширению предмета исследований, к новым методам и новым задачам. Для этого накопилось достаточно много движущих стимулов в математике и других областях естествознания. Все это обеспечило интенсивное развитие новой теории функций действительного переменного в XX в.

Медленнее расширялся предмет изучения теории отображений в ее метрико-геометрической части. Единственной теорией, основу которой составляло изучение метрико-геометрических свойств отображений, до 30-х годов XX в. была теория конформных отображений как геометрический аспект теории аналитических функций комплексного переменного. Конечно, и само развитие этой теории приводило к выходу за ее собственные пределы. Достаточно вспомнить теорию граничных свойств аналитических функций, использующую методы новой теории функций. Однако в целом теория аналитических функций комплексного переменного была значительно более замкнутой в себе, чем многие другие отрасли классического анализа, что, между прочим, и ставило ее, по выражению А. Н. Колмогорова, в особое положение «ядра всего математического анализа». Поэтому в теории отображений выход за пределы конформных отображений произошел позднее, чем выход за пределы многих других областей классического анализа, и развитие по новым направлениям происходило сравнительно медленнее. Прогресс здесь определялся не столько внутренней логикой развития теории конформных отображений, сколько связями с другими областями математики и математического естествознания, которые выдвигали новые задачи и облегчали поиски формулировок основополагающих определений.

Первые шаги за пределы теории конформных отображений были сделаны почти одновременно в работах М. А. Лаврентьева и Гретша. И вряд ли можно считать случайным, что содержание новой геометрической теории отображений и тесно связанной с ней геометрической теории дифференциальных уравнений в частных производных определилось главным образом результатами и идеями М. А. Лаврентьева — в его работах сочетаются научные интересы математика и механика.

Теория аналитических функций представляет собой в высшей степени содержательный источник новых концепций в теории функций. Действительно, уже давно появились многочисленные исследования различных классов функций не аналитических, но сохраняющих некоторые свойства аналитических (квазианалитические классы функций, моногенные функции, внутренние отображения и т. п.). Среди многих свойств конформных отображений выделяются их характеристические свойства, т. е. свойства, которые могут быть приняты за основу определения аналитических функций (моногенность или конформность, выполнение условий теоремы Морера, представимость функций равномерно сходящимся рядом полиномов и т. д.). При исследовании этих свойств обнаружилась возможность ослабления требований, приводящих опять к аналитическим функциям. С другой стороны, именно на этом пути удалось выделить первые новые классы отображений, вообще не конформных, но сохраняющих определенный набор свойств кон-

формных отображений при соответствующей их модификации. Помогло здесь и то, что в 20-х годах нашего века появились работы по конформным отображениям с чисто геометрическими методами исследования.

Исследование известных топологических свойств конформных отображений естественно привело к постановке вопроса о выделении максимально широкого класса плоских отображений, топологически эквивалентных конформным. Это класс внутренних отображений, введенный и исследованный Стоиловым. Непрерывное отображение $w = T(z)$ называется внутренним по Стоилову, если оно преобразует всякое открытое множество в открытое и никакой континуум не переводит в точку. Эквивалентное определение (Стоилов): $T(z)$ — внутреннее отображение области D , если существует гомеоморфизм $z = t(\zeta)$ области D на себя такой, что $T[t(z)]$ аналитическое в D . Исходя из этого определения, Стоилов вскрыл чисто геометрическую природу ряда теорем теории аналитических функций, построил простую и вместе с тем наиболее общую теорию римановых поверхностей. Однако класс внутренних отображений, при всей его важности, очень широк и потому беден общими свойствами. Необходимо несколько сузить его за счет постулирования определенных метрических свойств, не очень далеко уходящих от каких-либо характеристических свойств конформных отображений. На этом пути и возникла теория квазиконформных отображений, успешно развивающаяся в тесной связи с геометрической теорией дифференциальных уравнений и ныне.

Первыми исследованиями в этом направлении были работы (1928 г.) М. А. Лаврентьева и Гретша. Особенно важной, основополагающей в новой теории была работа М. А. Лаврентьева «Об одном классе непрерывных отображений» (1935 г., на фр. яз.). В настоящем разделе мы ограничимся описанием истории становления и развития этой теории, принадлежащей несомненно к лучшим достижениям советской математики, а также некоторых других результатов, непосредственно к ней примыкающих. Поскольку работы М. А. Лаврентьева на всем протяжении развития теории квазиконформных отображений были основополагающими по идеям и наиболее существенными по результатам, вся история развития ее в нашей стране является по существу историей развития новой отрасли математики в трудах М. А. Лаврентьева и его школы.

1

Работа М. А. Лаврентьева 1935 г. Основные направления дальнейшего развития теории

К новой теории, в первоначальном ее виде, М. А. Лаврентьев пришел, исследуя классическую задачу о конформном отображении поверхности на плоскую область. Пусть требуется установить такое взаимно однозначное соответствие между точками поверхности $z = f(x, y)$, $x^2 + y^2 < 1$, и точками круга $u^2 + v^2 < 1$

плоскости u, v , что любой бесконечно малый круг на поверхности перейдет в бесконечно малый круг плоскости u, v . Каждый такой круг на поверхности проектируется в эллипс на плоскости x, y , причем характеристики эллипса — направление θ большей его полуоси и отношение его полуосей $p \geq 1$ определяются через $\text{grad } f$:

$$\theta(z) = \arg \text{grad } f(x, y) + \frac{\pi}{2},$$

$$p(z) = \frac{1}{\cos \varphi}, \quad \text{tg } \varphi = |\text{grad } f(x, y)|.$$

Задача, следовательно, эквивалентна такой задаче: в круге $x^2 + y^2 < 1$ заданы функции $p(z)$ и $\theta(z)$, $z = x + iy$; требуется отобразить круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ ($w = u + iv$) так, чтобы в каждой точке z бесконечно малый эллипс с характеристиками $p(z)$ и $\theta(z)$ переходил в бесконечно малый круг. Возникающее отображение $w = T(z)$ и называют квазиконформным отображением круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ с характеристиками p, θ .

Рассмотрим теперь, следуя в основном работе М. А. Лаврентьева (1935 г.), точные определения.

В области D плоскости z задано непрерывное распределение характеристик p, θ , если функция $p = p(z) \geq 1$ определена и непрерывна в D , функция $\theta = \theta(z)$, $0 \leq \theta < \pi$, определена там в D , где $p \neq 1$, и непрерывна в любой замкнутой подобласти $\bar{D}_1 \subset D$, не содержащей точек, в которых $p = 1$. Это эквивалентно заданию в D непрерывных функций $\alpha(z), \beta(z), \gamma(z)$, $\alpha, \gamma > 0$, $\alpha\gamma - \beta^2 = 1$, связанных с p и θ соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= p \cos^2 \theta + \frac{1}{p} \sin^2 \theta, & \beta &= \left(p - \frac{1}{p}\right) \cos \theta \sin \theta, \\ \gamma &= p \sin^2 \theta + \frac{1}{p} \cos^2 \theta. \end{aligned} \right\} \quad (140)$$

Пусть в D задано непрерывное распределение характеристик p, θ .

Функция $w = T(z) = u + iv$ осуществляет однолистное квазиконформное отображение D с характеристиками p, θ , если она непрерывна, однолистка в D , сохраняет в D направление обхода и для любой точки $z \in D$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\max_{\zeta \in E_h} |T(\zeta) - T(z)|}{\min_{\zeta \in E_h} |T(\zeta) - T(z)|} = 1, \quad (141)$$

где E_h — эллипс, малая полуось которого равна h , отношение большей полуоси к меньшей равно $p(z)$ и наклон большей полуоси к оси Ox равен $\theta(z)$. Соотношение (141) означает, что бесконечно малый эллипс переводится в бесконечно малый круг.

Далее, функция T осуществляет внутреннее квазиконформное отображение области D с характеристиками p, θ , если T осуществляет внутреннее отображение D и является однолистным квазиконформным отображением с характеристиками p, θ там в D , где T однолистно.

Заметим, что если $p(z) \equiv 1$ в D , т. е. если E_h — окружности, то, как несколько позднее (1937 г.) доказал Д. Е. Меньшов, квазиконформное отображение превращается в конформное. Таким образом, определение квазиконформности основывается на постулировании некоторого свойства метрико-геометрического характера, обобщающего основное (характеристическое) свойство конформных отображений.

Задачу о конформном отображении поверхности на плоскую область можно сформулировать еще и так: найти решение $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ системы

$$\alpha u_x + \beta u_y = v_y, \quad \beta u_x + \gamma u_y = -v_x, \quad (142)$$

отображающее круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$, причем α, β, γ имеют вид (140). Для системы (142) с аналитическими коэффициентами и для локальной задачи решение существует на основании классической теории уравнений. Если p и θ удовлетворяют условиям Гельдера, система (142) решается методами теории интегральных уравнений. Но если коэффициенты в (142) только непрерывны, решение в обычном смысле может не существовать. М. А. Лаврентьев ввел обобщенные решения, допускающие несуществование u_x, u_y, v_x, v_y на некотором множестве.

Дальнейшие определения М. А. Лаврентьева таковы.

Если $p \leq Q$ в D , то квазиконформное отображение называется Q -квазиконформным; если $p \leq 1 + \varepsilon$, то — ε -квазиконформным. Квазиконформное отображение T называется квазиконформным отображением класса C_1 , $T \in C_1$, если оно однолистно, u и v непрерывно дифференцируемы в D с возможным разрывом первого рода на конечном числе гладких дуг и $u_x v_y - u_y v_x \neq 0$ в D . Соответственно определяют Q - и ε -квазиконформные отображения класса C_1 .

Сформулируем несколько результатов из рассматриваемой работы. У М. А. Лаврентьева эти результаты носят вспомогательный характер. Но они важны и в историческом аспекте, поскольку легли в основу многочисленных исследований, продолжающихся и ныне.

Об искажении расстояний. Пусть $w = T(z)$ есть Q -квазиконформное отображение, $T \in C_1$, $T(0) = 0$, круга $|z| \leq 1$ на $|w| \leq 1$. Тогда

$$\exp\left(-\frac{k^2}{|z_1 - z_2|}\right) < |T(z_1) - T(z_2)| < k \ln^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{|z_1 - z_2|}, \quad (143)$$

k зависит только от Q .

Устойчивость конформных отображений. 1. Для любого ε -квазиконформного отображения $T \in C_1$ круга $|z| \leq 1$ на круг $|w| \leq 1$ с нормировкой $T(0) = 0$, $T(1) = 1$ имеем $|T(z) - z| < \lambda(\varepsilon)$, где $\lambda(\varepsilon) \rightarrow 0$ при условии, что $\varepsilon \rightarrow 0$ — универсальная (для всего класса) функция.

2. Если $w = T(z)$ есть ε квазиконформное отображение класса C_1 круга $|z| \leq 1$ на замкнутую жорданову область D , $w = \Phi(z)$ — конформное отображение $|z| < 1$ на D , $\Phi(0) = T(0) = w_0$, $\Phi(1) = T(1) = w_1$, то существует функция $\lambda(\varepsilon, r, d)$, $\varepsilon > 0$, $0 \leq r < 1$,



Научный семинар акад. М. А. Лаврентьева. В первом ряду (справа налево) М. А. Лаврентьев и Л. В. Овсянников. 1969 г.

$d > 0$, которая, монотонно убывая, стремится к нулю вместе с ε и такая, что $|T(z) - \Phi(z)| < \lambda(\varepsilon, r, d)$, коль скоро $|z| \leq 1$ и расстояние от w_0 до границы D равно d .

3. Пусть $w = T(z)$ является ε -квазиконформным отображением, $T \in C_1$, круга $|z| \leq 1$ на круг $|w| \leq 1$ и $T(0) = 0$. Тогда при произвольном выборе точки $z^{(0)}$, $|z^{(0)}| < 1$, точек $z^{(1)}, z^{(2)}$ в кольце $(1 - \varepsilon')\rho \leq |z - z^{(0)}| \leq \rho$, где $0 < \rho \leq 1 - |z^{(0)}|$ и $0 \leq \varepsilon' < 1$, справедливы неравенства

$$\left| \frac{T(z^{(1)}) - T(z^{(0)})}{T(z^{(2)}) - T(z^{(0)})} \right| < 1 + \eta(\varepsilon, \varepsilon'),$$

$$\left| \arg \frac{T(z^{(1)}) - T(z^{(0)})}{T(z^{(2)}) - T(z^{(0)})} - \arg \frac{z^{(1)} - z^{(0)}}{z^{(2)} - z^{(0)}} \right| < \eta(\varepsilon, \varepsilon'),$$

где $\lim_{\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0} \eta(\varepsilon, \varepsilon') = 0$.

Теорема о склеивании. Какова бы ни была действительная аналитическая функция $x' = \varphi(x)$ действительного переменного, $\varphi(\pm 1) =$

$= \pm 1$, $\varphi'(x) > 0$ для $|x| \leq 1$, можно построить аналитические функции $f_j(z, h)$ ($j = 1, 2$), $z = x + iy$, $h = \text{const}$, такие, что 1) $f_1(z, h)$ регулярна и однолистка для $|x| < 1$, $0 \leq y < h$, где $h > 0$ — произвольное фиксированное число, 2) $f_1(x, y) = f_2[\varphi(x), h]$, $|x| \leq 1$, 3) если $|x_1| < 1$, $-h < y_1 < 0$, и $|x_2| < 1$, $0 < y_2 < h$, то $f_1(x_1 + iy_1, h) \neq f_2(x_2 + iy_2, h)$.

С помощью указанных теорем М. А. Лаврентьев доказывает основную в теории теорему существования (приводим один из ее вариантов).

Теорема существования. Пусть в круге $|z| < 1$ задано непрерывное распределение характеристик и $p \leq Q$. Тогда существует квазиконформное отображение T круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ с данными характеристиками. Это отображение продолжаемо до гомеоморфизма замкнутых кругов, равномерно аппроксимируемо Q -квазиконформными отображениями класса C_1 круга $|z| \leq 1$ на круг $|w| \leq 1$ и определено с точностью до линейного преобразования круга $|w| \leq 1$ на себя.

Поскольку обращение Q -квазиконформного отображения будет таким же и суперпозиция с конформным не изменяет характеристик, из приведенной теоремы следует соответствующая теорема существования для произвольных областей, конформно отображаемых на круг. Отсюда же следует, что соответствие границ для Q -квазиконформных отображений носит тот же характер, что и в конформном случае, т. е. осуществляется по простым концам области (Каратеодори) со всеми вытекающими отсюда следствиями.

Мы не приводим здесь других результатов из описываемой работы. Более важным в историческом плане является хотя бы краткое изложение тех вопросов, которые в ней поставлены. На этих вопросах мы и остановимся.

Метрические требования, содержащиеся в требовании квазиконформности, слабее требования дифференцируемости. В точках, где существует дифференциал отображения, система (142) удовлетворяется. Поэтому с самого начала ясно, что теорема существования должна быть истолкована как теорема существования для системы (142), где решение должно пониматься в некотором обобщенном смысле. Отсюда — вопросы о дифференциальных свойствах квазиконформных отображений, их связи с системой (142), гладкости отображений в зависимости от свойств коэффициентов системы и т. д. Система (142) — важный, но частный случай линейной эллиптической системы 1-го порядка. Отсюда — вопрос о таком обобщении понятия квазиконформности, чтобы получился метрико-геометрический эквивалент для общей линейной системы эллиптического типа. Наконец, самый трудный вопрос в этом плане — о построении возможного эквивалента теории для нелинейных систем эллиптического, а если возможно, то и гиперболического, параболического и, наконец, смешанного типов. Поскольку новая теория сразу же представлялась многообещающей и в теоретическом, и в практическом плане, возник вопрос о поисках ее эквивалента для отображений n -мерных евклидовых пространств.

Именно эти главные линии в развитии теории намечал М. А. Лаврентьев в обзорных докладах на съездах и математических конгрессах,



Л. И. Волковский.

и его дальнейшие исследования в этом направлении были посвящены решению указанных вопросов развития теории.

Кроме отмеченного центрального направления в развитии теории квазиконформных отображений много усилий потребовалось для разработки теоретико-функциональных и метрико-геометрических свойств определенного М. А. Лаврентьевым класса отображений. В исследовании свойств Q -квазиконформных отображений и их ближайших обобщений заметную роль сыграл семинар, организованный Л. И. Волковским, учеником М. А. Лаврентьева, во Львовском университете. Много существенных результатов получено его участниками П. П. Белинским и И. Н. Песиним. Первое систематическое изложение теории М. А. Лаврентьева (линейные системы) было дано Л. И. Волковским в его

монографии «Квазиконформные отображения» (1954 г.). По мере накопления результатов возникли еще вопросы: в какой степени обнаруживаемые свойства квазиконформных отображений, параллельные в некотором смысле свойствам конформных и существенно новые, связаны с метрическим требованием квазиконформности, в какой степени они сохраняются при расширении изучаемого класса, достигаемого ослаблением этого требования. В этом направлении важные исследования выполнены Ю. Г. Решетняком — по теории пространственных отображений, Г. Д. Суворовым и его учениками — работы о плоских и пространственных отображениях, в которых изучаются отображения с ограниченными интегралами Дирихле (частные производные понимаются в смысле С. Л. Соболева). Авторы этих работ возвращаются к постановке проблем теории функций классического анализа: по заданным дифференциальным свойствам (сильно ослабленным по сравнению с требованием аналитичности) исследуются метрико-геометрические свойства новых классов отображений. Результаты новой теории квазиконформных отображений являются здесь источником новых задач и методов исследования.

Рассмотрим более подробно результаты, полученные советскими математиками в указанных направлениях. Заметим, что большой цикл работ, проведенный под руководством Л. И. Волковского, относится к изучению квазиконформных отображений на римановых поверхностях. Этой тематике посвящен специальный параграф в настоящей главе (см. § 6).

**Квазиконформные отображения
и геометрическая теория
дифференциальных уравнений
М. А. Лаврентьева**

Прежде чем перейти к описанию главного этапа развития теории квазиконформных отображений, началом которого являются главным образом работы М. А. Лаврентьева 1946—1948 гг., остановимся кратко на результатах его учеников З. Я. Шапиро (1941 г.) и Б. В. Шабата (1945 г.).

З. Я. Шапиро обобщила понятие квазиконформности так: отображение $w = T(z)$ области D на область Δ называется квазиконформным с характеристиками $p(z, w)$, $\theta(z, w)$, $p_1(z, w)$, $\theta_1(z, w)$, если оно гомеоморфно и преобразует гомотетические эллипсы $E_h(z)$ с центром $z \in D$ и характеристиками $p[z, T(z)]$, $\theta[z, T(z)]$ в гомотетические эллипсы с центром в $w = T(z) \in \Delta$ и характеристиками $p_1[z, T(z)]$, $\theta_1[z, T(z)]$ (с точностью до бесконечно малых высших порядков по сравнению с h). Доказывается, что, каковы бы ни были односвязные области D и Δ , границы которых содержат более одной точки, и действительные функции $p(z, w) \geq 1$, $\theta(z, w)$, $p_1(z, w) \geq 1$, $\theta_1(z, w)$, $z \in D$, $w \in \Delta$, соответствующие равномерно непрерывным распределениям эллипсов в D и Δ , существует квазиконформное отображение D на Δ с характеристиками p , θ , p_1 , θ_1 , переводящее три заданных простых конца D в три заданных простых конца Δ .

Б. В. Шабат изучил класс квазиконформных отображений $T = u + iv$ с характеристиками $p(z)$, $\theta(z)$, $p_1(z)$, $\theta_1(z)$. Он доказал, что u и v являются решениями (в некотором обобщенном смысле) эллиптической системы

$$au_x' + bu_y = v_x, \quad du_x + cu_y = v_x, \quad a > 0, \quad (144)$$

коэффициенты которой зависят от x и y . Отображения М. А. Лаврентьева получаются отсюда при $p_1(z) \equiv 1$ и соответствуют случаю $b = d$, $ac - b^2 = 1$ в системе (144). Б. В. Шабат исследовал вопросы о дифференциальных свойствах решения системы в зависимости от свойств непрерывности коэффициентов в (144). Он доказал, что для любой системы (144) с коэффициентами, удовлетворяющими условию Гельдера в данной области D , существует непрерывно дифференцируемое решение u, v системы такое, что $T = u + w$ гомеоморфно отображает D на круг. Если и частные производные коэффициентов в (144) удовлетворяют условию Гельдера, соответствующее решение единственно при соответствующей нормировке. Если же коэффициенты только непрерывны, то вопрос о единственности в постановке задачи З. Я. Шапиро решается отрицательно, а в постановке Б. В. Шабата в работе 1945 г. остается открытым.

Рассмотрим работы М. А. Лаврентьева 1946—1948 гг.³² Результаты, полученные в этих работах, изложим по его более поздней монографии «Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа» (1962 г.).

М. А. Лаврентьев развил новый вариационный метод решения краевых задач для уравнения Лапласа, основанный на нескольких важнейших фактах теории конформных отображений: теореме Римана о существовании конформных отображений (геометрический принцип образования конформных отображений), теореме Линделефа (внутренний вариационный принцип) и теореме Монтеля (граничный вариационный принцип). Анализ этого метода, анализ геометрической природы этих принципов, и навел его, как можно думать, на мысль о выделении возможно более широкого класса систем уравнений в частных производных, решения которых обладают свойствами конформных отображений, по крайней мере теми, что выражаются упомянутыми принципами. Успех в этом направлении должен был обеспечить и успех в распространении вариационного метода на более широкий класс систем уравнений, а нужда в таком распространении определялась, в частности, многими прикладными задачами. В этом направлении произошла далеко идущая геометризация теории систем дифференциальных уравнений в частных производных, а с точки зрения геометрической теории функций первоначальная теория квазиконформных отображений была включена как весьма частный случай в новую общую теорию.

Перейдем к определениям и теоремам М. А. Лаврентьева.

Пусть дана система уравнений

$$F_j(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = 0 \quad (j = 1, 2). \quad (145)$$

Гомеоморфное отображение области D на Δ ,

$$w = T(z) \equiv u(x, y) + iv(x, y), \quad (146)$$

называется квазиконформным отображением, соответствующим системе (145), если u и v в (146) удовлетворяют системе (145).

От (145) М. А. Лаврентьев переходит к другой системе и называет ее системой уравнений в характеристиках. Получается она так. Пусть (146) — непрерывно дифференцируемое гомеоморфное решение (145) с отличным от нуля якобианом, F_j ($j = 1, 2$) в (145) непрерывны вместе со своими частными производными до 3-го порядка включительно. Зафиксируем точку (x_0, y_0) и рассмотрим главную линейную часть отображения (146) в (x_0, y_0)

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y, \quad \Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta y. \quad (147)$$

³² Общая задача теории квазиконформных отображений плоских областей. — Мат. сб., 1947, т. 21 (63), вып. 2. Основная теорема теории квазиконформных отображений плоских областей. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1948, т. 12, № 6. Заметим, что этим работам М. А. Лаврентьева предшествовали его заметки, опубликованные в «Докладах АН СССР» и «Докладах АН УССР» в 1946 г., и обзорная статья в «Юбилейном сборнике, посвященном тридцатилетию Великой Октябрьской социалистической революции» (ч. I, 1947 г.).

Рассмотрим в плоскости w единичный квадрат с вершиной в $w_0 = u_0 + iv_0$ и сторонами $\overline{w_0 w_1}$, $\overline{w_0 w_2}$, $w_2 - w_0 = (w_1 - w_0)e^{i\frac{\pi}{2}}$. Обозначим ν — угол, образованный вектором $\overline{w_0 w_1}$ с осью Ou : $w_1 - w_0 = e^{i\nu}$. Отображение (147) переводит квадрат в некоторый параллелограмм Π_ν . Пусть при этом точкам w_1, w_2 соответствуют точки z_1, z_2 . Положим

$$z_1 - z_0 = V_\nu e^{i\alpha_\nu}, \quad \theta_\nu = \arg \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}, \quad W_\nu V_\nu I = 1, \quad (148)$$

где

$$I = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \Big|_{z=z_0}.$$

Величины $V_\nu, \alpha_\nu, \theta_\nu, W_\nu$ (при любом фиксированном ν) вполне определяют Π_ν (рис. 1). Эти величины М. А. Лаврентьев называет характеристиками отображения (146) в точке $z = z_0$. Через величины этих характеристик элементарно выражаются u_x, u_y, v_x, v_y . Находя их и подставляя в (145), получаем систему в характеристиках

$$G_j(x, y, u, v, V_\nu, W_\nu, \alpha_\nu, \theta_\nu) = 0 \quad (149)$$

$$(j = 1, 2).$$

Далее предполагается, что (149) можно разрешить относительно W_ν и θ_ν :

$$W_\nu = W_\nu(x, y, u, v, V_\nu, \alpha_\nu), \quad \theta_\nu = \theta_\nu(x, y, u, v, V_\nu, \alpha_\nu). \quad (150)$$

В некоторых случаях характеристики достаточно рассматривать лишь при $\nu = 0$. Тогда индексы в обозначениях характеристик опускаются. Если исходная система совпадает с системой Коши — Римана, то характеристики $P = \ln \frac{1}{V} = \ln |T'(z)|$ и $\alpha = \arg T'(z)$ также удовлетворяют системе $\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{\partial P}{\partial u}$. Этот основополагающий факт теории аналитических функций допускает замечательное распространение на любые квазиконформные отображения. Оказывается (и это основной факт в теории М. А. Лаврентьева), что и в общем случае характеристики $P = \ln \frac{1}{V}$ и α ($\nu = 0$) удовлетворяют линейной системе

$$\frac{\partial P}{\partial v} = a_1 \frac{\partial P}{\partial u} + a_2 \frac{\partial \alpha}{\partial u} + a_3, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = b_1 \frac{\partial P}{\partial u} + b_2 \frac{\partial \alpha}{\partial u} + b_3, \quad (151)$$

коэффициенты которой выражаются элементарно через W, α, θ, V . Далее М. А. Лаврентьев вводит основное в теории новое понятие: система (145) называется сильно эллиптической в области D пространства $(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y)$, если при любом $\nu, 0 \leq \nu < 2\pi$, и в каждой точке D систему можно переписать в виде (149), причем

1) функции W_ν и θ_ν однозначны и дифференцируемы при всех значениях аргументов, соответствующих точкам D ;

2) существует постоянная $k > 0$, такая, что при всех значениях аргументов

$$k < \theta_\nu(x, y, u, v, V_\nu, \alpha_\nu) < \pi - k; \quad (152)$$

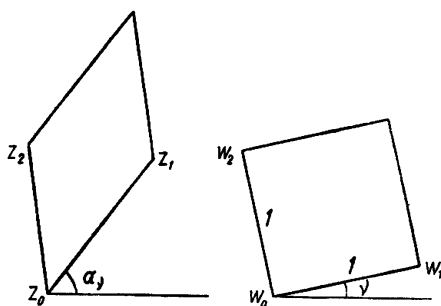


Рис. 1. Отображение единичного квадрата.

3) существует постоянная $k_1 > 0$ такая, что при всех значениях этих же аргументов

$$\frac{\partial W_v}{\partial V_v} > k_1. \quad (153)$$

При $k = k_1 = 0$ система называется эллиптической в геометрическом смысле.

Если система (145) квазилинейна, то условия (152), (153) сильной эллиптичности в геометрическом смысле сводятся к обычному условию эллиптичности.

Условие сильной эллиптичности в этом случае эквивалентно условию, что минимум квадратичной формы, соответствующей системе, больше положительной постоянной. В нелинейном (или неоднородном) случае эллиптичность в геометрическом смысле не сводится к обычной эллиптичности. Позднее Б. В. Шабат показал, что, если уравнения (149) не содержат явно координат, это условие сводится к обычному условию эллиптичности, дополненному требованием, что якобиан любого решения системы обращается в нуль лишь вместе со всеми частными производными, не меняя при этом знака.

Понятия геометрической эллиптичности и производной системы (с учетом более позднего — 1961 г. — результата Б. В. Шабата) связаны следующим образом.

Пусть уравнения линейной системы (145) в характеристиках (150) ($v = 0$) в некоторой области шестимерного пространства обладают непрерывными частными производными 1-го порядка; предположим также, что (145) не принадлежит к исключительному случаю системы вида

$$V_v^2 \frac{\partial W_v}{\partial V_v} = v^2 \frac{\partial W}{\partial V}$$

при всех v . Тогда условие (153) (при любом v) эквивалентно условию эллиптичности производной системы (151).

В первой из рассматриваемых работ М. А. Лаврентьев ограничивается случаем, когда (145) имеет вид

$$\Phi_j(u_x, u_y, v_x, v_y) = 0 \quad (j = 1, 2). \quad (154)$$

Он получает обобщения на случай решения системы (154) принципа Шварца — Линделефа, с помощью которого ему удается распространить на рассматриваемый класс квазиконформных отображений все свойства конформных отображений, основанные только на этом принципе, например теоремы, характеризующие поведение отображения на границе, и в частности оценки для производных в зависимости от геометрических свойств границы отображаемой области. Этот принцип сформулирован следующим образом.

Пусть $y = y(x, v)$, $y = \bar{y}(x, v)$ суть линии тока при квазиконформном отображении, соответствующем системе (154) областей D (Γ_0, Γ) и $D(\Gamma_0, \bar{\Gamma})$, где $\Gamma_0: y = y_0(x)$, $\Gamma: y = y(x)$, $\bar{\Gamma}: y = \bar{y}(x)$, на полосу $0 < v < 1$. Тогда, если y дважды дифференцируема и $\bar{y}(x) \geq y(x)$, то $\bar{y}(x, v) \geq y(x, v)$. При этих же условиях в каждой точке Γ_0 $\frac{\partial \bar{y}}{\partial v} \geq \frac{\partial y}{\partial v}$, в точке, где $\bar{y}(x) - y(x)$ достигает максимума, $\frac{\partial \bar{y}}{\partial v} \geq \frac{\partial y}{\partial v}$ и в точках, общих для Γ и $\bar{\Gamma}$, $\frac{\partial \bar{y}}{\partial v} \leq \frac{\partial y}{\partial v}$. Знаки равенства всюду здесь достигаются только в точках, общих для Γ и $\bar{\Gamma}$.

Этот принцип, дополненный принципом максимума, дает возможность М. А. Лаврентьеву для конкретных сильно эллиптических систем строить качественные и количественные мажоранты для различных важных функционалов на соответствующих квазиконформных отображениях. С их помощью Лаврентьев доказывает и главный результат всей теории — теорему существования (в первой работе — для системы (154)): для любой сильно эллиптической системы (154), любых односвязных областей D и Δ , ограниченных гладкими линиями C и Γ , и любых точек $z_0 \in D$, $w_0 \in \Delta$, $z_1 \in C$, $w_1 \in \Gamma$, существует одно и только одно квазиконформное отображение $w = T(z)$, $w_0 = T(z_0)$, $w_1 = T(z_1)$, переводящее D в Δ и соответствующее системе (154).

Во второй работе все результаты обобщаются на самый общий случай произвольной сильно эллиптической системы (145). Приведем формулировку теоремы существования: каковы бы ни были две области D и Δ , ограниченные кусочно-гладкими кривыми, и две положительно занумерованные тройки точек границ D и Δ соответственно z_j и w_j ($j = 1, 2, 3$) и какова бы ни была сильно эллиптическая система (150) с равномерно непрерывными частными производными правых частей, всегда существует единственное квазиконформное отображение, соответствующее системе и переводящее D в Δ с соответствием $T(z_j) = w_j$.

В дальнейшем были получены и другие результаты, развивающие общую теорию. Приведем теоремы принципиального значения (М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, 1957 г.).

1. Для любой римановой поверхности F гиперболического типа и для любой сильно эллиптической системы (145) существует гомеоморфное квазиконформное отображение $w = T(z)$ поверхности F на единичный круг, соответствующее этой системе.

2. Любое дифференцируемое в области D решение $w = T(z)$ сильно эллиптической системы (145), для которого $u \neq \text{const}$, $v \neq \text{const}$, реализует гомеоморфное отображение D на некоторую риманову поверхность.

Из теорем Лаврентьева — Шабата следует:

3. Любое дифференцируемое в области D решение $w = T(z)$ сильно эллиптической системы (145), для которой $u \neq \text{const}$, $v \neq \text{const}$, можно представить как суперпозицию аналитической функции и гомеоморфного, квазиконформного отображения области на себя.

Ясно, что указанные теоремы позволяют распространить на решения сильно эллиптической системы все топологические свойства аналитических функций (принцип максимума, принцип соответствия границ, принцип аргумента, теорему Руше и др.), что в соответствии с метрическими свойствами, установленными М. А. Лаврентьевым, делает эту удивительную по общности теорию достаточно развитой в главных направлениях.

М. А. Лаврентьевым и его учениками геометрическая теория дифференциальных уравнений успешно применялась для решения важных задач прикладного характера. Приведем несколько примеров ее гидродинамических приложений.

Уравнения газовой динамики для плоского установившегося движения идеального газа, записанные в характеристиках, имеют вид

$$W = W(V), \quad \theta = \frac{\pi}{2}. \quad (155)$$

Первое уравнение выражает зависимость расхода газа $\frac{1}{W}$ от скорости его течения $\frac{1}{V}$.

Производная система принимает следующую форму:

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{W}{V} \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = -\frac{\partial W}{\partial V} \frac{\partial P}{\partial u}$$

(известная система С. А. Чаплыгина, лежащая в основе метода годографа). М. А. Лаврентьеву принадлежит новый (геометрический) метод ее вывода.

Задача квазиконформного отображения, соответствующего системе (155), области $D(\Gamma_0, \Gamma)$ на полосу $0 < v < H$ эквивалентна задаче построения плоско-параллельного установившегося потока газа, протекающего между стенками Γ_0 и Γ с расходом H .

При дозвуковом режиме ($\lambda < \lambda_{зв}$) система сильно эллиптическая и теорема существования М. А. Лаврентьева приводит к утверждению: пусть $\Gamma_0: y = y_0(x)$, $\Gamma: y = Y(x)$, причем $k_0 \leq Y(x) - y_0(x) \leq k_1$, $|y'_0(x)| < k'$, $|Y'(x)| < k'$, $|y''_0(x)| < k''$, $|Y''(x)| < k''$; тогда найдется такое H_0 , что при любом $H \leq H_0$ существует газовый поток с расходом H , протекающий между стенками Γ_0 и Γ ; при $H = H_0$ на границе потока найдется точка, в которой скорость потока равна скорости звука.

В силу приведенных выше теорем 1—3 теорема существования распространяется на случай многолистных областей, что позволяет получать теоремы существования обтеканий контуров с циркуляцией при всех дозвуковых режимах.

Эта теория позволяет также распространить метод М. А. Лаврентьева построения струйных течений для несжимаемой жидкости на случай идеального газа, благодаря чему для всех дозвуковых режимов можно строить газовые потоки, обтекающие тела со срывом струй. Существенные результаты получены и для пространственных потоков с осевой симметрией.

Нельзя не упомянуть и о работе М. А. Лаврентьева «Кумулятивный заряд и принципы его работы» (1957 г.), в которой обоснован неожиданный вывод: при исследовании кумулятивного эффекта (резкое увеличение бронебойного действия при наличии выемок в заряде, облицованных оболочкой) в первом приближении вещество заряда и пробиваемую преграду можно считать несжимаемой жидкостью. В этом и некоторых других естественных предположениях вопрос сводится к задаче о соударении струй. В случае осевой симметрии опять возникает задача об отыскании квазиконформного отображения одной области на другую, соответствующего эллиптической системе, и теория М. А. Лаврентьева оказывается применимой.

Начато исследование проблемы о возможном эквиваленте теории для систем уравнений смешанного типа. Некоторые подходы к геометрической теории линейных систем гиперболического типа можно найти в работе Б. В. Шабата (1956 г.). М. М. Лаврентьев доказал (1956 г.) для гиперболической системы

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v(V) \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -v(V) \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (156)$$

где

$$\frac{1}{V} = u_x^2 + u_y^2, \quad v(V) = \frac{1}{V} \sqrt{1 - V^2},$$

следующую теорему существования: какова бы ни была область D , ограниченная линией $y = 1$ и линией $\Gamma: y = y(x)$, $|y(x)| \leq k < 1$, удовлетворяющей условиям 1) Γ — гладкая, причем $|y'(x)| \leq k(4 + \delta)^{-1}x|$, где $k < 1$, δ — положительные постоянные и 2) $|y'(x+h) - y'(x)| \leq Kh$, существует квазиконформное отображение, соответствующее системе (156) и переводящее D в полосу $0 < v < 1$.

Система (156), записанная в характеристиках V, α, W, θ , имеет вид $W = \sqrt{1 - V^2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Если дополнительно принять, что при $x \rightarrow -\infty \alpha \rightarrow 0$, то отображение в теореме будет единственным с точностью до постоянной сдвига плоскости u, v в направлении u .

М. А. Лаврентьев ставит (1964 г.) следующую задачу, имеющую уже прямое отношение к проблеме квазиконформных отображений, соответствующих системам типа смешанного.

Даны две системы

$$\left. \begin{aligned} F_1^{(i)}(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) &= 0 \\ F_2^{(i)}(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (157)$$

и в плоскости z дана полоса $D(\Gamma_0, \Gamma): y_0(x) < y < y_1(x)$, где y_0 и y_1 определены, ограничены для всех x и достаточно гладки. При этих условиях требуется построить линию $\gamma: y = y(x)$, $y_0(x) < y(x) < y_1(x)$ так, чтобы при квазиконформных отображениях областей $D(\Gamma_0, \gamma)$ и $D(\gamma, \Gamma)$ на полосы $-h < v < 0$ и $0 < v < 1$ вдоль линии γ при обоих отображениях каждой точке γ соответствовала одна и та же точка прямой $v = 0$. Квазиконформные отображения соответствуют системам (157) при $i = 1$ и $i = 2$, число h наперед задано. Условие непрерывности отображений при переходе через γ может быть заменено некото-

рым соотношением между образами точки на γ или соотношением между характеристиками на γ при подходе к γ сверху и снизу.

М. А. Лаврентьев отмечает, что при решении рассматриваемого класса задач вариационным методом в случае сильно эллиптических систем существенны два их свойства: разрешимость задачи Римана о существовании и единственности соответствующих квазиконформных отображений $D(\Gamma_0, \gamma)$ и $D(\gamma, \Gamma_1)$ на прямолинейные полосы при любых γ и Γ и наличие для квазиконформных отображений принципа Шварца — Линделефа. В случае отображений, соответствующих гиперболическим системам, вообще говоря, ни одно из отмеченных свойств не выполняется. Однако принцип Шварца — Линделефа при некоторых ограничениях на условия задачи о склеивании можно заменить некоторыми свойствами скорости и ее вариации на границе γ (при газодинамической интерпретации системам (157) соответствуют газовые потоки с одинаковыми плоскостями, но с разными скоростями звука) в зависимости от поведения γ и ее вариации. Учитывая это, М. А. Лаврентьев ставит задачу о рассмотрении более общих классов квазиконформных отображений, заранее постулируя нужные свойства их, и проводит некоторые операции последовательных приближений асимптотически сходящейся к решению задачи на склеивание.

В работе Г. А. Кузик и Г. Д. Суворова «Расширенное понятие квазиконформности плоского отображения и линейные системы дифференциальных уравнений смешанного типа» (1966 г.) дано определение расширенного понятия квазиконформности плоского отображения, переходящего в одном случае в определение квазиконформности с «одной парой характеристик» М. А. Лаврентьева. Выяснена связь нового понятия со свойствами решений системы дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка (не обязательно эллиптического типа). При рассмотрении линейных систем 1-го порядка эта связь вполне аналогична связи обычной квазиконформности со свойствами решений соответствующей системы эллиптического типа. Это понятие характеризует локальное свойство отображений метрико-геометрического характера, присущее каждому «хорошему» (по топологическим и дифференциальным свойствам) решению системы в любой точке области его существования. И несмотря на то что эти свойства резко изменяются при переходе от точки к точке, если при этом изменяется тип системы, определение удалось сформулировать в терминах, одинаковых для всех случаев — гиперболического, параболического и эллиптического, при этом обеспечивается непрерывность возникающих характеристик (тройка характеристик в указанной работе и две тройки — в работе Г. А. Кузик 1967 г.). Заметим, что здесь условие эллиптичности М. А. Лаврентьева освещено по-новому. В целом, однако, исследования по этой тематике только начаты.

Теория пространственных квазиконформных отображений в настоящее время развита достаточно глубоко (см. § 4), однако пока эта теория представляет значительный интерес главным образом в плане теории функций. Связь ее с геометрической теорией систем n дифференциальных уравнений с n -переменными в случае $n \geq 3$ отлична от тако-

вой в случае $n = 2$. Поэтому теория квазиконформных отображений, соответствующая, например, системам трех уравнений с тремя неизвестными, развита еще мало. В обзорном докладе на Международной конференции по теории аналитических функций (Ереван, 1965 г.) М. А. Лаврентьев подвел итоги своих исследований в этом направлении: задача может быть поставлена так же, как и в плоском случае. Дана система

$$F_i(x, y, z, u, v, w, u_x, u_y, \dots, w_z) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (158)$$

и две области D и Δ в пространствах (x, y, z) и (u, v, w) ; требуется найти отображение D на Δ так, чтобы функции u, v, w , реализующие отображение, удовлетворяли (158) (задача Римана; можно сформулировать и другие краевые условия).

М. А. Лаврентьев записывает систему (158), как и в плоском случае, в «характеристиках» — параметрах, имеющих прямой геометрический смысл, и рассматривает задачу об отображении областей типа слоев. Граница такой области D состоит из поверхностей $\Gamma_0: z = z_0(x, y)$, $\Gamma_1: z = z_1(x, y)$, достаточно гладких и имеющих асимптотические плоскости соответственно $z = 0$, $z = 1$. Накладывая на параметры ограничения, Лаврентьев получает различные классы отображений. Он рассмотрел три класса: гармонические отображения, на которые распространяются многие геометрические теоремы конформных отображений; класс квазиконформных отображений, к которым сводится задача об установившихся волновых движениях тяжелой жидкости в нелинейном случае, т. е. решение такой краевой задачи для системы (158), когда одна из границ области D не задана, а находится из некоторого граничного условия; случай системы четырех уравнений, где выделяется система, решение которой является градиентом гармонической функции.

В заключение следует сказать, что теория М. А. Лаврентьева далека от завершения в смысле возможностей ее дальнейшего развития во всех направлениях и приложений.

Переходя к следующему разделу, заметим, что квазиконформные отображения, соответствующие сильно эллиптической системе (в плоском случае), всегда являются Q -квазиконформными, причем Q зависит только от рассматриваемой системы. Поэтому изучение Q -квазиконформных отображений представляет исключительный интерес и с точки зрения самой общей теории М. А. Лаврентьева, и само по себе, поскольку теория их составляет существенную главу в современной геометрической теории функций.

3

Плоские квазиконформные отображения

В первых работах М. А. Лаврентьева и его учеников (по этой тематике) теория развивалась в двух направлениях: изучение общих классов отображений двумерных областей (отображения с одной и двумя парами характеристик и некоторые

другие), сохраняющих некоторые свойства конформных отображений, и геометризация теории систем дифференциальных уравнений. Оказалось, что оба направления эквивалентны и взаимно обогащают друг друга. Важным моментом было исследование И. Н. Песиным класса «общих Q -квазиконформных отображений» (1956 г.). Приведем его определение ³³.

Семейство $C(z, k)$ кривых C_α , $0 < \alpha < 1$, называется регулярным с параметром k , $1 < k < \infty$, относительно точки z , если C_α суть образы окружностей $|t| = \alpha$ при гомеоморфном отображении круга $|t| < 1$ на некоторую окрестность z , причем $t = 0$ переходит в точку z и выполняется соотношение

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\max_{z' \in C_\alpha} |z' - z|}{\min_{z' \in C_\alpha} |z' - z|} = k.$$

Гомеоморфизм $w = T(z)$ называется регулярным в точке z , если он переводит некоторое регулярное семейство $C(z, k)$ в регулярное семейство $C[T(z), k']$. Число $p(z) = \inf k k'$, где нижняя грань берется по всем семействам $C(z, k)$, называется характеристикой отображения T . T регулярно, если оно регулярно в каждой точке. Наконец, регулярное отображение T области D на область Δ с характеристикой $p(z)$ называется общим Q -квазиконформным отображением, если $\text{vrai} \max p(z) \leq Q$ в D . Ясно, что свойство Q -квазиконформности отображения $w = T(z)$ инвариантно относительно конформности преобразований в плоскостях z и w .

В работе И. Н. Песина содержится следующий результат о равномерном искажении окружностей: для любых общих Q -квазиконформных отображений T , $T(0) = 0$, точки z_0 , $|z_0| < 1$, и числа r , $0 < r < 1 - |z_0|$, справедливо соотношение

$$\frac{\max_{|z - z_0| = r} |T(z) - T(z_0)|}{\min_{|z - z_0| = r} |T(z) - T(z_0)|} < \lambda(Q) < \infty,$$

где $\lambda(Q)$ — некоторая универсальная монотонно возрастающая функция (доказательство этой теоремы принадлежит П. П. Белинскому).

Теоремы М. А. Лаврентьева об искажении расстояний и устойчивости конформных отображений переносятся и на этот, более общий класс. И. Н. Песин доказал (1955 г.), что множество точек дифференцируемости общего Q -квазиконформного отображения, в которых якобиан равен нулю, имеет меру нуль и что семейство таких отображений нормально. Затем П. П. Белинский и И. Н. Песин доказали (1955 г.) теорему существования: каковы бы ни были измеримые характеристики $p(z)$, $\Theta(z)$, $p \leq Q$, определенные для почти всех z , $|z| < 1$, существует единственная функция $w = T(z)$, $T(0) = 0$, $T(1) = 1$,

³³ Аналогичное определение (и для n -мерных отображений) было дано ранее А. И. Маркушевичем в работе «О некоторых классах непрерывных отображений» (1940 г.).

осуществляющая общее Q -квазиконформное отображение круга $|z| \leq 1$ на $|w| \leq 1$, обладающее почти всюду заданными характеристиками. Доказано также, что класс общих Q -квазиконформных отображений является замыканием класса непрерывно дифференцируемых Q -квазиконформных отображений.

В работе 1956 г. И. Н. Песин установил важное свойство абсолютной непрерывности отображений рассмотренного им класса, замкнутость класса, относительно равномерной сходимости. Рассмотрел различные классы теоретико-функциональных нуль-множеств, множества единственности и устранимости в различных классах аналитических функций и изучил их поведение при Q -квазиконформных отображениях.

Б. В. Боярский, ученик И. Н. Векуа, с помощью методов теории обобщенных аналитических функций, созданной И. Н. Векуа, получил (1957 г.) следующие результаты.

Обобщенным решением системы (144) называется всякая комплексная функция $w = u + iv = T(z)$, которая определена в D , имеет в D обобщенные первые производные в смысле С. Л. Соболева, суммируемые с квадратами в каждой подобласти $D' \subset D$, и удовлетворяет (144) почти всюду в D . В соответствии с общим определением М. А. Лаврентьева, отображение $w = T(z)$ области D на область Δ (а priori не обязательно непрерывное или внутреннее) называется квазиконформным отображением D на Δ , соответствующим (144), если T — обобщенное решение системы. Оказалось, что всякое квазиконформное отображение, соответствующее системе (144) с произвольными измеримыми коэффициентами, есть внутреннее отображение и класс отображений И. Н. Песина совпадает с классом квазиконформных отображений, соответствующих такой системе.

В случае гладкости коэффициентов в (144) соответствующие квазиконформные отображения во всех точках переводят бесконечно малые эллипсы в бесконечно малые круги (отображения с одной парой характеристик). В общем случае это свойство имеет место только почти везде в области. В случае непрерывности коэффициентов обобщенное решение не дифференцируемо всюду и якобиан отображения может обращаться в нуль на плотном множестве точек, тем не менее обобщенное решение во всех точках отображаемой области переводит бесконечно малые эллипсы в бесконечно малые эллипсы (отображения с двумя парами характеристик). Таким образом, класс квазиконформных отображений с двумя парами непрерывно распределенных характеристик совпадает с классом обобщенных решений системы (144) с непрерывными коэффициентами. Эти результаты позволили Б. В. Боярскому получить новое доказательство теоремы существования и значительно продвинуться в вопросе о теоремах единственности.

Пфлюгер и Альфорс изучали Q -квазиконформные отображения, определяющиеся как такие отображения, которые изменяют конформный модуль произвольного топологического четырехугольника не более чем в Q раз. Мори принадлежит «аналитическое» определение квазиконформности: сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $T = u + iv$

области D , удовлетворяющей условиям а) $u(x, y)$, $v(x, y)$ абсолютно непрерывны внутри почти всех сечений D прямыми, параллельными осям координат, и б) $\frac{u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2}{|I(T)|} \leq Q + \frac{1}{Q}$ в D , где $I(T)$ — якобиан. Мори, Берс показали, что два приведенных определения эквивалентны, а И. Н. Песин доказал, что класс, изучавшийся Пфлюгером и Альфорсом, совпадает с классом общих Q -квазиконформных отображений. Таким образом, в основных понятиях была достигнута полная ясность.

Каждое из упомянутых определений (а также ряд других, менее общих) было предметом исследования в многочисленных работах советских и зарубежных математиков. После выяснения взаимосвязей между различными определениями все направления слились в единую весьма содержательную теорию отображений с ограниченным искажением.

Рассмотрим некоторые результаты советских математиков.

Большой цикл важных работ принадлежит П. П. Белинскому. Им доказана (1953 г.) теорема о дифференцируемости квазиконформного отображения в изолированной точке. Если T непрерывно, ограничено, осуществляет квазиконформное отображение области D с выброшенной точкой z_0 и интеграл $\iint_D \frac{p(z) - 1}{|z - z_0|^2} dx dy$ сходится, то существует $\lim_{z \rightarrow z_0} T(z)$, T моногенно в z_0 , $T'(z_0) \neq 0$ — результат, обобщающий результат Б. В. Шабата (1945 г.) и уточняющий теорему Тейхмюллера — Виттиха.

П. П. Белинский показал (1953 г.), что в теореме устойчивости (2) М. А. Лаврентьева³⁴ (см. § 1) в качестве универсальной функции $\lambda(\varepsilon)$ можно взять 18 ε . Оценка (143) самим М. А. Лаврентьевым была уточнена так:

$$\left| \frac{z_1 - z_2}{M} \right|^Q \leq |T(z_1) - T(z_2)| \leq M |z_1 - z_2|^{\frac{1}{Q}},$$

M — абсолютная постоянная. П. П. Белинский установил (1953 г.), что $M < 48$. Мори дал (1956 г.) точное выражение для этой постоянной: $M = 16$.

П. П. Белинскому принадлежит ряд тонких примеров, вскрывающих природу квазиконформных отображений. Им также впервые получена (1958 г.) оценка изменения площади при ε -квазиконформных отображениях круга на круг.

Приведем формулировку еще одного результата (1959 г.) П. П. Белинского.

Пусть M — семейство функций $\{T\}$ со свойствами

1) функции $T(z)$ определены в областях и осуществляют гомеоморфные отображения;

³⁴ Здесь и далее под квазиконформными отображениями понимаются общие Q -квазиконформные отображения.

2) преобразования вида $z' = az + b$ и $w' = aw + b$ не нарушают принадлежности функций к семейству;

3) всякую последовательность функций $w = T_n(z)$, $T_n \in M$, определенных в областях D_n , с невырожденным ядром D (в смысле Каратеодори) можно превратить в компактную, в смысле равномерной сходимости внутри D , с помощью нормировки вида $w = a_n T_n(z) + b_n$.

Тогда отображения семейства оказываются квазиконформными с некоторым $Q < \infty$.

Следовательно, класс квазиконформных отображений является единственным возможным расширением класса конформных отображений, сохраняющим свойства 1—3.

П. П. Белинский предложил (1958—1960 гг.) первый в теории квазиконформных отображений вариационный метод. Идея, восходящая к М. А. Лаврентьеву, состоит в следующем. Пусть известна функция $w = f(z)$, отображающая область D на себя, нормированная некоторым образом и обладающая тем свойством, что отображение, осуществляемое ею, конформно вне некоторого круга $K \subset D$, а внутри него имеет заданную постоянную характеристику $p(z) \equiv h$. Если для любого достаточно малого K и любого h такая функция может быть фактически записана, то, варьируя с ее помощью предполагаемое экстремальное выражение, можно определить, какова должна быть его характеристика, и тем самым решить экстремальную задачу. Формулы, определяющие указанные функции, называются вариационными. П. П. Белинский выводит такие формулы, локальные и интегральные, для ряда канонических областей. Для плоскости с фиксированными (неподвижными) точками 0, 1, ∞ интегральная теорема формулируется так.

Пусть функция $h(\zeta)$ определена в плоскости ζ и непрерывна всюду, за исключением, может быть, конечной системы замкнутых дуг C_n , имеющих в каждой точке касательную, удовлетворяющую условию Гельдера. Пусть функция $h(\zeta)$ кусочно-дифференцируема и $|h(\zeta)| < \varepsilon$, $|\frac{\partial h}{\partial \bar{\zeta}}| < \varepsilon$, и пусть $h\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ или $\left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}}\right)^2 h\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ удовлетворяют в окрестности $\zeta = 0$ тем условиям, которые наложены на функцию $h(\zeta)$ в остальных точках. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ функция

$$w = T(z) = z \left[1 - \frac{1-z}{\pi} \int \int_{|\zeta| < \infty} \frac{h(\zeta) d\sigma_{\zeta}}{\zeta(1-\zeta)(\zeta-z)} \right]$$

осуществляет отображение плоскости z на плоскость w с некоторой характеристикой $\widetilde{h}(\zeta)$, причем $|\widetilde{h}(\zeta) - h(\zeta)| < M\varepsilon^2$. При этом отображение T отличается от нормированного отображения с характеристикой $h(\zeta)$ также на величину порядка ε^2 в любой ограниченной области.

При этих же ограничениях на $h(z)$ получены интегральные вариационные формулы отображения круга, полуплоскости и полосы.

Вариационные формулы применяются для решения ряда экстремальных задач. В общей форме задача ставится так: в классе квазиконформных отображений с характеристикой $p(z) \leq Q$ найти максимум действительной функции $F(z_1, \dots, z_k, w_1, \dots, w_k)$, $w_n = T_n(z_n)$, при



П. П. Белинский.

фиксированных z_i . При естественных предположениях доказано существование и найден вид экстремальной функции. Метод позволяет решать конкретные задачи до конца. Например, в теореме устойчивости (1) М. А. Лаврентьева (см. § 1) П. П. Белинский нашел точное выражение для $\lambda(\varepsilon)$:

$$\lambda(\varepsilon) = \varepsilon \frac{8}{\pi} \int_0^1 K(r^2) dr \approx 4,5\varepsilon,$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Если $1 \leq p(z) \leq Q$, при этих же условиях нормировки ($T(0) = 0$, $T(1) = 1$) отображение круга $|z| \leq 1$ на $|w| \leq 1$ удовлетворяет точному неравенству

$$|T(z) - z| \leq \rho(r, Q) - r, \quad r = |z|,$$

где $\rho(r, Q)$ определяется из некоторого соотношения, содержащего тот же эллиптический интеграл и его производную; круг $|z - z_0| = R$ при отображении T деформируется так, что

$$\frac{\max_z |T(z) - T(z_0)|}{\min_z |T(z) - T(z_0)|} \leq \rho(1, Q).$$

Точные оценки даны выражениям, оцениваемым в первоначальных теоремах М. А. Лаврентьева (см. § 1, теорема устойчивости (3)).

Ученик П. П. Белинского С. Л. Крушкаль распространил (1964 г.) вариационный метод на квазиконформные отображения круговых колец. Затем перенес его на замкнутые римановы поверхности и применил для решения вариационных задач квазиконформных отображений, а также для локального изучения пространства Тейхмюллера (см. § 6). В последних работах С. Л. Крушкаль связал эти задачи с экстремальными задачами теории однолистных функций.

Другой ученик П. П. Белинского — П. А. Билута рассмотрел (1964 г.) вариационный метод в применении к квазиконформным «в среднем» отображениям, т. е. к таким отображениям, для которых ограничен интеграл

$$\iint_D \Phi[p(z)] d\sigma_z,$$

где Φ — некоторая функция. Для отображений класса $\iint p d\sigma_z \leq M$ он нашел точную оценку изменения конформного модуля колец, а также получил некоторые другие результаты. В частности, рассмотрел экстремальные квазиконформные отображения для произвольных плоских областей.

Г. Д. Суворов изучал (1960 г.) поведение однолистных Q -квазиконформных отображений в произвольных односвязных замкнутых (прос-

тыми концами) областях. Им получены двусторонние оценки искажения сферических и «относительных» расстояний, особо рассмотрен случай отображения замкнутых областей на области с изопериметрической границей и найдена оценка сверху относительного сферического расстояния точек образа. Эти результаты позволяют получить оценки искажения соответствующих расстояний также в евклидовой метрике, и в частности известные оценки М. А. Лаврентьева в конформном случае. Кроме того, все эти оценки позволяют легко проверить обобщенную равномерную непрерывность и открытость некоторых общих классов Q -квазиконформных отображений. Они представляют собой уточнения для квазиконформных отображений результатов Г. Д. Суворова для более общих классов отображений. Суворову принадлежит (1961 г.) распространение известного в теории аналитических функций «принципа длины и площади» на внутренние Q -квазиконформные отображения.



И. П. Митюк.

Ученик А. И. Маркушевича В. И. Гаврилов изучал (1961—1963 гг.) граничное поведение квазиконформных отображений. Он получил точные в некотором смысле оценки степени близости к границе образа при Q -квазиконформных отображениях непрерывной кривой, оканчивающейся в произвольной граничной точке области определения, оценки искажения углов. Выделил подкласс квазиконформных отображений на круг, обладающих свойством абсолютной непрерывности на границе круга. Рассмотрел также граничное поведение неоднолистных квазиконформных отображений.

И. П. Митюк предложил (1962 г.) метод распространения различных теорем покрытия, известных для однолистных конформных отображений односвязных или двусвязных областей, на случай однолистных квазиконформных отображений многосвязных областей.

Однолистную плоскую область D , ограниченную окружностями $|z| = r$, $|z| = R$, И. П. Митюк называет экстремальной областью типа $K(r; R)$, если модуль семейства спрямляемых кривых, лежащих в области D и разделяющих граничные окружности, удовлетворяет равенству $M(|z| = r, |z| = R, D) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{r}$. Доказана теорема: если функция $w = T(z)$ осуществляет непрерывно дифференцируемое Q -квазиконформное отображение экстремальной области K_0 типа $K(1; R_0)$ на экстремальную область K_1 типа $K(1; R_1)$, причем окружности $|z| = 1$ и $|z| = R_0$ при отображении переходят соответственно в $|w| = 1$ и $|w| = R_1$, то $R_1 \geq R_0^{\frac{1}{Q}}$; при этом равенство достигается

только при $T(z) = |z|^{\frac{1}{Q}} e^{i(\arg z + C_0)}$, где C_0 — действительная константа. Эта теорема позволяет распространить на случай Q -квазиконформных отображений ряд результатов, которые были доказаны ранее И. П. Митюком для однолистных конформных отображений многосвязных областей, имеющих по крайней мере две невырожденные граничные компоненты.

Указанным способом получены обобщения различных теорем покрытия (Гретш, Г. Я. Хажалия, Кубо, Абе и др.). Аналогичный метод развит и для случая Q -квазиконформных отображений в многосвязной области, имеющей по крайней мере одну невырожденную граничную компоненту. Получены обобщения теорем Кебе, М. А. Лаврентьева — В. М. Шепелева, Г. М. Голузина и др.

Вопросам приближенного построения квазиконформных отображений посвящены работы Б. А. Вертгейма.

Теория плоских отображений с ограниченным искажением получила многочисленные приложения в самой теории функций: к проблеме изучения типа римановой поверхности (работы Л. И. Волковического и его учеников; здесь особо важную роль играет теорема о склеивании М. А. Лаврентьева, ее обобщения и варианты), теории целых и мероморфных функций и др.

4

Пространственные квазиконформные отображения

Почти одновременно с понятием плоского квазиконформного отображения появилось и соответствующее определение для пространственного случая. В работе 1938 г. М. А. Лаврентьев дает такое определение. Пусть

$$y = T(x) = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}, \quad x = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad y = \{y_1, y_2, y_3\} \quad (159)$$

есть непрерывное отображение области $D \in E^3$ в E^3 , f_i дифференцируемы в D с положительным якобианом. При этих условиях бесконечно малый шар $|x - x_0| \leq \rho$ отображением T переводится в бесконечно малый эллипсоид. Пусть a и c — его большая и малая полуоси. T квазиконформно в D , если существует константа $Q \geq 1$ такая, что для каждой точки x_0

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{a(x_0)}{c(x_0)} \leq Q.$$

В этой же работе М. А. Лаврентьев впервые формулирует две теоремы, выявляющие специфику пространственного случая. Первая из них — о стирании особенностей меньшей размерности при квазиконформном отображении шара. Вторая формулируется так: если (159) осуществляет квазиконформное отображение всего пространства E^3 на E^3 или

на его часть, то T гомеоморфно в E^3 . Поскольку теории пространственных квазиконформных отображений еще не было, М. А. Лаврентьеву удалось доказать обе теоремы только при сильных дополнительных ограничениях. Полное решение вопроса было делом будущего.

Следующие результаты принадлежат А. И. Маркушевичу (1940 г.) и М. А. Крейнсу (1941 г.). К этим результатам восходят два естественных обобщения первоначального понятия квазиконформности. Приведем эти два определения.

Пусть $S = \{S_t\}$, $0 < t < t_0$, — семейство $(n - 1)$ -мерных поверхностей, гомотопных семейству сфер $|\xi - x| = t$ и охватывающих точку x :

$$\left. \begin{aligned} q(x, S) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\max |\xi - x|}{\min |\xi - x|}, \quad \xi \in S_t, \\ q(x) &= \inf q(x, S) \quad q(y, S^*), \end{aligned} \right\} \quad (160)$$

где $S^* = \{S_t^*\}$ — образ семейства S и $\inf$ берется по всем семействам S , принадлежащим рассматриваемой окрестности.

I. Гомеоморфное отображение $y = T(x)$ области $D \in E^n$ называется квазиконформным, если его характеристика $q(x)$ конечна в каждой точке $x \in D$ и $\text{vrai max } q(x) = Q < \infty$.

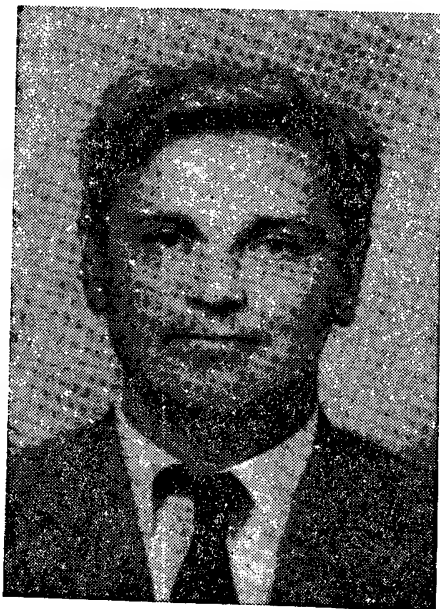
Для этого класса (точнее, для более общего класса — локально гомеоморфных квазиконформных отображений) А. И. Маркушевич доказал дифференцируемость почти всюду, а также неравенство нулю якобиана почти всюду.

II. Непрерывное отображение $y = T(x)$ области $D \in E^n$ называется квазиконформным, если оно имеет в D обобщенные частные производные в смысле С. Л. Соболева, суммируемые в степени n на любом компактном подмножестве D , и если существует постоянная K такая, что почти всюду в D (в смысле n -мерной меры Лебега) справедливо неравенство

$$\left[\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)^2 \right]^{\frac{n}{2}} \leq n^{\frac{n}{2}} K |J(T)|. \quad (161)$$

При некоторых дополнительных условиях регулярности отображений М. А. Крейнс доказал равностепенную непрерывность класса внутри области.

Третье определение было дано лишь спустя много лет, когда началось интенсивное развитие теории. Дело в том, что если источником аналогий для теории плоских квазиконформных отображений служил конформный случай, то соответствующим источником для пространственных отображений могла быть только достаточно развитая теория плоских квазиконформных отображений, ибо класс пространственных конформных отображений сводится к переносам, преобразованиям подобия и инверсиям и поэтому лишен содержательной теории. Связь пространственных квазиконформных отображений с системами дифференциальных уравнений также своеобразна, поскольку в точках диффе-



Б. В. Шабат.

ренцируемости отображение удовлетворяет переопределенной системе уравнений, что делает малоестественной постановку краевых задач по аналогии с плоским случаем. В 1959 г. Ч. Левнер, в 1960 г. Б. В. Шабат, в 1961 г. Ю. Вайсла и Ф. Геринг дали третье определение квазиконформности.

Пусть в $D \subset E^n$ задано семейство k -мерных ($k \leq n-1$) поверхностей $\{C_{(k)}\}$. Неотрицательная измеримая функция $\rho = \rho(x)$, $x \in D$, называется допустимой метрикой семейства $\{C_{(k)}\}$, если для любой поверхности семейства поверхностей

$$\int_{C_{(k)}} \rho^k(x) d\sigma \geq 1.$$

Модулем семейства называется число

$$M\{C_{(k)}\} = \inf_{\rho} \int_D \rho^n(x) dx,$$

где нижняя грань берется по всем допустимым метрикам семейства и dx — элемент объема.

III. Гомеоморфное отображение $y = T(x)$ области D называется квазиконформным, если существует постоянная Q такая, что модуль любого семейства $\{C_{(k)}\} \subset D$ и модуль его образа $\{C_{(k)}^*\}$ связаны соотношением

$$Q^{k-n} M\{C_{(k)}\} \leq M\{C_{(k)}^*\} \leq Q^{n-k} M\{C_{(k)}\}.$$

Б. В. Шабат установил существенные для теории свойства модулей семейств поверхностей. Приведем аналоги вариационных лемм Гретша и Тейхмюллера (Б. В. Шабат и Ф. Геринг).

1. Среди семейств, гомотопных $(n-1)$ -мерным сферам поверхностей, лежащих в шаре $|x| < 1$ и охватывающих континуумы γ , которые принадлежат шару и содержат точки $x = 0$ и $x_0 \neq 0$, наибольший модуль имеет семейство поверхностей, охватывающих прямолинейный отрезок $[0, x_0]$.

2. Среди всех семейств поверхностей, гомотопных $(n-1)$ -мерным сферам, разделяющих континуумы γ_1 и γ_2 , причем γ_1 содержит $x = 0$ и точку сферы $|x| = r$, $0 < r < 1$, а γ_2 содержит точку сферы $|x| = 1$ и бесконечно удаленную точку, наибольший модуль имеет семейство поверхностей, разделяющих прямолинейный отрезок $[-r, 0]$ и луч $[1, \infty)$.

Лемма 1 приводит к точной оценке растяжения Q -квазиконформного отображения $y = T(x)$, $T(0) = 0$, шара $|x| < 1$ на себя (Б. В. Шабат):

$$v^{-1}\{Q^v(|x|)\} \leq |T(x)| \leq v^{-1}\left\{\frac{1}{Q} v(|x|)\right\}, \quad (162)$$

где $v(r)$ (модуль экстремального семейства леммы 1) — убывающая от бесконечности до нуля функция r , $0 < r < 1$, v^{-1} — обратная v функция.

При $n = 3$ из оценок (162) получаются неравенства

$$\left(\frac{|x|}{18}\right)^Q < |T(x)| < 18|x|^{\frac{1}{Q}}, |T(x_1) - T(x_2)| = K|x_1 - x_2|^{\frac{1}{Q}} \quad (163)$$

для любых точек шара. Здесь $K = K(Q)$ допускает элементарную оценку сверху (Б. В. Шабат, Ф. Геринг).

Лемма 2 приводит к оценке

$$\frac{\max |T(\xi) - T(x)|}{\min |T(\xi) - T(x)|} \leq \mu(Q), \quad (164)$$

где $\max$ и $\min$ берутся по сфере $|\xi - x| = r$, $r < 1 - |x|$, и $\mu(Q)$ допускает элементарную оценку сверху.

Из упомянутых результатов А. И. Маркушевича и результатов (1960 г.) Ю. Г. Решетняка (доказавшего, в частности, что из требования определения I вытекает существование обобщенных производных в смысле С. Л. Соболева 1-го порядка, суммируемых со степенью внутри D , и абсолютная непрерывность отображения $mT(A) = \int_A |I(T)| dx$)

следует, что для гомеоморфизмов из определения I вытекает определение II. Доказано также, что для гомеоморфных отображений из определения II следует определение III. Оценка (164) позволяет из определения III вывести определение I. Таким образом, было установлено важное свойство эквивалентности определений I, II, III³⁵, что способствовало ускорению развития теории, поскольку каждое из этих определений было исходным пунктом в исследованиях и в СССР, и за рубежом. В настоящее время все эти направления объединились.

Наиболее значительные результаты в дальнейшем исследовании свойств пространственных отображений получены в большом цикле работ Ю. Г. Решетняка. Изложим его основные результаты, относящиеся к квазиконформным отображениям.

Пусть T — гомеоморфное Q -квазиконформное отображение области $D \subset E^n$. При $Q = 1$ оно называется конформным. При $n \geq 3$ конформные отображения исчерпываются мебиусовыми преобразованиями (сводятся к конечной комбинации переносов, преобразований подобия и инверсий). Для случая отображений класса S^3 — это классический результат Лиувилля. В указанной здесь общей форме результат принадлежит (1960 г.) Ю. Г. Решетняку.

В 1942 г. М. А. Лаврентьев поставил вопрос об устойчивости теоремы Лиувилля в следующем смысле. Пусть D — шар $|x| < 1$; требуется установить, существует ли универсальная функция $\lambda(\varepsilon)$ такая, что $\lambda(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, и если T — отображение D в себя, квази-

³⁵ Заметим, что в определениях I—III константы квазиконформности одного и того же отображения, вообще говоря, различны и между ними существуют связи лишь в виде двусторонних оценок.

конформное с $Q \leq 1 + \varepsilon$, то найдется мебиусово отображение Φ , для которого

$$|T(x) - \Phi(x)| \leq \lambda(\varepsilon)$$

при всех $x \in D$. М. А. Лаврентьев ответил положительно на этот вопрос, предположив $T \in C^{2,\alpha}$. При этом $\lambda(\varepsilon)$ в его теореме зависит от r , $|x| < r$ (от r зависит и выбор $\Phi(x)$), а также от границ для вторых производных u и v и постоянной в условии Гельдера, которому подчинены вторые производные.

Из оценки (162) следует справедливость теоремы М. А. Лаврентьева для произвольных Q -квазиконформных отображений шара на шар (Б. В. Шабат).

Первые общие результаты по устойчивости теоремы Лиувилля, свободные от ограничений регулярности, получил (1961, 1967 гг.) Ю. Г. Решетняк. Он доказал существование универсальной функции $\mu(\varepsilon, r)$, $0 < r < 1$, такой, что при всяком r $\mu(\varepsilon, r) \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, и для любого ε -квазиконформного отображения шара в себя найдется мебиусово отображение $\Phi(x)$ такое, что $|T(x) - \Phi(x)| \leq \mu(\varepsilon, r)$ для всякого x , $|x| \leq r$. Используя результат (1961 г.) Ю. Г. Решетняка, П. П. Белинский уточнил (1962 г.) его. Пусть $\{y = T(x)\}$ — семейство Q -квазиконформных отображений $|x| < 1$ в E^3 , нормированное в том смысле, что функции семейства оставляют неподвижными такое количество внутренних или граничных точек, которое обеспечивает единственность при конформных отображениях. Тогда а) существует постоянное Q_0 , зависящее от нормировки и размерности пространств, такое, что при $Q < Q_0$ семейство равномерно ограничено и равномерно непрерывно, б) $|T(x) - x| \leq \lambda(\varepsilon)$, где $\varepsilon = Q - 1$ и $\lambda \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, причем λ зависит еще и от нормировки. Точное выражение для λ остается неизвестным. В работе 1964 г. М. А. Лаврентьев сформулировал несколько интересных вариационных задач, связанных с квазиконформными отображениями, и показал, что их решение дало бы возможность найти точное выражение для λ .

Ю. Г. Решетняк показал (1963 г.), что устойчивость в теореме Лиувилля имеет место для значительно более общих классов отображений, чем гомеоморфные квазиконформные классы. Оказалось возможным гарантировать близость (в интегральном смысле) отображений к мебиусову вместе с его производными.

Пусть $\{T\}$ — класс отображений шара $D : |x| < 1$ в себя, которые имеют обобщенные частные производные 1-го порядка в смысле С. Л. Соболева, суммируемые со степенью n , и пусть

$$\int_D \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|^n dx \leq n(1 + \varepsilon)^n \int_D I(T) dx. \quad (165)$$

Тогда существует $\mu(\varepsilon, r)$, $0 < r < 1$, $\mu(\varepsilon, r) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, и для каждого $T \in \{T\}$ найдется мебиусово отображение Φ такое, что

$$\|T - \Phi\|_{W_n^1(D_r)} \leq \mu(\varepsilon, r),$$

где $D_r : |x| < r$.

В работах 1966—1968 гг. Ю. Г. Решетняк изучал неоднолистные квазиконформные отображения в смысле определения II (отображения с ограниченным искажением, по терминологии Ю. Г. Решетняка). Он доказал, что для любой компактной подобласти D_1 области D при $x', x'' \in D_1$ выполняется неравенство

$$|T(x') - T(x'')| \leq M_1 |x' - x''|^\alpha, \quad (166)$$

где M_1 — постоянная, зависящая от $\rho(D_1, \partial D)$ и $\left\| \frac{\partial T}{\partial x} \right\|_{L^n(D_1)}$, α зависит только от $K = K(T)$ в неравенстве (161), $\alpha(K) \rightarrow 1$ при $K \rightarrow 1$, и если $K = 1$, то отображение мебиусово.

В. М. Миклюков получил (1968 г.) следующую оценку для любой компактной подобласти $D_1 \subset D$:

$$\left\| \frac{\partial T(x)}{\partial x} \right\|_{L^n(D_1)} \leq M_2 \|f_j(x)\|_{L^n(D)}, \quad (167)$$

где M_2 — постоянная, зависящая только от K и $\rho(D_1, \partial D)$, а f_j — одна из компонент (любая) вектор-функции $T(x)$. Этой оценкой в совокупности с неравенством (166) устанавливается равностепенная непрерывность по Гельдеру неоднолистных квазиконформных отображений.

Основные результаты Ю. Г. Решетняка об отображениях с ограниченным искажением относятся к исследованию топологических свойств этих отображений.

Пусть T отображает множество $U \subset E^n$ в E^n и удовлетворяет требованиям определения II. Тогда для всякой компактной подобласти D множества U и любой точки $y \in E^n$, не принадлежащей образу границы области D , степень $\mu(y, T, D)$ отображения T в D относительно y неотрицательна. Величина $\mu(y, T, D)$ как функция переменной y ограничена для всякой компактной области $D \subset U$. Доказательство последнего составляет главную трудность в исследовании. Полный прообраз всякого множества нулевой логарифмической емкости при отображении T есть снова множество нулевой логарифмической емкости. Отображение T изолированно, т. е. для каждой точки $y \in E^n$ все точки множества изолированы. Для всех компактных областей D , имеющих точку x своей внутренней точкой и лежащих в некоторой окрестности точки x , величина $\mu[T(x), T, D]$ имеет одно и то же значение. Это общее значение называется индексом отображения T в точке x и обозначается $j(x, T)$, причем $j(x, T) \geq 1$ в любой точке $x \in U$. Величина $\mu(y, T, D)$ равна сумме индексов во всех точках прообраза точки y , лежащих в D . Точки, где $j(x, T) > 1$, являются своего рода аналогом нулей производной и называются точками ветвления отображения T .



Ю. Г. Решетняк.



Ю. Ю. Трохимчук.

Множество точек ветвления, в силу теоремы А. В. Чернавского, $(n - 2)$ -мерно.

Ю. Г. Решетняку принадлежит также ряд теорем о предельном переходе для отображений с ограниченным искажением. Основным математическим аппаратом во всех этих исследованиях является представление отображений с ограниченным искажением как экстремалей некоторых функционалов вида

$$\int_D \left(\sum_{i,j=1}^n \theta_{ij}(x) U_{x_j x_i} \right)^{\frac{n}{2}} dx,$$

где θ_{ij} таковы, что

$$\alpha |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \theta_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \frac{|\xi|^2}{\alpha},$$

$$\alpha = \text{const}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Для этих же отображений Ю. Г. Решетняк доказал теорему единственности, аналогичную теоремам единственности в теории плоских квазиконформных отображений, и устойчивость ее (аналогичную устойчивости теоремы Лиувилля).

Известные теоремы Д. Е. Меньшова о конформных отображениях были перенесены Ю. Ю. Трохимчуком с однолистных функций на произвольные направления. В качестве примера приведем следующую теорему: если непрерывная функция $f(z)$ имеет в каждой точке области D производную $f'(z)$ лишь вдоль двух линейно независимых направлений (для различных точек, никак не связанных между собой), то $f(z)$ аналитическая всюду в D .

Доказательства подобных теорем нуждались в некоторой топологической характеристике определенного класса непрерывных отображений. Подобная характеристика тем более необходима при распространении этих теорем на случай пространства R^n , $n > 2$. Исследованиями в этом направлении и занимался Ю. Ю. Трохимчук. Но лишь после получения А. В. Чернавским результатов по конечным открытым отображениям многообразий (потребовавшим гомологических средств) удалось найти такую характеристику и распространить указанные теоремы Меньшова на случай R^n , $n > 2$.

Согласно классической теореме Лиувилля в пространстве R^n , $n > 2$, конформные отображения сводятся к линейным преобразованиям, представляющим собой суперпозицию преобразований подобия, сдвига и инверсии. Различные обобщения этой теоремы в предположении гомотопности данного отображения получены М. А. Лаврентьевым, Ю. Г. Решетняком и др. Отбрасывая условие гомотопности и максимально ослабляя остальные условия, а также используя результаты

А. В. Чернавского, Ю. Ю. Трохимчук переносит теоремы Д. Е. Меншова на пространство R^n , $n > 2$, получая тем самым и обобщения теоремы Лиувилля.

В исследованиях других математиков основную роль играет теория модулей, ее различные варианты и обобщения. Ряд работ специально посвящен этой теории, например работы А. В. Сычева и И. П. Митюка.

А. В. Сычев получил также результаты, относящиеся к граничным и другим свойствам квазиконформных отображений, в частности результат (1966 г.), уточняющий неравенство (163): для произвольного Q -квазиконформного отображения T , $T(0) = 0$, шара $|x| < 1$ на себя

$$4^{-Q} |x|^Q \leq |T(x)| \leq 4^{1-\frac{1}{Q}} |x|^{\frac{1}{Q}}$$

(оценка точная).

На основе понятия модуля семейства поверхностей Б. В. Шабата И. П. Митюк ввел (1964 г.) понятие приводимого модуля в пространстве.

Пусть $D \in E^3$ — область произвольной связности, Γ — отмеченная ее граничная компонента. Пусть шар $|x - x_0| < t \leq \bar{t}$ лежит в области D . Обозначим: $\{|x - x_0| \geq t\} \cap D = D^t$, $\{|x - x_0| = t\} = \Gamma_t$. Модуль семейства $\{S_t\}$ замкнутых квадрируемых поверхностей S , лежащих в D^t и отделяющих точку $x = x_0$ от Γ , обозначим $m(\Gamma_t, \Gamma, D)$. Приведенным модулем D относительно $x = x_0$ и Γ И. П. Митюк называет величину

$$m(x_0, \Gamma, D) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[m(\Gamma_t, \Gamma, D) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \ln t \right].$$

Здесь изучены свойства приведенного модуля. В другой работе И. П. Митюк показал применение этого понятия для изучения свойств пространственных Q -квазиконформных отображений. В частности, получил обобщение на пространственный случай известной теоремы Кебе о покрытии. Теоремы о покрытии для пространственных (и плоских) квазиконформных отображений получены (1965 г.) также Т. Аргировой.

Методом модулей Б. В. Шабат доказал (1960 г.) следующую теорему.

Пусть α_j ($j = 1, 2, 3$) — углы, образованные вектором $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ с полуосями эллипсоидов $a \geq b > c$, которые преобразуются в сферы главной линейной частью отображения $y = T(x)$ в точке x ; пусть $q_1 = \frac{a}{c}$, $q_2 = \frac{b}{c}$ и

$$m(x) = \left\{ \left(\frac{q_1^2}{q_2} \right)^{\frac{2}{3}} \cos^2 \alpha_1 + \left(\frac{q_2^2}{q_1} \right)^{\frac{2}{3}} \cos^2 \alpha_2 + \left(\frac{1}{q_1 q_2} \right)^{\frac{2}{3}} \cos^2 \alpha_3 \right\}^{\frac{3}{4}}.$$

Тогда, если для гомеоморфного отображения T пространства E^3 в каждой точке имеет смысл величина $m(x)$ и

$$\int \frac{dr}{rm(r)} = \infty,$$

где $m(r) = \max_{|x|=r} m(x)$, образом E^3 является все пространство E^3 .

Заметим, что указанный интеграл расходится для Q -квазиконформных отображений, значит, этот результат обобщает результат М. А. Лаврентьева. Однако полное решение вопроса (также с помощью теории модулей) принадлежит ученику Б. В. Шабата В. А. Зоричу, доказавшему (1967 г.) теорему в следующей, по-видимому окончательной, форме. Если T — локально гомеоморфное квазиконформное отображение пространства E^3 в себя, то T — гомеоморфизм и притом на все E^3 .

Э. Кэллендер, Ф. Геринг, Ю. Вьясала и В. А. Зорич доказали (1961 г.), что Q -квазиконформное отображение трехмерного шара на себя всегда продолжаемо до гомеоморфизма замкнутых шаров. Другим методом и для более общего класса отображений этот же результат был получен (1964 г.) И. С. Овчинниковым и Г. Д. Суворовым и распространен (1965 г.) на n -мерный случай И. С. Овчинниковым (см. § 5).

Индукированное соответствие граничных сфер при квазиконформных отображениях также оказывается Q -квазиконформным, поэтому множество точек сферы меры нуль переходит в множество точек меры нуль. В этом смысле известный для плоского случая факт существования Q -квазиконформных отображений круга на себя, не абсолютно непрерывных на границе, в пространстве не имеет места.

В. А. Зорич полностью решил (1962 г.) вопрос о соответствии границ при Q -квазиконформных гомеоморфных отображениях шара, построив некоторым специальным способом, приспособленным к рассмотрению квазиконформных отображений, аналог теории простых концов Каратеодори для пространственных областей. Он ввел граничные элементы в областях так, что для любого гомеоморфного Q -квазиконформного отображения шара на область D между граничными элементами D и точками границы шара устанавливается взаимно однозначное соответствие и отображение продолжаемо до гомеоморфизма замкнутых областей.

В. А. Зоричу принадлежит также следующая теорема об угловых граничных значениях (1967 г.).

Пусть $D \subset E^n$ — открытый шар, S — его граница, $y = T(x)$ — квазиконформное отображение D , A — множество точек S , в которых T имеет угловые граничные значения, $\overline{\text{Cap}}_\alpha E$ — внешняя α -емкость E . Тогда

$$\begin{aligned} \overline{\text{Cap}}_0 (S \setminus A) &= 0 && \text{при } n = 2, \\ \overline{\text{Cap}}_\alpha (S \setminus A) &= 0 && \text{при } n > 2 \text{ и любом } \alpha > 0. \end{aligned}$$

При $n = 2$ — это известная теорема Берлинга, в случае $n > 2$ утверждение равносильно утверждению о том, что множество $S \setminus A$ имеет метрическую размерность нуль.

В одной из работ (1964 г.) С. Л. Крушкаль изучает классы отображений, «квазиконформных в среднем». Пусть D и $\Delta \in E_n$ — ограниченные области, $Q_{m,n}(k)$ — класс топологических отображений $\{T\}$ области D на Δ с обобщенными в смысле С. Л. Соболева первыми частными производными, суммируемыми в D со степенью n , для которых

$$\frac{1}{m\Delta} \int_D \left\{ \frac{[\lambda(x, T)]^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2} I(T)} \right\}^m I(T) dx \leq k^m, \quad m \geq 1,$$

где

$$\lambda(x, T) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)^2,$$

$I(T)$ — якобиан, $I \geq 0$ в D . Замыкание класса $Q_{m,n}(k)$ относительно равномерной сходимости внутри D обозначается $\overline{Q_{m,n}(k)}$ (если $n = 2$, D и Δ — единичные круги, получаются известные классы Л. Альфорса). Изучаются свойства отображений $T \in \overline{Q_{m,n}(k)}$, $n \geq 2$. В частности, устанавливается равностепенная непрерывность отображений, измеримость открытых отображений, близость к конформным отображениям при $k = 1 + \varepsilon$ и т. п. Рассмотренные классы являются в некотором смысле промежуточными между классом квазиконформных отображений и классом отображений с ограниченными интегралами Дирихле (см. § 5).

А. П. Копылов обобщил понятие плоского квазиконформного отображения на случай отображений плоских областей в E^3 и получил с помощью этого понятия характеристику поведения пространственных квазиконформных отображений на плоских сечениях областей определения (1966 г.). Он обобщил пример П. П. Белинского для плоского случая на пространственный случай: для любого $Q > 1$ существует Q -квазиконформное отображение шара $|x| < 1$ на себя, переводящее его диаметрально сечение $|x| < 1$, $x_3 = 0$, в неквадрируемую по Лебегу ни в какой своей части поверхность.

В другой своей работе (1966 г.) А. П. Копылов показал, что сохраняющее углы для лучей гомеоморфное отображение области $D \subset E^3$ в E^3 является мебиусовым отображением этой области.

В работе 1967 г. А. П. Копылов доказал теорему, характеризующую в некотором смысле объем класса пространственных квазиконформных отображений.

Пусть (H, ρ) — пространство всех ограниченных гомеоморфных образов единичного шара в E^3 с метрикой

$$\rho(D_1, D_2) = \max \left\{ \sup_{x \in D_1} \inf_{y \in D_2} |x - y|, \sup_{x \in D_2} \inf_{y \in D_1} |y - x| \right\},$$

где $D_i \in (H, \rho)$, $CD = E^3 \setminus D$. Тогда подмножество $G \subset (H, \rho)$, состоящее из областей, допускающих квазиконформное отображение на шар, является всюду плотным F_σ -множеством первой категории в (H, ρ) .

В связи с тем что в пространстве задача о квазиконформном отображении двух наперед заданных гомеоморфных областей D и Δ друг на друга, вообще говоря, неразрешима, для выделения конкретного отображения следует использовать не краевые задачи системы дифференциальных уравнений, а другие способы. Поэтому естественно возникает вопрос: если отображение D на Δ возможно, то с каким наименьшим Q ? Появляется своеобразная теория экстремальных квазиконформных отображений. В этом направлении выполнено уже много работ в СССР (А. В. Сычев, В. В. Кривов и др.) и за рубежом.

Таким образом, теория пространственных квазиконформных отображений за сравнительно короткий срок стала достаточно развитой теорией со своей проблематикой и методами исследования. В развитие этой теории советские математики внесли фундаментальный вклад.

5

Метрические свойства плоских и пространственных отображений с ограниченным интегралом Дирихле

Рассмотрим работы Г. Д. Суворова и его учеников (1956—1967 гг.) по исследованию плоских и пространственных отображений некоторых классов, являющихся прямыми обобщениями класса отображений с ограниченным искажением. В этих работах авторы исходят из идеи М. А. Лаврентьева об использовании «относительных» расстояний в замкнутых областях и оценки их искажений (у М. А. Лаврентьева — для конформных) и возможности использования оценки длины отображения дуги кривой (или колебания функции) с помощью интеграла Дирихле для изучения не только конформных и квазиконформных, но и более общих отображений.

Исследуются преимущественно метрические свойства отображений в «замкнутых» областях. Первым является вопрос о продолжении отображения на границу, в частности о соответствии границ, если отображение гомеоморфно. Он имеет два аспекта: топологический (введение граничных элементов в области) и метрический (действительно ли для данного отображения соответствие границ осуществляется по а priori введенным граничным элементам). Рассматривается в основном задача о выделении тех классов отображений, для которых в допустимых парах областей (в областях, отображаемых друг на друга функциями данного класса) возможно единообразное введение граничных элементов так, чтобы соответствие границ в пределах класса осуществлялось именно по этим элементам. Значит, нужно согласованное введение объекта: класса отображений и граничных элементов в допустимых областях. Такая согласованность достигается, если для конкретного класса отображений удастся реализовать следующее построение.

Пусть D — область произвольного компакта (M, r) (M — множество элементов, r — расстояние), Δ — область другого компакта (N, ρ) и $T(D) = \Delta$ — гомеоморфизм. В D вводим новое (относительное) расстояние r_D , в Δ — расстояние ρ_Δ , причем так, чтобы r_D и ρ_Δ были эквивалентны в малом соответственно метрикам r и ρ . Пусть $\tilde{D}$ — пополнение D по r_D , $\tilde{\Delta}$ — пополнение Δ по ρ_Δ . Присоединяемые к D и Δ «граничные» элементы суть классы эквивалентных фундаментальных последовательностей в пространствах (D, r_0) и (Δ, ρ_0) . Если известны функции $\varphi_j(\alpha)$ ($j = 1, 2$), $\varphi_j \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$ монотонно, такие, что для любых достаточно близких по r_D точек $x', x'' \in D$

$$\varphi_1[r_D(x', x'')] \leq \rho_\Delta[T(x'), T(x'')] \leq \varphi_2[r_D(x', x'')], \quad (168)$$

то, очевидно, T можно продолжить до гомеоморфизма $T(\tilde{D}) = \tilde{\Delta}$ и (168) будет справедливо также в замкнутых областях $\tilde{D}$ и $\tilde{\Delta}$.

Двусторонняя оценка (168), в особенности если φ_j и «интервал», на котором она верна, одни и те же для некоторого класса отображений, содержит информацию, достаточную для выявления основных метрических свойств рассматриваемого класса отображений. Поэтому поиски «согласованных» объектов, для которых справедливо (168) или хотя бы односторонняя оценка, являются основной задачей в описываемых исследованиях.

Приведем определения изучаемых классов отображений.

Пусть E^n — n -мерное евклидово пространство в прямоугольной системе координат $(x): x = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $y = T(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ — отображение области $D \subset E^n$ в E^n . T принадлежит к классу $BL_k^{\frac{n}{2}}$ в D относительно (x) , $T \in BL_k^{\frac{n}{2}}$, если f_j непрерывны в D , имеют обобщенные частные производные 1-го порядка на всем x_i в смысле С. Л. Соболева и для любой замкнутой ограниченной подобласти $\bar{D}_1 \subset D$

$$\int_{\bar{D}_1} \lambda^{\frac{n}{2}}(x, T) dx < k < \infty,$$

где

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)^2, \quad dx = dx_1 \dots dx_n.$$

$BL^{\frac{n}{2}}$ — объединение классов $BL_k^{\frac{n}{2}}$. При $n = 2$ получаем соответственно классы BL_k и BL . Наконец, если $n = 2$, отображение $w = T(z) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$, $z = x + iy$, принадлежит к классу BL внутри D и

$$I\left(T, D; \frac{1}{2}\right) = \int_D \int \frac{\sum_{j=1}^n \text{grad}^2 f_j}{(1 + |T|^2)^2} dx dy \leq k,$$

получаем класс $\widetilde{BL}_k$. Объединение классов $\widetilde{BL}_k$ — класс $\widetilde{BL}$. Классы $\widetilde{BL}_k^{\frac{n}{2}}$, BL_k и $\widetilde{BL}_k$ замкнуты относительно равномерной сходимости внутри области (Г. Д. Суворов, М. В. Бакланов, 1965 г.).

В плоском случае метод получения оценок вида (168) основан при $T \in \widetilde{BL}$ в D на неравенстве

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} L_{\frac{1}{2}}^2 [T(\Gamma_t)] \frac{dt}{t} \leq 2\pi I \left(T, D; \frac{1}{2} \right), \quad (169)$$

где Γ_t — дуга окружности радиуса t с общим центром, принадлежащая D , с концами, может быть, на границе D . В плоскости z рассматривается сферическая метрика, которая получается стереографическим проектированием плоскости на сферу Римана радиуса $\frac{1}{2}$, касающуюся плоскости в начале координат. Такая же метрика и в плоскости w . Так что центр и радиус окружностей в (169) понимается в сферическом смысле. $L_{\frac{1}{2}}$ — длина кривой в сферической метрике. Если $T \in BL$, то (169) записывается в евклидовой метрике (в $I \left(T, D; \frac{1}{2} \right)$ знаменатель под интегралом тогда равен единице).

Компакты (M, r) , (N, ρ) — теперь плоскости, замкнутые бесконечностью, допустимые области — произвольные односвязные области с границами, содержащими более одной точки. $\{T\}$ — класс $\widetilde{BL}$ (или BL), причем обратные отображения предполагаются принадлежащими к тому же классу, r_D (и ρ_Δ) — относительные расстояния, вводимые на основе сферической или евклидовой метрики следующим образом.

Пусть односвязная область D содержит точку 0 , $x', x'' \in D \setminus 0$. Тогда

$$r_D(x', x'') = \inf d(K), \quad (170)$$

где d — евклидов диаметр множества (или сферический диаметр), $\inf$ берется по всевозможным относительным континуумам $K \subset D \setminus 0$, удовлетворяющим условиям а) $\bar{K} \ni 0$, б) $K \ni (x' \cup x'')$, или, если $K \ni (x' \cup x'')$, то $\bar{K} \cap \partial D$ непустое (∂D — граница D) и принадлежит той компоненте множества $D \setminus K$, которая не содержит точек x' и x'' . Расстояние (170) оказывается метрическим. Пополнение $D \setminus 0$ по расстоянию (170) присоединяет точку 0 и «граничные элементы» — классы эквивалентных фундаментальных последовательностей в $D \setminus 0$, не сходящихся в $D \setminus 0$. В плоском случае они отождествляются с простыми концами Каратеодори. Функции φ_j в (168) определяются так:

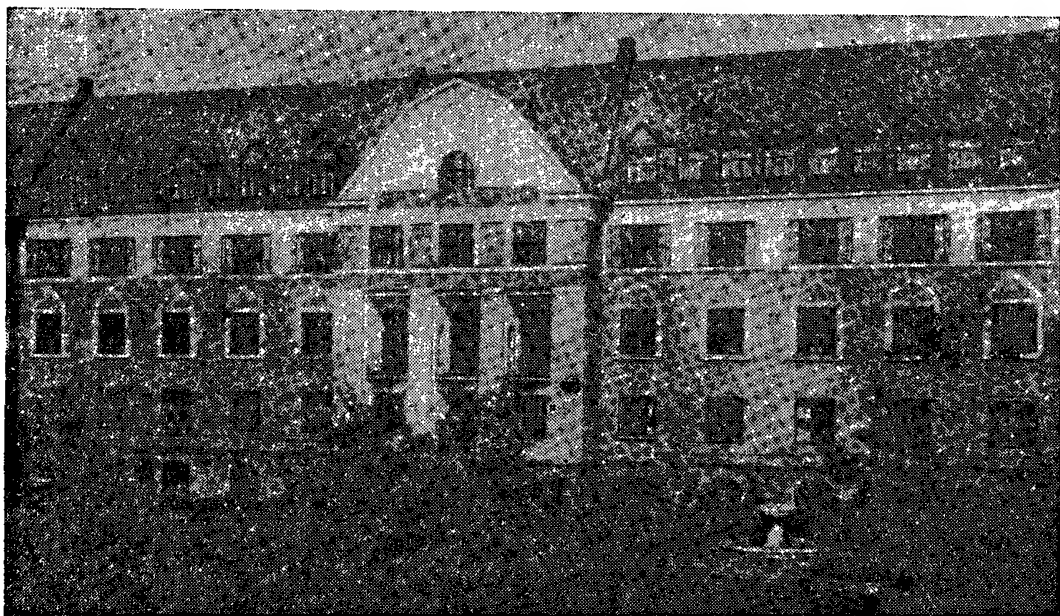
$\varphi_2(\alpha) = A \ln^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\alpha}$, $\varphi_1(\alpha) \equiv \varphi_2^{-1}$. A — константа в случае классов $\widetilde{BL}_k$ и BL_k , т. е. φ_j — одни и те же для всех отображений класса. Не зависит от отображения и интервал, на котором справедливы оценки (168),

т. е. для классов $\overline{BL}_h$ и BL_h при некоторых естественных дополнительных условиях нормировки оценки носят равностепенный характер (Г. Д. Суворов, 1956, 1958, 1965 гг.).

Заметим, что если D и Δ — единичные круги, то относительные расстояния можно заменить обычными евклидовыми и получается оценка, совпадающая с первоначальной оценкой М. А. Лаврентьева для Q -квазиконформных отображений (§ 1) и, в отличие от его случая, неулучшаемая в смысле порядка.

Оценки (140) для указанных классов позволяют оценивать порядки равностепенной равномерной непрерывности и открытости в замкнутых областях по относительным метрикам, порядки равномерной непрерывности покрытости внутри областей — в терминах сферических или евклидовых расстояний. Оцениваются искажения множеств уровня расстояний r_D и r до границы области, искажение площадей пограничных колец, граничных дуг и др.

Рассмотренные классы содержат конформные, квазиконформные и существенно более общие отображения, причем большинство имеющихся результатов до сих пор не получено иными методами даже для конформных отображений. Результаты распространены на случай отображений конечносвязных областей (В. Н. Лукин, 1966 г.), а некоторые из них — и на бесконечно связные области (В. П. Луфференко, В. М. Миклюков, 1968 г.). Аналогичное исследование проведено для случая, когда компакты — ограниченная часть плоскости Лобачевского, r и ρ — гиперболические расстояния, а r_D и ρ_Δ вводятся на их основе (М. В. Бакланов, Г. Д. Суворов, 1965 г.). Рассмотрен также один общий класс отображений, для которого соответствие границ носит более общий характер (не по простым концам; М. В. Бакланов, 1966 г.).



Пермский государственный университет им А. М. Горького.

Полученные результаты выявляют основные метрические свойства отображений. Например, свойства равностепенной непрерывности и открытости внутри областей приводят к достаточному условию существования связи между равномерной сходимостью последовательности отображений внутри области и сходимостью к ядру (в смысле Каратеодори) последовательности областей — образов, связи, вполне аналогичной той, которая имеется в случае конформных отображений (теорема Каратеодори). Еще один пример: свойства равностепенной равномерной непрерывности и открытости отображений в замкнутых областях обеспечивают решение вопроса о соответствии границ при отображениях областей с переменными границами, а именно применимость теории простых концов последовательности областей, сходящейся к невырожденному ядру (развитой сначала для конформных отображений), и к отображениям класса $\widetilde{BL}_k$, если и $T^{-1} \in \widetilde{BL}_k$, что позволяет решать задачи о сходимости последовательностей таких отображений (Г. Д. Суворов, 1953—1964 гг.). Основные результаты для плоского случая, полученные до 1961 г., изложены в книге Г. Д. Суворова «Семейства плоских топологических отображений» (1965 г.).

Приведем еще один результат (Г. Д. Суворов, 1968 г.), обобщающий теорему устойчивости М. А. Лаврентьева (§ 1,1). Пусть $\{T\}$ — семейство отображений односвязных областей $\{\tilde{D}_T\}$ на области $\{\tilde{\Delta}_T\}$, $T(\tilde{D}_T) = \tilde{\Delta}_T$, $T(0) = 0$, T и T^{-1} принадлежат $\widetilde{BL}_k$ и пусть для $T = u + iv \in \{T\}$

$$\int_{D_T} \frac{(u_x \mp v_y)^2 + (u_y \pm v_x)^2}{(1 + |T|^2)^2} dx dy \leq \varepsilon,$$

где знаки выбираются верхние (нижние), если T сохраняет (меняет) ориентацию. Семейства $\{D_T\}$ и $\{\Delta_T\}$ имеют невырожденные ядра относительно точки 0, и сферические диаметры границ всех областей обоих семейств ограничены снизу одним и тем же положительным числом. В каждой области D_T фиксируется по одному простому концу e^{D_T} и рассматривается семейство $\{\Phi_T\}$ конформных отображений первого или второго рода $\Phi_T(\tilde{D}_T) = \tilde{\Delta}_T$, $\Phi_T(0) = 0$, $\Phi_T(e^{D_T}) = T(e^{D_T})$, ориентированных так же, как и соответствующие T . Тогда существуют функции $\lambda_j(\varepsilon)$, $\lambda_j \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($j = 1, 2$), такие, что для всех $T \in \{T\}$

$$\rho_{\tilde{\Delta}_T}[T(e), \Phi_T(e)] \leq \lambda_1(\varepsilon), \quad r_{\tilde{D}_T}[T^{-1}(e), \Phi_T^{-1}(e)] \leq \lambda_2(\varepsilon),$$

причем оба неравенства справедливы в замкнутых (простыми концами) областях. Результат нов и для класса Q -квазиконформных отображений. Аналогично обобщена также вторая теорема М. А. Лаврентьева (см. § 1).

Выше отмечалось, что в основе метода получения оценок вида (168) лежит неравенство (169). Поиски различных его уточнений, обобщений

и вариантов важны, поскольку новые неравенства обогащают возможности метода. Таких обобщений и уточнений известно уже много (Г. Д. Суворов, И. С. Овчинников, Б. П. Куфарев, В. М. Миклюков).

Неравенство, полученное (1968 г.) В. М. Миклюковым, позволяет существенно расширить область применения данной теории. Для введенных им классов отображений, используя его неравенство, можно получить оценки (168) с функциями φ_j достаточно произвольного вида, в то время как для отображений класса $\widetilde{BL}_h$ вид этих функций вполне конкретен, произвол φ_j — следствие определенного произвола в выборе самих классов, при этом оценки точны в смысле порядка (для отображений класса $\widetilde{BL}_h$ это впервые отмечено И. С. Овчинниковым).

Глубокие исследования свойств типа свойств абсолютной непрерывности отображений рассматриваемых классов и их далеко идущих обобщений принадлежат Б. П. Куфареву (работы 1963—1968 гг.). Они основаны на его обобщениях неравенства (169). Изучены метрические свойства отображений на различных семействах кривых, замещающих отображаемые области.

Известно, что уже для Q -квазиконформных отображений круга на круг их продолжения на границу не обязательно абсолютно непрерывны на граничной окружности. Поэтому для таких и более общих отображений интересно выделить те множества простых концов или других каких-либо граничных образований области, которые при отображении области, например, на круг переходили бы в множество лебеговой меры нуль на окружности.

Первый результат такого типа для отображений класса $\widetilde{BL} (T^{-1} \in \widetilde{BL})$ был получен (1963 г.) Г. Д. Суворовым исходя из (169). Б. П. Куфарев с помощью своих неравенств далеко продвинул решение вопроса для весьма широких классов отображений и различных метрик, причем результаты иногда получаются для совершенно произвольных (в смысле связности) областей.

Метод исследования, а также решенные задачи в плоском случае послужили образцом для поисков аналогов в случае пространственных отображений. Этот метод применим также для изучения неоднолистных плоских отображений, например монотонных или внутренних.

Рассмотрим результаты, полученные для пространственного случая.

Пусть $T \in BL^{\frac{n}{2}}$ в $D \subset E^n$, $\{S_t\}$ — семейство концентрических сфер в E^n с центром a , $a < \tau_1 \leq t \leq \tau_2$, и для этого семейства множества $S'_t = S \cap D$ непустые. Обозначим K_t открытый сферический круг сферического радиуса $R(t) \leq \frac{\pi t}{2}$, $K_t \subset S'_t$. Предположим, что на $[\tau_1, \tau_2]$ определены измеримые функции $\Omega(t)$ и $\beta(t)$ такие, что для почти всех t $\Omega \leq \omega(K_t, T)$, $\beta(t) \geq \frac{2R(t)}{\pi t}$, где ω — колебание T

на K_t ; тогда

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\Omega^n(t)}{t^{\beta}(t)} dt \leq M_n \int_{D_{\tau_1, \tau_2}} \lambda^{\frac{n}{2}}(x, T) dx, \quad (171)$$

где $D_{\tau_1, \tau_2} = \bigcup_{t \in [\tau_1, \tau_2]} S_t$ и M_n — константа, зависящая только от n .

Неравенство (171), аналог (169), вместе с его вариантами и обобщениями, положено в основу метода.

Сначала был рассмотрен случай $n = 3$ (И. С. Овчинников, Г. Д. Суворов, 1965 г.), затем результаты были перенесены на случай $n > 3$ (И. С. Овчинников). Изложим кратко эти результаты в той общности, которую им придал И. С. Овчинников.

Получена оценка сверху искажения евклидова расстояния внутри произвольных областей для монотонных отображений класса $BL^{\frac{n}{2}}$.

Для класса $B_k^{\frac{n}{2}}$ эта оценка носит равностепенный характер, следовательно, определяется порядок равностепенной непрерывности внутри области этого класса отображений. Рассмотрены вопросы компактности, в частности, установлена нормальность класса. Доказано, что не

существует монотонных отображений класса $BL^{\frac{n}{2}}$, отличных от константы, заданных во всем пространстве E^n (аналог теоремы Лиувилля), и что изолированные особенности гомеоморфизмов этого класса всегда устранимы так, что, например, n -мерный шар с выброшенным центром нельзя гомеоморфно отобразить на область E^n , граница которой состоит из компонент, отличных от точек. Найден порядок роста отображений для случая монотонных отображений шара.

В плане реализации общей схемы исследования, изложенной в начале параграфа, доказана теорема: если $y = T(x)$ — гомеоморфизм

класса $BL^{\frac{n}{2}}$ шара $D: |x| < 1$ на Δ , $T(0) = 0$, то T можно доопределить до непрерывного в $\bar{D}$ так, что $T(\bar{D}) = \tilde{\Delta}$ и каждой точке $x \in \bar{D} \setminus D$ при отображении T соответствует единственный граничный элемент области Δ , причем если $x', x'' \in \bar{D}$ и $0 < |x' - x''| < \frac{1}{2}$, то

$$\rho_{\tilde{\Delta}}[T(x'), T(x'')] < \Phi_2(|x' - x''|), \text{ где } \Phi_2(\alpha) = [4M_n \int_D \lambda^{\frac{n}{2}}(x, T) \times \\ \times dx]^{\frac{1}{n}} \ln^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2\alpha} \text{ и } \rho_{\tilde{\Delta}} \text{ определено по (170).}$$

Следовательно, для отображений класса $BL_k^{\frac{n}{2}}$ оценка носит равностепенный характер. Отсюда же следует, что необходимым условием возможности отображения шара на область с помощью гомеоморфного отображения класса $BL^{\frac{n}{2}}$ является компактность пополнения области по

относительному расстоянию. Это простое замечание позволяет легко строить примеры областей, гомеоморфных шару, на которые шар не отобра-

жим, с помощью гомеоморфизмов класса $BL^{\frac{n}{2}}$ (значит, и с помощью Q -квазиконформных отображений). Следствием теоремы является и двусторонняя оценка типа (168) искажения евклидовых расстояний при отображениях двух шаров друг на друга, так что гомеоморфизм T ,

$T^{-1} \in BL^{\frac{n}{2}}$, шара на шар доопределяется до гомеоморфизма замкнутых шаров.

Примеры И. С. Овчинникова и В. М. Миклюкова показывают, что нетривиальная оценка снизу и сверху искажения относительных

расстояний при гомеоморфизмах класса $BL^{\frac{n}{2}}$ замкнутых жордановых областей невозможна. Следовательно, результат о гомеоморфизме шара, упомянутый выше, нельзя распространить даже на гомеоморфизмы жордановых областей. Эти же примеры показывают, что такие гомеомор-

физмы класса $BL^{\frac{n}{2}}$ не осуществляют граничного соответствия по точкам, а это в свою очередь свидетельствует о существенном отличии пространственного случая от плоского, а также случая пространствен-

ных отображений класса $BL^{\frac{n}{2}}$ от случая пространственных Q -квазиконформных отображений. В. М. Миклюков построил пример двух гомео-

морфных отображений класса $BL^{\frac{n}{2}}$ шара на одну и ту же жорданову область Δ таких, что полным прообразом некоторой точки $y_0 \in \partial\Delta$ является в одном случае единственная точка, в другом — целый континуум на границе шара. Пример показывает, что можно ввести в допустимых областях граничные элементы α и β , тем самым результаты, относящиеся к выяснению общего характера соответствия границ при

топологических отображениях класса $BL^{\frac{n}{2}}$, оказываются вполне законченными.

Как и в плоском случае, в областях пространства E^n можно ввести простые концы по аналогии с теорией Каратеодори для плоского случая. Однако сразу же ясно, что пополнения областей такими граничными элементами в общем случае не будут компактными. Это и привело к тому, что в пространственном случае схема Каратеодори была забракована (Кауфман). Тем не менее И. С. Овчинников провел (1966 г.) такое построение и показал, что для некоторого класса областей (в него входят, например, все односвязные ограниченные области, компактные по относительному расстоянию) это пополнение оказывается компактным и простые концы можно отождествлять с граничными элементами по относительному расстоянию.

В отличие от плоского случая, оказалось, что в областях, гомеоморфных шару и компактных по относительному расстоянию, могут быть простые концы «пятого типа» (у Каратеодори в плоском случае —

4 типа простых концов), которые имеют несвязное замкнутое множество главных точек. Класс областей, имеющих такие простые концы, довольно широк, однако области этого класса не могут быть гомеоморфизмами

шара класса $BL^{\frac{n}{2}}$, поскольку, как показал И. С. Овчинников, при таких гомеоморфизмах предельное множество по любому некасательному пути в шаре, идущему в граничную точку A , совпадает с множеством главных точек простого конца $e = T(A)$ (аналог теоремы Линделефа). Получены также другие признаки областей, компактных по относительному расстоянию и не являющихся гомеоморфизмами шара класса

$BL^{\frac{n}{2}}$. Такими областями являются, например, области, которые имеют простой конец, разбивающий границу области, и не имеют достижимых точек (В. А. Жуков, В. М. Миклюков). Замечено, что если простой конец разбивает границу области на две компоненты, то возможность или невозможность гомеоморфного отображения T шара на такую область

$T, T^{-1} \in BL^{\frac{3}{2}}$, зависит от порядка касания этих компонент (А. М. Лапко, И. С. Овчинников).

Для монотонных отображений класса $BL^{\frac{3}{2}}$ с непрерывными производными 1-го порядка В. М. Миклюков доказал (1966 г.), что если отображение T шара имеет предельное значение в точке границы вдоль некоторого пути, то оно имеет это же значение и в качестве углового граничного значения, и что T почти всюду на границе шара имеет конечные угловые граничные значения. Затем (1967 г.) он усилил второй результат: аналогичное заключение установлено для монотонных отображений

класса $BL^{\frac{3}{2}}$ и даже для более общих отображений.

Выше отмечалось, что построение гомеоморфных отображений класса $BL^{\frac{n}{2}}$, приводящее к оценкам (168), реализовать нельзя, если стремиться получить такие оценки (168), чтобы содержательно решился и вопрос о соответствии границ, поскольку он в этом плане вообще не может быть решен. Между тем многие результаты метрического характера можно получить лишь при наличии двусторонних оценок (например, аналог теоремы Каратеодори о последовательностях отображений). Однако остается произвол в выборе относительных расстояний. Этим воспользовался И. С. Овчинников. Он определил (1965 г.) новое относительное расстояние, пополнение по которому превращает произвольную область в компакт, при этом вся граница области $\tilde{D} \setminus D$ оказывается единственной точкой в новой метрике и эту «точку» можно отождествить с обычной границей области. Приведем некоторые следствия этого построения.

Для нового расстояния оказываются возможными оценки вида (168), причем для отображений класса $BL_k^{\frac{n}{2}}$ (T^{-1} тоже принадлежит $BL_k^{\frac{n}{2}}$) оценки (168) равностепенные. Конечно, заключение о соответствии гра-

ниц при отображениях, вытекающее из этих оценок, тривиально: обычная граница переходит в обычную границу и только; поскольку оценки (168) верны вплоть до границы, можно оценивать скорость приближения к границе области точки-образа в зависимости от скорости приближения к границе области точки-прообраза. Это позволяет установить

существенные метрические свойства классов $BL_k^{\frac{n}{2}}$ и $BL^{\frac{n}{2}}$, следуя методике плоского случая. Получены двусторонние оценки искажения множеств уровня по относительному и евклидовому расстояниям (равно-

степенных в классе $BL_k^{\frac{n}{2}}$), двусторонние оценки искажения евклидовых расстояний внутри областей при отображениях произвольных областей, следствиями которых являются свойства равностепенной непрерывности и открытости, аналог теоремы Каратеодори об отображениях областей с переменными границами и другие результаты.

6

Римановы поверхности

Проблема типа односвязной римановой поверхности. Известно, что всякую открытую односвязную риманову поверхность (р. п.) R можно конформно отобразить на круг $|z| < 1$ (R — гиперболического типа) или на всю конечную плоскость $|z| < \infty$ (R — параболического типа). Обратная отображающая функция, записанная в виде $w = f(z)$ (р. п. R можно считать расположенной над z -плоскостью), является мероморфной функцией соответственно в круге $|z| < 1$ или в области $|z| < \infty$. Известно также, что тип R сохраняется при Q -квазиконформных отображениях и при квазиконформных отображениях, характеристика p (Лаврентьева) которых растет не слишком быстро при приближении к границе ∂R . Это приводит к методу квазиконформных деформаций и склеивания в проблеме типа: поверхность R разбивается на части, которые квазиконформно деформируются, отображаются на плоские области и склеиваются в единое квазиконформное отображение R на круг конечного или бесконечного радиуса; затем в терминах характеристик устанавливаются критерии, обычно в форме сходимости или расходимости интегралов или рядов, для определения типа р. п. тех или других классов.

Такие исследования проводились в СССР Л. И. Волковым (1950 г.) и его учениками А. А. Гольдбергом (1959 г.) и Д. Б. Потягайло (1962 г.). Более ранний критерий гиперболического типа принадлежит (1935 г.) М. А. Лаврентьеву.

Геометрическая теория распределения значений мероморфных функций. Весьма подробно эта тема излагается в гл. I. В плане ее связи с квазиконформными отображениями отметим следующее. Вопрос о распределении значений мероморфных функций тесно связан с вопросом о структуре соответствующих р. п. Например, пикаровским исключительным значениям $w = 0$, $w = \infty$ (они же асимптотические значения)

функции $w = e^z$ соответствует наличие логарифмических точек ветвления р. п. функции $z = \ln w$ над $w = 0$, $w = \infty$. Учитывая сказанное выше, можно считать заданными либо классы р. п., либо классы мероморфных функций, либо некоторую информацию о том и другом. Обычно это выражается в задании характера разветвленности р. п., характеристике дефектных и асимптотических значений рассматриваемых функций и т. д. Используя теорему П. П. Белинского о поведении квазиконформного отображения в изолированной особой точке, теоремы о граничном поведении квазиконформных отображений в круге, а также методы квазиконформных деформаций и склеивания, удастся усилить указанную информацию о структурных свойствах р. п. и соответствующих асимптотических свойствах мероморфных функций, что позволяет решить ряд задач по теории распределения значений, например известную обратную задачу теории распределения, задачу о построении целых функций с заданными асимптотическими свойствами и др.

Такие исследования в СССР интенсивно проводились (1954 г.) А. А. Гольдбергом.

Алгебраическая теория квазиконформных отображений. Гомеоморфизм $w(z)$ р. п. R на р. п. R_1 называется квазиконформным отображением R на R_1 , если

$$w_z = q_1(z) w_z + q_2(z) \bar{w}_z, \quad (172)$$

где $q_1(z)$, $q_2(z)$ — комплексные характеристики отображения, причем $q_1(z)$ носит тензорный характер, обеспечивающий необходимую инвариантность (172) относительно выбора локальных параметров, и $|q_1(z)| + |q_2(z)| \leq q_0 < 1$. Решения $w(z)$ уравнения (172) называются также квазианалитическими функциями на R , а их дифференциалы dw или замкнутые дифференциалы вида

$$\omega = \varphi dz + \psi d\bar{z}, \quad (173)$$

где $\psi = q_1\varphi + q_2\bar{\varphi}$, — квазианалитическими дифференциалами на R .

Квазианалитические функции и дифференциалы на р. п. исследовал И. И. Данилюк. В основном он занимался вопросами существования и интегрального представления таких функций и дифференциалов, а также некоторым их обобщением на комплексные римановы многообразия более высокой размерности. Характерными методами Данилюка являются альтернирующий метод Шварца и метод интегральных уравнений.

В случае замкнутых р. п. возникает вопрос об алгебраических свойствах квазиконформных отображений, функций и дифференциалов. Такие исследования в СССР впервые были проведены В. Г. Михальчуком. Он доказал (1960 г.) важное утверждение о сохранении для указанных функций и дифференциалов теоремы Римана — Роха. В дальнейшем в Пермском университете систематически разрабатывалась алгебраическая теория квазианалитических и обобщенных аналитических функций, а также теория краевых задач этих классов функций на р. п. Из большого цикла исследований в этом направлении укажем лишь работы (1960—1965 гг.) Ю. Л. Родина. Он несколько по-другому построил теорию квазианалитических функций и дифференциалов на р. п. Родин получил

также теорему Римана — Роха и доказал теорему Абеля. Участники семинара по теории функций Пермского университета (Ю. Л. Родин, С. Я. Гусман, Р. Н. Абдулаев, Г. Д. Мерзлякова и др.) достигли значительного прогресса в изучении эллиптических систем дифференциальных уравнений на $\mathbb{R}^n$ в соответствии с идеями М. А. Лаврентьева по общим квазиконформным отображениям.

Пространства римановых поверхностей. Вариационные методы теории квазиконформных отображений, развитые П. П. Белинским, были перенесены (1967 г.) его учеником С. Л. Крушкалем на римановы поверхности. В основе метода Белинского — Крушкаля лежит получение новых конструктивных вариационных формул. Этот метод применяется в теории пространств Тейхмюллера замкнутых $\mathbb{R}^n$, для решения новых экстремальных задач на квазиконформные отображения, установления связей с проблемой моментов и с вариационными принципами теории оптимальных процессов. Работы П. П. Белинского и С. Л. Крушкаля являются важным вкладом в теорию экстремальных квазиконформных отображений.

К исследованиям П. П. Белинского и С. Л. Крушкаля непосредственно примыкают работы (1963 г.) В. Г. Шеретова о некоторых расслоениях пространства Тейхмюллера и экстремальных квазиконформных отображениях с определенными ограничениями на характеристики.



Ю. Л. Родин.

Некоторые приложения теории функций комплексного переменного

Теория функций комплексного переменного возникла в начале XIX в. как одно из направлений анализа, которое тесно связано с различными отраслями математики и играет важную роль в ее приложениях. Без теории функций комплексного переменного невозможно было бы получить многие результаты в теории дифференциальных уравнений, математической физике, теории аппроксимации, алгебре, аналитической теории чисел, геометрии, гидро- и аэродинамике, теории упругости, радио- и электротехнике, корабле- и самолетостроении, электронной оптике, теории фильтрации и других областях науки и техники. Рассмотрим основные результаты советских математиков по приближенным методам этой теории и некоторым их применениям.

Фундаментальным вкладом в развитие теории функций комплексного переменного, в построение и разработку ряда сложных проблем

механики и решения важных задач народнохозяйственного значения являются работы М. А. Лаврентьева. С именем М. А. Лаврентьева связано возникновение и развитие нового направления в теории приближенных конформных отображений. Речь идет о вариационных методах теории конформных отображений. С помощью этих методов М. А. Лаврентьев получил (1938 г.) классические результаты по теории волн и теории струй. Он применил их также к решению проблемы существования определенных классов течений несжимаемой жидкости. Вариационные методы Лаврентьева, как и все его основные работы, не только содержат результаты теоретического значения, но и являются средством эффективного решения прикладных задач и основой приближенных методов расчетов.

Важные задачи теории конформных отображений и их многочисленных приложений решены в совместных работах М. А. Лаврентьева и М. В. Келдыша. В этих исследованиях дано решение задачи жесткого удара о воду, изучены вопросы об устойчивости решения задачи Дирихле и о единственности решения задачи Неймана, т. е. глубокие вопросы математической теории и ее приложений. М. А. Лаврентьеву и М. В. Келдышу принадлежат исследования о движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости, ставшие теоретической основой новой, быстроразвивающейся отрасли современной гидромеханики — теории корабля на подводных крыльях.

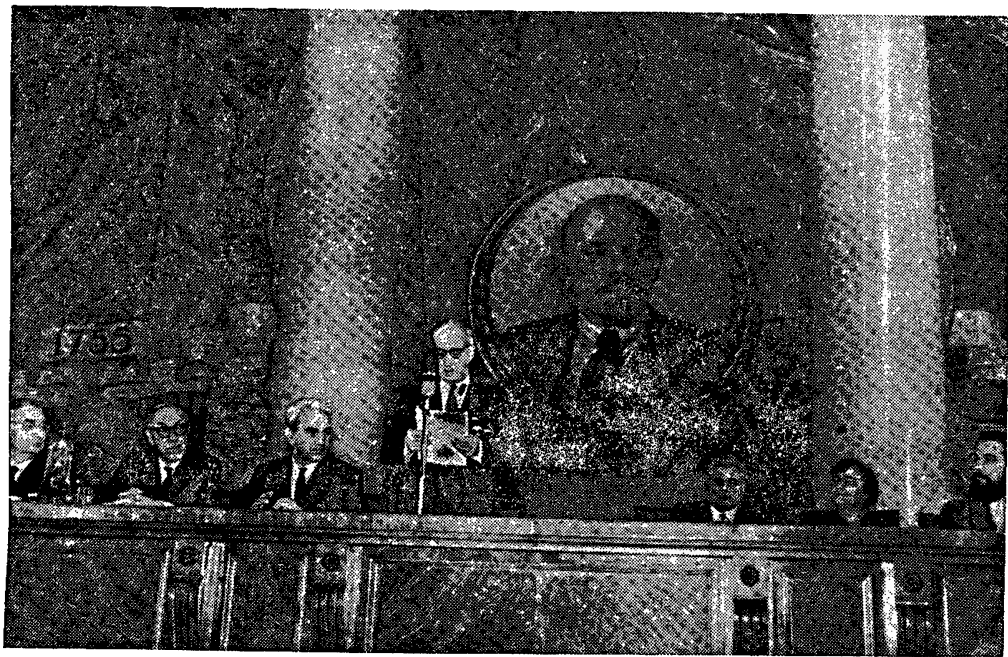
Исследования М. А. Лаврентьева относятся также к области механики сплошной среды, где он создал новые теории и направления, впервые поставил и решил очень важные народнохозяйственные задачи. Так, он разработал гидродинамическую теорию кумуляции, вместе с А. Ю. Ишлинским создал новую теорию динамической устойчивости стержней.

Особого внимания заслуживают открытые в 1960 г. М. А. Лаврентьевым новые приложения гидродинамики идеальной жидкости, где теория функций комплексного переменного нашла новое, самое неожиданное применение в теории детонации и теории направленного взрыва. Благодаря этим его работам взрыв из вечного разрушителя превратился во взрыв-созидатель, с помощью которого в течение считанных секунд создают грандиозные земляные плотины и дамбы или сваривают металлы, которые другими способами соединить бывает очень трудно.

М. А. Лаврентьев создал на Украине, в Москве и Новосибирске широко известные научные школы в области теории функций комплексного переменного и механики сплошной среды.

Фундаментальные результаты в различных областях математики и механики получил М. В. Келдыш. Основные его работы по математике относятся к теории функций комплексного переменного, теории приближений в комплексной области, теории приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, теории несамосопряженных операторов и теории потенциала. Результаты, полученные им в этих областях, связаны с проблемами механики, автоматического регулирования и др.

В области приложений М. В. Келдыш посвятил часть своих работ изучению неустойчившегося движения тел в жидкости, влиянию сжи-



Президиум II Всесоюзного съезда механиков (МГУ, 1964 г.). Слева направо: Л. И. Седов, М. А. Лаврентьев, М. В. Келдыш, Н. И. Мусхелишвили, И. Н. Векуа, П. Я. Кочина, Г. К. Михайлов.

маемости на обтекание тел, развитию теории волновых движений и упругих колебаний в воздушном потоке, динамической прочности и вибрации самолетов. Он установил, что при некоторых видах вибрации крыла возникает тяговая сила, разработал теорию подъемной силы, приложенной к крылу самолета, с учетом сжимаемости воздуха.

М. В. Келдыш разработал теорию флаттера и теорию автоколебаний колеса с пневматиками, а на основе этой теории — конструктивные принципы устранения автоколебаний трехколесных шасси при посадке самолета. Ему принадлежит ряд основных результатов в теории движения подводного крыла, а также в теории волнового сопротивления.

М. В. Келдыш и Л. И. Седов в совместной работе установили формулу, позволившую эффективно решить смешанную краевую задачу гармонических функций и получившую многочисленные практические применения. В работе М. В. Келдыша «Конформные отображения многосвязных областей на канонические области» (1939 г.) и ряде его обзорных статей изложен большой и весьма важный материал по актуальным вопросам теории функций комплексного переменного и ее приложений.

Первые приложения теории функций комплексного переменного к гидродинамике ведут свое начало от работ Кирхгофа и Гельмгольца, в которых были решены задачи об установившихся плоско-параллельных движениях несжимаемой жидкости с заранее неизвестными свободными поверхностями. Теорию Кирхгофа развили Д. К. Бобылев и А. П. Котельников, решившие задачи об обтекании клина потоком несжимаемой

жидкости бесконечной и конечной ширины. Однако основную, решающую роль в этом направлении сыграли труды Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина.

Творчество Н. Е. Жуковского, основоположника современной гидро- и аэродинамики, отличается широтой и разнообразием тематики. Это исследования по аэродинамике и авиации, гидродинамике и гидравлике, теории фильтрации, механике неизменяемых систем, математике и астрономии. Многочисленные работы Жуковского по гидромеханике принесли ему мировую славу. Разработанные им методы решения задач фильтрации со свободной поверхностью успешно применяются и в настоящее время. Ему принадлежит развитие аэромеханики как самостоятельной науки. Особенно большое значение имеют исследования Н. Е. Жуковского в совершенно новой для того времени области знаний — теоретической и экспериментальной аэродинамике. Здесь его идеи остаются основополагающими до сегодняшнего дня.

Н. Е. Жуковский и С. А. Чаплыгин первыми сумели объяснить парадокс Даламбера и, введя понятие присоединенного вихря, разработали общую теорию подъемной силы крыла. Постулат Жуковского — Чаплыгина о том, что при обтекании крыла потоком идеальной жидкости точка схода должна совпадать с задней острой кромкой крыла, обеспечивает единственность решения этой задачи и дает результаты, хорошо совпадающие с экспериментом.

С. А. Чаплыгин первые свои работы посвятил одной из наиболее трудных задач гидромеханики — задаче движения твердого тела в жидкости — и добился в этом направлении выдающихся успехов. Он разработал новый метод учета влияния сжимаемости воздуха. Этим методом было положено начало развитию газовой динамики — аэродинамики больших скоростей. С. А. Чаплыгину принадлежат основные формулы определения давления воздуха на профиль крыла, которыми пользуются и в современной авиации. Он разработал метод определения точки приложения равнодействующей подъемной силы, теорию механизированного крыла, рассмотрел вопросы устойчивости крыла в полете, первый получил точное решение обтекания кривой решетки, составленной из прямолинейных отрезков, с помощью отображения этой решетки на верхнюю полуплоскость вспомогательного переменного, провел также важные исследования по аналитической механике, баллистике, теории дифференциальных уравнений и др.

Во всех своих исследованиях Н. Е. Жуковский и С. А. Чаплыгин опирались на эффективные методы теории функций комплексного переменного ³⁶.

Глубокое развитие теоретические и прикладные вопросы теории функций комплексного переменного получили в работах И. Н. Векуа, В. В. Голубева, Л. В. Канторовича, Н. Е. Кочина, Л. С. Лейбенсона, М. Д. Миллионщикова, Н. И. Мусхелишвили, А. И. Некрасова, Н. Н. Павловского, П. Я. Кочиной, Л. И. Седова, В. И. Смирнова,

³⁶ Подробно об этом см. в кн.: М. В. Келдыш и Л. И. Седов. Приложения теории функций комплексного переменного к гидродинамике и аэродинамике (обзор некоторых работ московской школы). «Наука», М., 1964.

С. Л. Соболева, Л. Н. Сретенского, Б. С. Стечкина, С. А. Христиановича.

И. Н. Векуа посвятил ряд исследований применениям теории аналитических функций к решению дифференциальных и интегральных уравнений математической физики. Он изучал также общие свойства решений широкого класса уравнений эллиптического типа и детально разработал методы исследования краевых задач. Полученные им результаты нашли широкое применение в теории упругости, теории изгибающих поверхностей, теории оболочек, а также в других областях математики и механики.

В. В. Голубевым выполнен цикл работ, в которых рассмотрены особые точки однозначных аналитических функций, исследовано применение теории функций комплексного переменного к аэродинамике, изучена теория автоморфных функций и теория лакунарных рядов, установлено соответствие границ при конформном отображении. Он внес значительный вклад в разработку аналитической теории дифференциальных уравнений. В. В. Голубев — автор одного из первых курсов по теории крыла («Лекции по теории крыла», 1949 г.).

Одному из наиболее трудных вопросов теории функций комплексного переменного — вопросу построения эффективных приближенных методов конформных отображений посвятил первые свои работы Л. В. Канторович. Он разработал метод последовательных приближений для конформного отображения круга на односвязную область, основанный на эквивалентности этой задачи задаче параметрического представления границы области с помощью сопряженных функций. Метод разложения по степеням малого параметра Л. В. Канторовича был успешно применен Г. М. Голузиным, В. И. Крыловым, М. И. Муратовым в теоретических исследованиях и в работах по приближенным конформным отображениям. Этот же метод в несколько измененном виде рассмотрели А. З. Закарин и Г. А. Николаева. Николаева, кроме того, детально исследовала сходимость используемого процесса, опираясь на теоремы в методе Ньютона.

Н. Е. Кочин одним из первых разработал гидродинамическую теорию решеток, провел цикл интересных исследований по теории волн в атмосфере и на поверхности раздела двух жидкостей, включая весьма сложный случай пространственной задачи о волнах на поверхности двух жидкостей различных плотностей. Он изучил вопрос о волновом сопротивлении и подъемной силе тел, погруженных в жидкость, исследовал движение тяжелой жидкости в канале, рассмотрел задачу о глиссировании слабоизогнутого контура по поверхности тяжелой несжимаемой жидкости. Одним из первых Н. Е. Кочин начал разрабатывать теорию крыла конечного размаха, включая вопрос установившихся колебаний такого крыла. Ему принадлежат курсы по гидромеханике, векторному и тензорному исчислениям (некоторые из них написаны Н. Е. Кочинным в соавторстве с И. А. Кибелем и Н. В. Розе).

Основные работы Л. С. Лейбензона относятся к гидравлике, аэродинамике, применению вариационных методов для решения задач теории упругости. Лейбензону принадлежит новое уравнение пограничного



Н. Е. Кочин.

к стоку в двухслойной среде, применив для этой цели интеграл Фурье, изучал газовые эжекторы и их применения. М. Д. Миллионщиков — автор (совместно с С. А. Христиановичем, В. Г. Гальпериным и Л. А. Симоновым) монографии, в которой изложена новая отрасль науки — прикладная газовая динамика («Прикладная газовая динамика», 1948 г.)

В основных трудах Н. И. Мусхелишвили рассматриваются теория упругости, контактные задачи, кручение и изгиб стержней, интегралы типа Коши и их приложения к решению краевых задач, теория сингулярных интегральных уравнений, краевые задачи теории потенциала и аналитических функций. Фундаментальные исследования Н. И. Мусхелишвили и его многочисленных учеников и последователей придали законченность теории линейных краевых задач аналитических функций и теории одномерных интегральных уравнений с особым ядром. Вместе с Г. В. Колосовым Н. И. Мусхелишвили распространил методы теории функций комплексного переменного на решение бигармонических задач, создав тем самым новое направление в области приложений этой теории. К исследованиям Н. И. Мусхелишвили примыкают важные работы Г. Н. Савина. Ему принадлежит несколько обобщающих монографий по концентрации напряжений.

Нестационарной аэродинамике и теории волн на поверхности тяжелой жидкости посвящены исследования А. И. Некрасова. Во многих работах А. И. Некрасов также изучает другие теоретические и практические проблемы, в том числе проблемы диффузии вихря в вязкой жидкости, задачи о флаттере крыла самолета. В 1944 г. А. И. Некрасов предложил принципиально новый метод решения задачи обтекания тел газом при дозвуковых скоростях. Этот метод позволяет восстановить линейность уравнения потенциала скорости

слоя, сыгравшее большую роль в дальнейшем развитии соответствующей теории. Важное прикладное значение имеют работы Л. С. Лейбензона, связанные с движением жидкостей и газов в пористых средах, в том числе работы по фильтрации нефти. Л. С. Лейбензон — автор учебников по теоретической механике, нефтепромышленной механике, сопротивлению материалов и гидравлике.

Теории турбулентности, теории фильтрации и прикладной газовой динамике посвящены глубокие исследования М. Д. Миллионщикова. Он исследовал изотропную турбулентность на конечных стадиях ее вырождения, разрабатывал вопросы фильтрации газированной жидкости и вопросы, связанные с методами эксплуатации нефтяных скважин, решил пространственную задачу о фильтрации

установившегося дозвукового движения газа с помощью преобразования Лежандра. Примечательным в методе Некрасова является то, что он дает возможность решать задачу об обтекании профиля газом, с учетом его сжимаемости, не искажая профиль. Дальнейшей разработке метода Некрасова посвящен ряд работ Л. К. Кудряшова.

Н. Н. Павловский выполнил исследования по теории движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями, начатые в 20-е годы. В этих работах он широко применил простые методы теории конформных отображений и с их помощью решил большое количество двумерных задач напорной фильтрации. Ему принадлежит также оригинальный метод фрагментов, разработанный им в содружестве с А. М. Сенковым для расчета плотин системы Сенкова. А. М. Сенков распространил этот метод на более сложные случаи задач движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями.

П. Я. Кочина решила сложные задачи фильтрации, которые не могут быть решены с помощью взаимных конформных отображений заданных областей, впервые применила теорию линейных дифференциальных уравнений класса Фукса. Метод Кочиной оказался весьма эффективным в случае трех неустраняемых особых точек и применим в ряде классических задач, таких, как задача о фильтрации в прямоугольной перемычке (при наличии наперед неизвестной свободной поверхности и промежутка высачивания) и в трапециoidalной перемычке с вертикальным верховым откосом. Этот же метод оказался применимым и для решения некоторых задач фильтрации в неоднородной среде, а в сочетании с другими методами теории функций комплексного переменного — позволил решить задачи о неустановившейся фильтрации.

Н. Е. Жуковский, Н. Н. Павловский, П. Я. Кочина, В. В. Ведерников являются основоположниками советской фильтрационной школы, получившей широкое международное признание.

Л. И. Седов в своих весьма интересных и важных исследованиях уделяет большое внимание задачам удара твердого тела о жидкость, задаче глиссирования по поверхности тяжелой жидкости, а также разработке многих других вопросов аэродинамики, гидромеханики и газовой динамики. Он обобщил теорему Н. Е. Жуковского для произвольных движений крыла, внес существенный вклад в теорию обтекания решеток, а также в решение вопросов неустановившихся автомодельных движений газа. Работы Л. И. Седова по теории взрывных волн положены в основу учения о сильных ударных волнах. Он получил



П. Я. Кочина.

существенные результаты в теории вязкой жидкости, теории поверхностных волн, в применении теории подобия и размерности к решению многих задач механики. Известны также глубокие исследования Л. И. Седова по проблемам астрофизики и межпланетных сообщений.

Замечательные исследования В. И. Смирнова посвящены теории функций комплексного переменного, теории дифференциальных уравнений, аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений, математической физике, теории упругости, аэромеханике, гидромеханике. Совместно с С. Л. Соболевым В. И. Смирнов разработал новый метод решения задач о распространении волн в упругих средах. С. Л. Соболев рассмотрел интересную предельную задачу теории логарифмического потенциала и ее применение к отражению плоских упругих волн, разработал методику применения алгоритма Шварца в теории упругости.

Л. Н. Сретенский исследовал вопросы волновых движений, проблемы теории газовых струй, а также вопросы, относящиеся к теории ньютоновского потенциала, включая решение некоторых обратных задач этой теории. Он автор одной из первых монографий по теории волн («Теория волновых движений жидкости», 1936 г.).

Б. С. Стечкин является одним из создателей теплового расчета авиамоторов, автором оригинальных работ по теории реактивного движения. Ему принадлежит первая разработка (1929 г.) основ теории воздушно-реактивного двигателя. Б. С. Стечкин принимал активное участие вместе с Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным в создании Центрального аэрогидродинамического института (ЦАГИ), а также был одним из организаторов Военно-воздушной инженерной академии им. Н. Е. Жуковского.

В работах С. А. Христиановича, относящихся к рассматриваемому направлению, исследуются задачи об обтекании профилей при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях, а также задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре. Некоторые его работы посвящены неустановившемуся движению жидкостей в каналах и реках, теории фильтрации, процессам обтекания газом профиля в случае больших дозвуковых скоростей. С. А. Христиановичу принадлежат также важные исследования по теории пластичности и теории сверхзвуковых течений газа.

Вопросы, связанные с применением теории функций комплексного переменного к решению некоторых задач обтекания газовым потоком и задач об ударе газовой струи о твердую стенку, рассмотрены Н. А. Слезкиным.

В. В. Соколовский — один из основоположников нового направления в статике сыпучей среды, автор большого цикла работ по теории пластичности. Вместе с С. А. Христиановичем он впервые рассмотрел некоторые случаи движения грунтовых вод, не следующие закону Дарси, и тем самым положил начало нелинейной теории фильтрации.

Г. Ю. Степанов в работах, посвященных гидромеханической теории решеток, исследовал плоское течение через решетки невязкой

несжимаемой жидкости и газа, осредненное осесимметричное течение сжимаемой жидкости через пространственные решетки турбомашин и двумерное (неплоское) течение в межлопаточных каналах, плоское и пространственное течение вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса. Значительное внимание он уделил применению различных методов моделирования и вопросу определения коэффициентов потерь при течении вязкой жидкости через решетки.

Вопросы определения сопротивления решетки профилей, обтекаемой вязкой несжимаемой жидкостью, а также газовым потоком с докритическими скоростями, рассмотрел Л. Г. Лойцянский.

Исследование гидромеханической теории решеток содержится в работах Г. С. Самойловича. Ему принадлежит метод построения отображающей функции для решетки профилей по известной отображающей функции для ее изолированного профиля.

В области аэрогидродинамики результаты получены также Н. С. Аржаниковым, Л. А. Галиным, М. И. Гуревичем, Г. А. Домбровским, Ю. П. Иванчиковым, Е. А. Красильщиковой, Ю. П. Красовским, В. М. Кузнецовым, Г. К. Михайловым, Н. Н. Мойсеевым, П. В. Мясниковым, Г. Н. Пыхтевым, Я. И. Секерж-Зеньковичем, А. М. Тер-Крикоровым, И. Г. Филипповым, М. Д. Хаскиндом, А. Е. Хоперсковым, И. З. Штокало, Д. А. Эфросом, М. Л. Якимовым и др.

Теория функций комплексного переменного широко применяется при решении различных задач фильтрации. Этими вопросами занимались и занимаются многие ученые Москвы, Ленинграда, Новосибирска, Киева, Казани, Ташкента, Тбилиси, Харькова, Каунаса, Одессы и других научных центров нашей страны. Остановимся кратко на основных работах.

В монографии В. И. Аравина и С. Н. Нумерова «Теория движения жидкостей и газов в недеформированной пористой среде» (1953 г.) исследован широкий круг вопросов теории установившейся и неустановившейся фильтрации под гидротехническими сооружениями, фильтрации со свободной поверхностью, задачи плановой фильтрации, а также приближенные методы расчета фильтрации тяжелой несжимаемой жидкости, метод электродинамической аналогии, лабораторные и полевые методы исследования фильтрации.

В. В. Ведерников применил метод конформных отображений при расчете задач по безнапорной фильтрации, используя понятие о годографе скоростей, и в первую очередь задач фильтрации из каналов. В дальнейшем задачи фильтрации из каналов и русел произвольной формы и при произвольной форме границы дренирующего слоя с помощью метода последовательных конформных отображений были решены В. М. Голованем, П. А. Рудченко и Ф. П. Яремчуком. С. В. Меунаргия применил этот же метод для расчета притока грунтовых вод в строительный котлован произвольного очертания при наличии депрессионных кривых и промежутка высачивания.

Е. А. Замарин применяет метод Н. Н. Павловского для исследования фильтрации под гидротехническими сооружениями. Этой же теме посвящены работы В. С. Козлова и Н. Т. Мелещенко, в которых,

кроме того, авторы (независимо один от другого) впервые применили для фильтрационного расчета флютбетов метод последовательного отображения шпунтов.

Ф. Б. Нельсон-Скорняков, используя комплексы Жуковского или Кирхгофа, решил ряд задач фильтрации через земляные плотины, включая наиболее сложный случай плотины с дренажем и диафрагмой, а также задачи по притоку грунтовых вод к строительным котлованам и карьерам.

Разработкой технических условий и норм проектирования гидротехнических сооружений на основе различных приближенных методов фильтрационных расчетов занимались А. А. Ничипорович и Р. Р. Чугаев. Сопоставление этих приближенных методов и исследование обеспечиваемой ими точности было проведено Б. П. Руплисом.

М. Т. Нужин и Н. Б. Ильинский одними из первых исследовали вопросы, связанные с решением обратных краевых задач теории фильтрации. И. А. Чарный рассмотрел ряд задач по фильтрации упругой жидкости в упругом пласте, а также задачи о стягивании контура гавоносности. В. М. Шестаков выполнил исследования по прогнозированию режима подземных вод при устройстве водохранилищ, каналов, карьеров и разрезов полезных ископаемых, мелиорации сельскохозяйственных территорий и т. п. Многочисленные вопросы приложения теории фильтрации к проблемам добычи нефти и газа, а также история развития этого направления рассмотрены В. Н. Щелкачевым и Б. Б. Лапуком.

Дальнейшее развитие теории фильтрации и ее технических приложений связано с работами многих математиков. Рассмотрим некоторые из них.

Важное значение в вопросах приложения теории функций комплексного переменного имеют приближенные методы конформных отображений.

Ю. П. Иванилов, Н. Н. Моисеев и А. М. Тер-Крикоров показали, что вариационные формулы конформных отображений М. А. Лаврентьева носят асимптотический характер, являясь первыми членами разложений соответствующих точных решений. На базе вариационных формул М. А. Лаврентьева интересные исследования узких полос выполнены Н. Н. Моисеевым. П. В. Мелентьев разработал оригинальный графо-аналитический метод, который, благодаря наглядности и простоте, широко применяется в инженерной практике. Опираясь на метод П. В. Мелентьева, Ю. В. Благовещенский разработал численный метод отображения односвязных и двусвязных областей, обладающий довольно быстрой сходимостью и базирующийся на задании отображающего контура дискретным рядом точек, которые лежат на нем, как это часто встречается на практике. И. Г. Губарь разработал аналитический вариант метода П. В. Мелентьева. Разработке приближенных методов для конформного отображения двусвязных областей посвящены работы Г. Я. Хажалия и Б. Ф. Шилова.

Большое внимание уделялось разработке приближенных методов конформных отображений, связанных с использованием интегральных

уравнений. Первая работа в этом направлении, по-видимому, принадлежит Л. Лихтенштейну. Он свел задачу отображения на круг односвязной однолистной области, ограниченной простой замкнутой кривой с непрерывной кривизной, к решению интегрального уравнения Фредгольма. Независимо от Лихтенштейна к этому же интегральному уравнению, воспользовавшись методом Нистрема, пришел в 1933 г. С. А. Гершгорин. Для решения интегрального уравнения Лихтенштейна — Гершгорина А. М. Банин предложил приближенный метод, сводящийся к решению конечной системы линейных дифференциальных уравнений.



И. И. Ляшко.

Решению задачи об отображении произвольного аэродинамического профиля посвящены работы (1946, 1947 гг.) С. Г. Нужиной, Я. М. Серебрянского и Л. А. Симонова. В этих работах приведены также вспомогательные таблицы, существенно облегчающие вычисления. Метод, предложенный С. Г. Нужиным, выгодно отличается от аналогичных приближенных методов тем, что он позволяет непосредственно строить ряд, отображающий внешность заданного профиля на внешность круга, без предварительного перехода к области, близкой к кругу. С. Г. Нужин доказал также сходимость предложенного им метода.

П. П. Куфарев рассмотрел вопрос определения констант интеграла Кристоффеля — Шварца, а также метод отображения на круг области, которая получается из плоскости проведением полигонального разреза, начинающегося на бесконечности. У разреза постепенно наращиваются звенья, причем k -й шаг требует решения системы $k + 1$ обыкновенных дифференциальных уравнений. К этому же направлению примыкают работы Ю. В. Чистякова. А. М. Чуфистова разработала методику построения приближенного конформного отображения с помощью показательной функции.

Интересные результаты в направлении разработки приближенных методов получены Г. Н. Положим. Они относятся к некоторым линейным классам квазиконформных отображений. Г. Н. Положий ввел так называемые p -аналитические функции, а также преобразовал основные формулы плоской теории упругости. Ему принадлежит также метод суммарных представлений, применяемый им для решения важных практических задач. Методы Г. Н. Положего получили дальнейшее развитие в работах его учеников, в частности в исследованиях И. И. Ляшко, который решил ряд проблем теории фильтрации.

В последние годы для решения задачи конформного отображения наперед заданных областей все шире применяются методы электромо-



Н. С. Кошляков.

пользоваться итерационным процессом. Эту же тематику успешно развивают ученики А. Г. Угодчикова А. Я. Крылов, И. И. Серебrenникова и др. Различные методы построения отображающей функции с помощью электро моделирования предложили Г. Н. Положий, Г. Ю. Степанов, О. В. Тозони, В. Е. Шаманский. Подробный обзор приближенных методов конформных отображений дан в монографии П. Ф. Фильчакова «Приближенные методы конформных отображений» (1964 г.).

П. Ф. Фильчаков разработал метод последовательных конформных отображений и метод тригонометрической интерполяции. Эти методы позволяют с любой наперед заданной точностью отображать односвязные и двусвязные области, включая случаи, когда на границе есть угловые точки и разрезы. П. Ф. Фильчаков применил их для аппроксимации некоторых трансцендентных функций комплексного переменного и в теории фильтрации. Он получил рекуррентные формулы для выполнения действий над степенными рядами с действительными и комплексными коэффициентами, использовал их при решении нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, применил обобщенные степенные ряды для определения констант интеграла Кристоффеля — Шварца. Часть его работ посвящена развитию метода математического моделирования (им впервые использована электропроводная бумага). Совместно с В. И. Панчишиным П. Ф. Фильчаков создал электроинтегратор ЭГДА, получивший широкое применение во многих заводских лабораториях, в научно-исследовательских и учебных институтах.

Вопросы приложения теории функций комплексного переменного и создания соответствующих приближенных методов играют все более важную роль во многих областях развития науки и техники.

делирования. Первые работы в этом направлении относятся к 1937—1947 гг. (К. Бредфилд, С. Гукер и Р. Саусвел, Л. Маловар, Ю. Г. Толстой). В 1955 г. А. Г. Угодчиков с помощью электропроводной бумаги, исходя из метода П. В. Мелентьева, разработал очень простой экспериментально-аналитический метод построения функции, конформно отображающей произвольную односвязную область на круг, а также двусвязную область на круговое кольцо. Определив с помощью электро моделирования положение узловых точек, он устранил основную трудность в методе П. В. Мелентьева. В дальнейшем А. Г. Угодчиков для построения отображающей функции по найденным электро моделированием узловым точкам применил полиномы Лагранжа, а для уточнения результатов предложил вос-

В теории функций комплексного переменного, как, впрочем, и в теории функций действительного переменного, в математической физике, математическом анализе и теории чисел заметное место занимают различные построения специальных функций, которые были объектом исследования Э. Л. Блоха, Н. Я. Виленкина, Б. М. Гагаева, Я. Л. Геронимуса, И. Н. Денисюка, А. Н. Динника, Н. С. Кошлякова, Д. Д. Мордухай-Болтовского, С. Х. Сираждинова, Р. В. Хохлова и др.

Э. Л. Блох получил некоторые результаты, относящиеся к функциям Бесселя и Лежандра, Н. Я. Виленкин установил связь между бесселевыми функциями и некоторым представлением группы движений евклидовой плоскости, А. Н. Динник занимался вопросами функций Бесселя в применении к задачам механики, Д. Д. Мордухай-Болтовской рассмотрел так называемые гипералгебраические и гипертрансцендентные функции, Р. В. Хохлов изучал асимптотические свойства функций Лагерра и т. д.

Рассмотрим один из интересных результатов Н. С. Кошлякова, относящийся к обобщению классической формулы Планка — Абея. Этот результат формулируется следующим образом. Если $F(s)$ регулярна в некоторой вертикальной полосе, а $f(s)$ представляет собой преобразование Римана — Меллина функции $F(s)$ и, кроме того,

$\zeta(s, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} (n + \xi)^{-s}$ — функция Гурвица, то при некоторых дополнительных условиях

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n + \xi) = \int_0^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s) \zeta(s, \xi) ds + R,$$

где R — сумма вычетов $F(s) \zeta(s, \xi)$ в некоторой области.

Из приведенной формулы непосредственно получается ряд результатов Харди и Рамануджана, а также многие новые результаты в суммировании арифметических функций, порождаемых рядами Дирихле. Н. С. Кошлякову принадлежит также глубокое обобщение известных в теории ζ -функции классических соотношений, ему удалось получить новые интересные результаты.

Большой знаток специальных функций, Н. С. Кошляков искусно владел аналитической стороной дела и внес много ценного в развитие как теории специальных функций, так и их приложений. Многие из этих результатов изложены в известном его мемуаре «Исследование одного класса трансцендентных функций, определяемых обобщенным уравнением Римана» (1949 г.). В этом мемуаре им введены понятия гамма-морфных функций первого и второго рода, изучены их аналитические свойства, указаны связи этих функций с некоторыми рядами типа Дирихле, а также аналогичные связи γ -функции с ζ -функцией Римана.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений — весьма обширная область математики, и все ее направления развиваются в нашей стране.

Отметим некоторые исходные позиции в области дифференциальных уравнений, на которых мы находились до 1917 г. Здесь прежде всего следует указать на знаменитую диссертацию А. М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения», изданную еще в 1892 г. Можно без преувеличения сказать, что все главы и параграфы этой книги как по своим результатам, так и по методам были исходными для многих направлений теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Работы выдающегося французского математика А. Пуанкаре, труды Биркгофа (общая теория динамических систем), Пенлеве и Хорна (аналитическая теория дифференциальных уравнений), Дюляка, Бендиксона и Фроммера (качественная теория дифференциальных уравнений) оказали влияние на многие исследования в Советском Союзе и за рубежом. Можно было ожидать, что и глубокие результаты П. Боля по дифференциальным уравнениям будут сильно влиять на работы в этой области математики. Но этого не случилось, что, по-видимому, объясняется весьма своеобразным мышлением Боля и его способом изложения своих изысканий. Однако в последнее время многие математики все чаще обращаются к работам Боля.

В работах В. А. Стеклова впервые и в большой общности развита теория разложений функций в ряды по собственным функциям краевой задачи обыкновенного дифференциального уравнения. В 1917 г. Я. Д. Тамаркин продолжил исследования В. А. Стеклова и дал способ асимптотического представления (относительно большого параметра, входящего в коэффициенты) решений линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В настоящей главе сначала дан обзор исследований советских математиков по отдельным областям и проблемам теории обыкновенных дифференциальных уравнений, затем рассмотрено развитие научных школ и направлений и в конце сделаны общие выводы, а также намечены перспективы дальнейшего развития исследований.

Аналитическая теория линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Большим событием в развитии теории обыкновенных дифференциальных уравнений после 1917 г. были работы И. А. Лаппо-Данилевского, которые он закончил в 1930 г. и за которые получил международную премию. В них впервые была построена развернутая теория функций от многих матриц и на основе этого даны новые методы решения кардинальных задач теории линейных систем дифференциальных уравнений, и притом в явной алгоритмической форме, о чем ранее, казалось, нельзя было и мечтать.

Укажем некоторые из этих задач. Пусть задана система n линейных однородных дифференциальных уравнений, записанная в матричной форме

$$\frac{dX}{dz} = X \sum_{k=1}^m \frac{U_k}{z - a_k}, \quad (1)$$

где a_k — комплексные или вещественные числа; U_k — постоянные матрицы порядка n и X — фундаментальная интегральная матрица, составленная из n линейно независимых решений. Уже в XIX в. из работ Фукса было известно, что в окрестности особой точки a_k имеет место следующее представление:

$$X(z) = (z - a_k)^{W_k} \bar{X}_k(z - a_k), \quad X(b) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где W_k — постоянная матрица порядка n и $\bar{X}_k(z - a_k)$ — матрица порядка n , регулярная в окрестности точки $z = a_k$ (т. е. $\bar{X}_k(z - a_k) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z - a_k)^k$ с постоянными матрицами A_k), а b взято из окрестности точки $z = a_k$ (или вообще не равно $a_1, \dots, a_m$). Здесь множитель

$$(z - a_k)^{W_k} = e^{W_k \ln(z - a_k)}$$

или просто матрица W_k характеризует многозначность ¹ матрицы $X(z)$ в окрестности точки $z = a_k$ на исходном листе Римана (т. е. на том листе, где взята начальная точка $z = b$). Пуанкаре в конце прошлого столетия подошел к решению задачи определения матриц W_k как функций от матриц U_l ($l = 1, \dots, m$) ².

¹ После обхода точки $z = a_k$ переменной z этот множитель умножается на $e^{2\pi i W_k}$, т. е. не является однозначной функцией в окрестности точки $z = a_k$.

² Пуанкаре интересовался только определением характеристических чисел матриц W_k как функций U_l ($l = 1, 2, \dots, m$) и не ставил задачи об изучении W_k как функций от U_l ($l = 1, \dots, m$).

Если вместо системы (1) рассмотрим систему

$$\frac{dX}{dz} = X \sum_{h=1}^m \sum_{r=1}^s \frac{U_h^{(r)}}{(z - a_h)^r}, \quad X(b) = I, \quad (3)$$

где $U_h^{(r)}$ — постоянные матрицы, то

$$X(z) = C^{(j)}(z) \bar{Y}^{(j)}(z). \quad (4)$$

Здесь

$$C^{(j)}(z) = (z - a_j)^{W_j^{(1)}} \left[I + \sum_{p=1}^{\infty} C_j^{(p)} \frac{1}{(z - a_j)^p} \right] \quad (5)$$

есть общее решение системы

$$\frac{dC^{(j)}(z)}{dz} = C^{(j)}(z) \sum_{r=1}^s \frac{W_j^{(r)}}{(z - a_j)^r}, \quad (6)$$

а

$$\bar{Y}^{(j)}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} B_j^{(p)} (z - a_j)^p. \quad (7)$$

Матрица $W_j^{(1)}$ ³ снова характеризует многозначность матрицы $X(z)$ в окрестности точки $z = a_j$, а матрицы $W_j^{(1)}, \dots, W_j^{(s)}$ характеризуют существенную особенность $X(z)$ в окрестности точки $z = a_j$, так как через эти матрицы $W_j^{(r)}$ определяется второй множитель в $C^{(j)}(z)$. Матрицы $W_j^{(1)}, \dots, W_j^{(s)}$, а также $B_j^{(p)}$ И. А. Лаппо-Данилевский получил в виде ряда от матриц $U_h^{(r)}$, если $U_p^{(r)}$ малы. Но W_h в (2) он построил при всех U_l ($l = 1, \dots, m$) в явном виде и показал, что W_h — мероморфные функции от U_l , а следовательно и однозначные:

$$W_h = W_h(U_1, \dots, U_m). \quad (8)$$

При малых $U_1, \dots, U_m$ функции (8) представимы в виде сходящихся рядов⁴ от $U_1, \dots, U_m$, которые Лаппо-Данилевский и построил в явном виде.

Определив функции (8) при малых $U_1, \dots, U_m$, а также во всей области существования и показав, что это — мероморфные функции, Лаппо-Данилевский разрешил полностью задачу, которую он назвал проблемой Пуанкаре. Кроме того, при малых $U_1, \dots, U_m$ и $W_1, \dots, W_m$ он обратил ряды (8):

$$U_h = U_h(W_1, \dots, W_m), \quad (9)$$

³ Коэффициенты рядов (5) суть мероморфные матричные функции от элементов матриц $U_1, \dots, U_m$.

⁴ Коэффициенты этих рядов суть мероморфные матричные функции от элементов матриц $U_1, \dots, U_m$.

разрешив тем самым в явном виде проблему Римана при малых $W_1, \dots, W_m$. Здесь проблема Римана состоит в том, что нужно построить n систем функций

$$X(z) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}, & \dots, & x_n^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)}, & \dots, & x_n^{(n)} \end{pmatrix}, \quad X(b) = I,$$

которые имеют в конечной части плоскости только особые точки $z = a_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, m$) и представляются в окрестности этих точек на исходном листе Римана в виде

$$X(z) = (z - a_\alpha)^{W_\alpha} \bar{X}(z - a_\alpha) \\ (\alpha = 1, \dots, m),$$

где W_α — наперед заданные постоянные матрицы, а $\bar{X}(z - a_\alpha)$ — матрицы, голоморфные в окрестности $z = a_\alpha$ и $\bar{X}(0) \neq \|0\|$. Эта система функций после обхода особой точки $z = a_\alpha$ на исходном листе Римана испытывает заданное линейное преобразование

$$V_\alpha = e^{2\pi i W_\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

$$X(\bar{z}) = V_\alpha X(z),$$

где $X(\bar{z})$ — значение матрицы $X(z)$ после обхода точки $z = a_\alpha$. По заданным многозначным особенностям матрицы функции (2) $W_1, \dots, W_m$ в точках $a_1, \dots, a_m$ мы строим по формулам (9) U_h , а тем самым и саму многозначную матрицу-функцию (2).

Исследования И. А. Лаппо-Данилевского продолжали Н. Е. Кочин, Б. Д. Вержбицкий, Н. П. Еругин, Б. Л. Крылов. В 1935—1938 гг. Н. П. Еругин построил в явном виде⁵ $W_i^{(1)}$ во всей области существования (т. е. при всех конечных значениях $U_1, \dots, U_m$) и показал, что это бесконечнозначные функции от $U_1, \dots, U_m$.

Тем самым, в этой работе были найдены и коэффициенты рядов Лорана, появляющихся при построении решения в окрестности иррегулярной особой точки системы уравнений вида (3) и даже вида

$$\frac{dX}{dz} = X \sum_{h=m+1}^{-\infty} \frac{U_h}{(z - a_h)^h},$$

где U_h — постоянные матрицы. В книгах «Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений» (1956 г.) и «Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений» (1963 г.)

⁵ Иррегулярная проблема Пуанкаре.



И. А. Лаппо-Данилевский.

Н. П. Еругин показал, что проблема Пуанкаре об общем представлении W_h и $W_j^{(1)}$ имеет прямое отношение к теории линейных систем с периодическими коэффициентами.

В 1942 г. Г. Ф. Федоров решил следующую задачу Фукса. Пусть дана регулярная система двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dx} = Y \left[\frac{U_0}{x} + \frac{U_1}{x-1} + \frac{U_2}{x-t} \right],$$

где Y — интегральная матрица, а U_0, U_1, U_2 — матрицы, не зависящие от x . Требуется найти такие матрицы U_0, U_1, U_2 , как функции от t , чтобы существовала интегральная матрица Y , интегральные подстановки V_0, V_1, V_2 которой не зависят от t . Шлезингер и Лаппо-Данилевский получили дифференциальные уравнения, которым должны удовлетворять матрицы U_0, U_1, U_2 . Федоров показал, что эти необходимые условия являются и достаточными для наличия искомой матрицы Y .

2

Асимптотические методы

В 1930 г. в Киеве возникла крупная математическая школа, возглавляемая Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым, создавшая методы исследования нелинейных дифференциальных уравнений. Эти методы затем развивались учениками Боголюбова и другими учеными в разных направлениях как в нашей стране, так и за рубежом. Обзор соответствующих работ из-за их многочисленности сделать не легко. Мы остановимся на некоторых самых ранних работах Боголюбова, лежащих в основе всего этого направления.

Начнем с метода осреднения. Наряду с исходной нелинейной системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x) \quad (10)$$

(x — n -вектор) рассматривается соответствующая ей осредненная система

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon \bar{f}(y), \quad (11)$$

где

$$\bar{f}(y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt, \quad (12)$$

и исследуется вопрос о зависимости между решениями осредненной и исходной систем. При этом ищутся условия, при которых разность $x(t, \varepsilon) - y(t)$ между решениями исходной системы $x(t, \varepsilon)$ и осредненной $y(t)$ может быть сделана произвольно малой на сколь угодно большом, однако конечном, промежутке времени, а можно ставить значительно более сложную задачу, пытаясь установить соответствия между такими свойствами исходной и осредненной систем, которые зависят от их поведения на бесконечном временном интервале.

В первом случае Н. Н. Боголюбовым была доказана теорема о том, что если для некоторой области D можно указать такие положительные постоянные M и λ , что для всех вещественных значений $t \geq 0$ и для любых точек x из этой области функция $f(t, x)$ ограничена постоянной M и является липшицианом по x с постоянной Липшица λ , и, кроме того, равномерно по y в области D существует предел (12), то любым сколь угодно малым положительным ρ , η и сколь угодно большому L можно сопоставить такое положительное ε_0 , что для решения $\xi = \xi(t)$ системы (11), определенного в интервале $0 < t < \infty$ и лежащего в области D со всей своей ρ -окрестностью, для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ в промежутке $0 < t < \frac{L}{\varepsilon}$ справедливо неравенство

$$|x(t) - \xi(t)| < \eta,$$

где $x(t)$ — решение системы (10), совпадающее с $\xi(t)$ при $t = 0$.

При рассмотрении поведения решений точной и осредненной систем на бесконечном временном интервале Н. Н. Боголюбовым также доказаны две основные теоремы.

Содержание первой теоремы сводится к следующему: если правые части системы (10) — почти периодические функции t равномерно по x , а также ограничены и равномерно непрерывны вместе со своими частными производными по x первого порядка в области $-\infty < t < \infty$, $x \in D_\rho$, где D_ρ — ρ -окрестность некоторого квазистатистического решения $y = y_0$ системы (11) и при этом вещественные части всех n корней характеристического уравнения

$$\text{Det} |Ip - f'(y_0)| = 0 \quad (13)$$

отличны от нуля, то всегда можно указать некоторые достаточно малые значения параметров ε' , σ_0 , σ , такие, что для всякого положительного $\varepsilon < \varepsilon'$ уравнение (10) будет иметь в σ_0 -окрестности точки y_0 единственное решение $x = x^*(t)$, определенное на всем интервале $(-\infty, \infty)$, почти периодическое, с частотным базисом функции $f(t, x)$. При этом можно найти такую функцию $\delta(\varepsilon)$, стремящуюся к нулю вместе с ε , что будет выполняться неравенство $|x^*(t) - y_0| \leq \delta(\varepsilon)$, $-\infty < t < \infty$.

Если вещественные части всех корней характеристического уравнения (13) отрицательны, то справедливо неравенство

$$|x(t) - x^*(t)| \leq ce^{-\gamma\varepsilon(t-t_0)}, \quad (14)$$

где c и γ — положительные постоянные и $x(t)$ — любое решение уравнения (10), отличное от $x^*(t)$ и удовлетворяющее неравенству $|x(t) - y_0| < \sigma_0$. Если же вещественные части всех корней характеристического уравнения (13) положительны, то можно найти такое $t_1 > t_0$, что будет выполняться неравенство

$$|x(t_1) - y_0| > \sigma_1. \quad (15)$$

Если s вещественных частей рассматриваемых корней отрицательны, а остальные $n - s$ — положительны, то в σ_0 -окрестности точки y_0

существует s -мерное точечное многообразие $\mathcal{M}_{t_0}$, такое, что из соотношения

$$x(t_0) \in \mathcal{M}_{t_0}$$

вытекает экспоненциальное стремление к нулю (при $t \rightarrow \infty$) разности $|x(t) - y_0|$, а из соотношения

$$x(t_0) \in \overline{\mathcal{M}_{t_0}}$$

следует справедливость неравенства (15).

Вторая теорема Н. Н. Боголюбова рассматривает поведение решений уравнения (10) в окрестности периодического решения $y = y(\varepsilon\omega t)$, $y(\varphi + 2\pi) = y(\varphi)$ соответствующей осредненной системы уравнений. При некоторых предположениях доказано существование в достаточно малой окрестности решения $y(\varphi)$ одномерного интегрального многообразия S_t системы (10), состоящего из решений этой системы, параметрическое представление которого имеет вид $x = f(t, \theta)$. Рассмотрение исходной системы на этом многообразии сводится к одному уравнению $\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon F(t, \theta)$. Причем в окрестности многообразия S_t решения системы (10) при достаточно малых ε ведут себя аналогично тому, как и решения системы (10) в окрестности решения $x^*(t)$ в предыдущих рассуждениях.

На основании теории Пуанкаре — Данжуа о преобразовании окрестности на себя Н. Н. Боголюбовым дан анализ индивидуальных решений на многообразии в случае, когда $f(t, x)$ — периодическая функция t с периодом T . Показано, что поведение решения $x = f(t, \theta)$, где θ определяется из уравнения

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon F(t, \theta), \quad \theta_n = \theta(t_0 + nT),$$

характеризуется числом $\bar{\nu} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n}{2\pi n}$ и может быть представлено в виде

$$x(t) = \Phi(\alpha_l t, \alpha_p t + \psi), \quad \psi = \text{const},$$

где $\alpha_l = \frac{2\pi}{T}$ («внешняя» частота), $\alpha_p = \frac{\alpha_l}{T} \bar{\nu}$ («собственная» частота).

Если $\bar{\nu}$ — иррационально, то каждое из решений $x(t)$, лежащее на интегральном многообразии S_t , является квазипериодической функцией t с двумя основными частотами α_l и α_p ; если $\bar{\nu}$ — рационально, то на интегральном многообразии существуют периодические решения с этими же основными частотами и любое непериодическое решение, лежащее на интегральном многообразии S_t , приближается к одному из таких периодических решений при $t \rightarrow \infty$. Если, кроме того, все $n - 1$ соответствующих характеристических показателей имеют отрицательные вещественные части, то любое решение уравнений (10), проходящее при $t = t_0$ через какую-либо точку области U_σ , приближается при $t \rightarrow \infty$ к одному из стационарных решений (к квазипериоди-

ческому в случае иррационального $\bar{\nu}$ или к периодическому в случае рационального $\bar{\nu}$).

Применение асимптотических методов к решению линейных дифференциальных уравнений эффективно проведено в работах И. З. Штокало, что подытожено в его монографии «Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами» (1960 г.). Им рассмотрены уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = [A + \varepsilon f(t)] x,$$

где A — постоянная n -мерная матрица и $f(t)$ — матрица так называемого класса Σ , т. е. матрица с элементами типа конечной суммы $\sum_k A_k e^{ikt}$ с постоянными коэффициентами A_k , x — вектор и ε — малый положительный параметр. Полученные им результаты распространяются на линейные дифференциальные уравнения с почти периодическими и квазипериодическими коэффициентами.

И. З. Штокало показал, что формальное решение указанных уравнений имеет вид

$$x = \left[U e^{iRt} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n y_n(t) \right] \xi,$$

где $y_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) — матрицы класса Σ и ξ — формальное решение уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\xi}{dt} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k \right) \xi.$$

Этим осуществляется «полное» преобразование исходной системы уравнений.

В процессе дальнейших исследований им рассмотрено «укороченное» преобразование этой же системы. Он показал, что первоначальную систему можно свести посредством «укороченного» преобразования

$$x = \left[U e^{iRt} + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k y_k(t) \right] \xi$$

к системе

$$\frac{d\xi}{dt} = \left[\sum_{k=0}^m \varepsilon^k A_k + \varepsilon^{m+1} R_m(t, \varepsilon) \right] \xi,$$

где $R_m(t, \varepsilon)$ — матрица класса Σ , регулярная относительно ε в окрестности $\varepsilon = 0$. Таким образом, получается точное решение основной системы уравнений в «укороченном виде».

Пользуясь этим результатом, Штокало нашел вид m -го приближения точного решения исходной системы уравнений и установил соответствующую оценку погрешности.

И. 3. Штокало всесторонне исследовал уравнение

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t) x = 0,$$

в котором

$$a_k(t) = a_k^0 + \varepsilon f_k(t) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

и ε по модулю достаточно мало.

Полученные результаты в отношении линейных систем с рассмотренными переменными коэффициентами были использованы им впоследствии для установления критериев устойчивости и неустойчивости решения этих систем.

Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений изложены также в книге С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиля и Л. Д. Николенко (1966 г.).

Представляют интерес теоремы Ю. А. Митропольского (1955, 1964 гг.), относящиеся к обоснованию одночастотного метода в задачах теории колебаний, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями с медленно меняющимися коэффициентами

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^N a_{ij}(\tau) \dot{q}_j \right\} + \sum_{i=1}^N b_{ij}(\tau) q_i = \varepsilon \bar{Q}_j(\tau_1, \theta_1, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \varepsilon) \quad (16)$$

$$(j = 1, 2, \dots, N).$$

Им доказана теорема о том, что всякое решение уравнений (16), которое исходит из точки, достаточно близкой к начальной точке некоторого двупараметрического семейства решений, и существование которого доказано, будет оставаться достаточно близко к нему для всех τ из некоторого конечного интервала $[0, L)$. Доказана также теорема о поведении решений в окрестности этого двупараметрического семейства решений для всех $t \geq T^*$. Приведем основное содержание теоремы Митропольского для уравнений

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \omega_k^2 x_k = \varepsilon X_k(x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N, \varepsilon) + \varepsilon F_k(t), \quad (17)$$

$$k = 1, \dots, N;$$

$$F_k(t) = U_k(t) \cos \theta, \quad \omega_k = \text{const}; \quad \tau = \varepsilon t, \quad \frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau).$$

Теорема утверждает, что если правые части системы (17) удовлетворяют условию Липшица с некоторой постоянной λ_k , а функции $F_k(t)$ ограничены на любом отрезке $0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}$ и выполняется еще некоторое неравенство, то для решений системы (17) выполняются неравенства

$$|x_k(t)| \leq M_k, \quad |\dot{x}_k(t)| \leq N_k \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

при всех $t \geq T^*$, где M_k и N_k — некоторые постоянные. Ю. А. Митропольским доказана также теорема о сильной устойчивости двупараметрического семейства решений.

В теоремах Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского были заложены основные идеи нового метода, получившего название метода интегральных многообразий, который позволил исследовать поведение решений различных классов нелинейных систем дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр⁶. Дальнейшее развитие этот метод получил в работах Митропольского и его учеников. Были установлены теоремы о существовании и свойствах интегральных многообразий для систем $\frac{dx}{dt} = X(x) + \varepsilon Y(\nu t, x, t)$, а также для систем с переменными коэффициентами $\frac{dx}{dt} = X(\tau, x) + \varepsilon Y(\tau, \theta, x, \varepsilon)$. В ряде работ этот метод был использован для исследования поведения решений нелинейных систем, описывающих быстрые и медленные движения, $\frac{dx}{dt} = X(t, x, y)$, $\frac{dy}{dt} = \varepsilon Y(t, x, y)$.

Как известно, асимптотические методы Крылова — Боголюбова формально перенесены для получения приближенных решений бесконечных систем, а также уравнений в частных производных. Математическое обоснование законности такого переноса было дано в ряде работ. Так, Ф. С. Лось обобщил (1950 г.) на случай гильбертова пространства теорему Н. Н. Боголюбова об оценке разности между точным решением уравнений в стандартной форме и его первым приближением на конечном временном интервале. З. Ф. Сирченко обобщила (1964 г.) на случай бесконечномерных пространств теорему Боголюбова о существовании и свойствах почти периодического решения уравнений в стандартной форме в окрестности положения равновесия соответствующей осредненной системы.

Для уравнений специального вида

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(t) + P(t, \varphi, h, \varepsilon), \quad \frac{dh}{dt} = H(t)h + Q(t, \varphi, h, \varepsilon),$$

где h, Q — вектор-функции со значениями в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $H(t)$ — ограниченный линейный оператор, вещественные части всех точек спектра которого отрицательны, Ю. А. Митропольским при некоторых довольно общих предположениях доказано (1964 г.) существование и условная устойчивость одномерного интегрального многообразия, и при этом рассмотрение указанных уравнений сведено к рассмотрению одного уравнения относительно φ . Им же исследовано поведение решений системы, близкой к точно интегрирующейся $\frac{dx}{dt} = X(\varepsilon) + \varepsilon Y(t, x)$, где $x(t)$, $X(t)$, $Y(t, x)$ — вектор-функции со значениями в пространстве $\mathcal{H}$, в окрестности положения равновесия соответствующей вырожденной системы в случае, когда ограниченный

⁶ Интегральное K -параметрическое многообразие состоит из K -параметрического семейства решений $x = x(t, C_1, \dots, C_K)$ системы n дифференциальных уравнений.

линейный оператор $B = \frac{\partial X(x_0)}{\partial x}$ имеет два простых собственных значения $\pm i\omega$, а остальные собственные значения имеют нижнюю грань, отличную от нуля.

О. Б. Лыковой доказано (1964 г.) существование двумерного локального интегрального многообразия, обладающего свойством условной устойчивости, на котором рассмотрение исходной бесконечномерной системы сводится к рассмотрению двух уравнений.

В. И. Фодчук применил (1963 г.) метод интегральных многообразий также для исследования систем с запаздывающим аргументом. Этот метод К. В. Задирака распространил (1965 г.) для исследования колебательных процессов, описываемых уравнениями вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x, z, t), \quad \varepsilon \frac{dz}{dt} = F(x, z, t).$$

О. Б. Лыкова успешно применила (1964 г.) его для доказательства существования квазипериодических решений у канонической системы Гамильтона, подверженной воздействию малых возмущений.

В последнее время появился ряд интересных работ, связанных с использованием метода Ньютона об ускоренной сходимости. Так, применяя идею Мозера о сглаживающем операторе, Ю. А. Митропольский и А. М. Самойленко рассмотрели (1964 г.) вопрос о структуре траекторий на тороидальной поверхности. Ими доказана теорема, устанавливающая, что при ряде ограничений уравнения на торе $\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \Delta + f(\varphi)$, где $f(\varphi)$ — периодическая функция по $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ с периодом 2π и имеет непрерывные производные до l -го порядка включительно, с помощью замены переменных $\varphi = \theta + \Phi(\theta)$ сводится к чистому вращению $\frac{d\theta}{dt} = \omega$. В другой работе (1964 г.) Ю. А. Митропольский с помощью метода, обеспечивающего «ускоренную» сходимость (объединение метода последовательных замен, применяемого в нелинейной механике, и метода интегральных многообразий), рассмотрел задачу о построении общего решения системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dh}{dt} = Hh + F(h, \varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \nu + f(h, \varphi),$$

где h, F — n -векторы, φ, f — n_0 -векторы, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{n_0})$ — вещественные линейно независимые числа. Приведен итерационный процесс с ускоренной сходимостью, с помощью которого определяется аналитическая функция, дающая возможность произвести замену переменных в исходных уравнениях, которая сводит их к точно интегрирующимся. Найден аналитический вид общего решения исходных уравнений и показано, что с течением времени оно стремится к некоторому квазипериодическому решению.

Более подробно о работах Ю. А. Митропольского и его учеников говорится в разделе «Асимптотические методы в нелинейной механике» 2-й книги IV тома.

3

Теория устойчивости движения

Теория устойчивости движения была создана А. М. Ляпуновым в 1880—1902 гг. Все позднейшие исследования в этой области так или иначе являются развитием методов Ляпунова⁷. Работы Ляпунова читаются с большим трудом, несмотря на его безупречную по ясности манеру излагать свои рассуждения. Это объясняется тем, что Ляпунов решал только феноменальные по своей трудности задачи и разрешал их исчерпывающим образом, создавая при этом совершенно новые методы исследования.

И не раз случалось так, что Ляпунов не публиковал такие свои исследования (по его мнению незаконченные), за которые другой автор получил бы почетное место в науке. Примером этого может служить его работа «Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движений», обнаруженную в 1954 г. В. И. Смирновым в архиве Ляпунова и изданную в ЛГУ в 1963 г. В своих работах Ляпунов не только впервые правильно поставил вопросы теории устойчивости и создал глубокие методы решения этих вопросов, но и вообще, забегая во времени вперед, развил далеко идущую качественную теорию дифференциальных уравнений во многих направлениях.

Одновременно с А. М. Ляпуновым вопросы качественной теории были развиты и в исследованиях А. Пуанкаре. Но подход к этим задачам в работах Пуанкаре и Ляпунова существенно различен. Пожалуй, только в одном пункте Пуанкаре и Ляпунов решали почти одинаково поставленную задачу. Именно Пуанкаре построил метод решения вопроса о качественной картине расположения интегральных кривых в окрестности точки $(0, 0)$ для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + P(x, y); \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + Q(x, y),$$

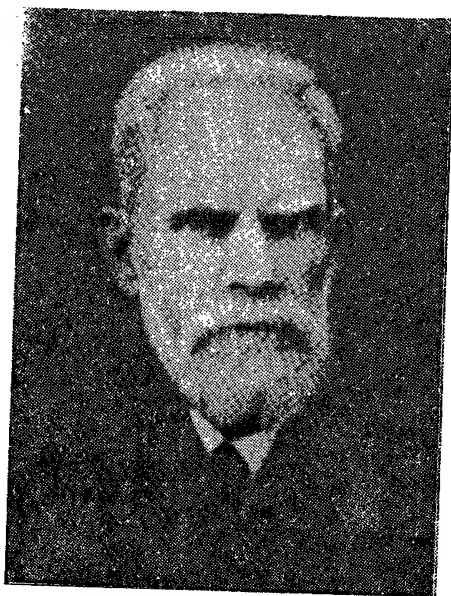
где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — полиномы, не имеющие свободных и линейных членов относительно x, y , а уравнение

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

имеет два чисто мнимых корня $\lambda_1 = \alpha i$, $\lambda_2 = -\alpha i$. Он показал, что в этом случае интегральные кривые будут или спиралями, закручивающимися к началу координат, или замкнутыми кривыми. У Ляпунова этот же вопрос был решен как частный случай более общего вопроса об устойчивости нулевого решения системы n уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{l=1}^n -a_{kl}x_l + f_k(x_1, \dots, x_n) \quad (k = 1, \dots, n),$$

⁷ См.: В. И. Смирнов. Обзор научного творчества А. М. Ляпунова. — ПММ, 1948, т. XII, вып. 5, стр. 479—560; А. М. Лукомская. Александр Михайлович Ляпунов. Под ред. акад. В. И. Смирнова. Изд-во АН СССР, М., 1953; Н. П. Еругин. Первый метод Ляпунова. — Дифференциальные уравнения, 1967, т. III, вып. 4; В. В. Румянцев. Второй метод Ляпунова. — В кн.: Механика в СССР за 50 лет. «Наука», М., 1969.



А. М. Ляпунов.

где $f_1, \dots, f_n$ — ряды относительно $x_1, \dots, x_n$, не имеющие свободных и линейных членов, матрица $A = \|a_{ik}\|$ имеет два чисто мнимых характеристических числа, а остальные характеристические числа будут с отрицательными вещественными частями.

Интенсивное развитие теории устойчивости движения, продолжающее исследования А. М. Ляпунова, началось впервые в Казани в 1930 г. Н. Г. Четаевым, К. П. Персидским, И. Г. Малкиным, Г. В. Каменковым, П. А. Кузьминым (под руководством Н. Г. Четаева). Исследования казанской школы велись и до настоящего времени ведутся как в теоретическом, так и в прикладном плане. Сейчас эту школу по теории устойчивости возглавляют П. А. Кузьмин, а по качественной теории — М. И. Альмухаметов.

По общей теории устойчивости глубокие исследования проводит В. М. Матросов.

В Москве работы по теории устойчивости движения велись в Астрономическом институте Г. Н. Дубошиным и Н. Д. Моисеевым. Дубошин начиная уже с 1934 г. выполнил большой цикл работ по различным вопросам теории устойчивости: устойчивость решений канонических систем, неголоморфных систем, уравнения $\ddot{x} + p(t)x = 0$, при постоянно действующих возмущениях (что потом получило широкое развитие) и др. Он же в 1952 г. написал курс «Основы теории устойчивости движения».

В 1934 г. начал работы по теории устойчивости, в особенности в астрономии, и Н. Д. Моисеев. Он же провел многие исследования по анализу различных понятий устойчивости.

А. М. Ляпунов создал два метода исследования вопросов теории устойчивости для уравнений вида

$$\frac{dx_k}{dt} = p_{1k}(t)x_1 + \dots + p_{nk}(t)x_n + f_k(t, x_1, \dots, x_n) = F_k(t, x) \quad (18)$$

$$(k = 1, \dots, n),$$

где f_k — ряды относительно $x_1, \dots, x_n$, начинающиеся с членов не ниже второй степени⁸. Обозначим через x вектор $(x_1, \dots, x_n)$, $x^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Тривиальное решение системы (18) $x = 0$ называется по Ляпунову асимптотически устойчивым, если можно указать по всякому заданному числу $\varepsilon > 0$ такое $\delta > 0$, что при $x^2(t_0) < \delta$ имеем $x^2(t) < \varepsilon$

⁸ Мы не останавливаемся на предположениях Ляпунова относительно зависимости системы (18) от t .

для $t \geq t_0$. Если, кроме того, $x^2(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то нулевое решение $x = 0$ называется асимптотически устойчивым. Линейную систему, полученную из (18) при $f_k = 0$, называют по Ляпунову системой первого приближения. Ляпунов показал, что решение этой линейной системы (коэффициенты $p_{ik}(t)$ ограничены при $t \geq t_0$), грубо говоря, состоит из функций вида ⁹ $e^{-at}\varphi(t)$, где a он назвал характеристическими числами. Он показал также, что каждая линейная система имеет не более n различных характеристических чисел; это очевидно, когда p_{ik} — постоянные. Ляпунов ввел в рассмотрение глубокую классификацию линейных систем, выделив три класса систем: приводимые, правильные и неправильные.

В основе первого метода Ляпунова лежит построенное им общее решение системы (18) в области $x^2 < \delta$, $0 \leq t < T$. Если система первого приближения правильная и все ее характеристические числа положительны, то это общее решение сохраняет силу в области $x^2 < \delta$, $0 \leq t < \infty$, где δ — малое. Уже само по себе это построение общего решения в виде особых сходящихся рядов является весьма серьезным достижением. Система (18) занимает промежуточное положение между системами, рассматриваемыми в известных теоремах существования Пикара и Коши, так как правые части этой системы голоморфны относительно неизвестных $x_1, \dots, x_n$ и только непрерывны относительно t . Построенное Ляпуновым общее решение замечательно тем, что во многих случаях дает возможность видеть качественную картину поведения интегральных кривых в окрестности точки равновесия $x = 0$. Именно из вида этого общего решения Ляпунов и получил тот факт, что если система первого приближения есть правильная, а все характеристические числа положительны, то нулевое решение $x = 0$ будет асимптотически устойчиво. Отсюда же Ляпунов установил и так называемую условную устойчивость, которая характеризуется тем, что существует k -параметрическое семейство решений $x(t, C_1, \dots, C_k) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, когда имеется k положительных характеристических чисел. Кроме того ¹⁰, здесь решение $x = 0$ будет устойчивым, если начальные значения $x(t_0)$ подчинить условию

$$x(t_0) \in x(t, C_1, \dots, C_k) \quad (t \geq 0, C_1^2 + \dots + C_k^2 \leq \Delta,$$

где Δ — малое).

Результаты исследований многих ученых по качественной теории дифференциальных уравнений, вышедшие после Ляпунова, или содержат то, что открыто Ляпуновым как факт условной устойчивости на основе первого метода, или являются некоторым обобщением этого.

Г. Н. Дубошин показал (1951 г.), что общее решение, полученное Ляпуновым, позволяет решать более общие задачи, чем известный теперь метод малого параметра Пуанкаре. Метод построения общего решения Ляпунова был использован Н. П. Еругиным (1946 г.) при построении

⁹ $\varphi(t)e^{-\alpha t} \rightarrow 0$ и $\varphi(t)e^{\alpha t}$ — неограничена при $t \rightarrow \infty$, если $\alpha > 0$.

¹⁰ Из $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ не следует сама собой устойчивость в смысле Ляпунова — это показал Н. Н. Красовский.



Г. Н. Дубошин.

решений в окрестности иррегулярной точки в виде ряда, равномерно сходящегося в окрестности этой точки.

Второй метод Ляпунова не требует построения решений и не связан с видом правых частей заданной системы (18). Он основан на построении (или существовании) некоторой так называемой функции Ляпунова $V(t, x_1, \dots, x_n)$, обладающей рядом свойств. Пусть дифференцируемая функция $V(t, x_1, \dots, x_n) > 0$ при $x^2 > 0$ ($x^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$). Тогда она называется знакоопределенной. Пусть еще $V(t, x_1, \dots, x_n) \rightarrow 0$ при $x^2 \rightarrow 0$ равномерно относительно t в промежутке $t \geq 0$. Если теперь

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k} f_k \leq 0,$$

то нулевое решение $x = 0$ будет устойчивым. Если же $\frac{dV}{dt} < 0$, то устойчивость будет асимптотической. Если $\frac{dV}{dt} > 0$, $\frac{dV}{dt} \rightarrow 0$ при $x^2 \rightarrow 0$ равномерно относительно $t \geq 0$, а $V > 0$ при некоторых x , как угодно близких к $x = 0$, то нулевое решение $x = 0$ неустойчиво. Здесь, таким образом, мы не строим решения и не связаны с определенным видом правых частей f_k (обеспечивающих только существование решений в области $x^2 < \delta$, $t \geq 0$). Можно несколько изменять предположения относительно функции Ляпунова $V(x, t)$, что и делал как сам Ляпунов, так и многие другие математики.

Во втором методе Ляпунова, таким образом, стоит задача построения функции Ляпунова в разных случаях как чисто теоретических, так и прикладных. Здесь сразу же возникает вопрос о том, при каком поведении решений заданной системы дифференциальных уравнений можно быть уверенным в существовании соответствующей функции Ляпунова, порождающей это поведение решений, т. е. стоит вопрос об обратимости теорем Ляпунова или им подобных.

4

Работы казанской школы

Все работы в области математики и механики Н. Г. Четаева связаны с теорией устойчивости движения. Отметим его работы об обращении известной теоремы Лагранжа ¹¹.

¹¹ Положение равновесия материальной системы устойчиво, если в этом положении функция сил имеет изолированный максимум.

Продолжая работы Ляпунова, Четаев решил задачу о неустойчивости изолированного положения равновесия, когда функция сил не является максимумом, в наиболее общем для механики случае. Это исследование Четаева опирается на его метод установления факта неустойчивости. Мы говорим «метод», а не «теорема», так как общая мысль, заключенная в этой теореме, состоит в том, чтобы построить функцию, подобную функции Ляпунова, не для всей окрестности точки равновесия, а для некоторого сектора. Этот метод теперь по-разному варьируется не только в теории устойчивости, но и в качественной теории дифференциальных уравнений для изучения поведения решений в секторе¹². Большое развитие метод Четаева получил в работах Н. Н. Красовского.



Н. Н. Красовский.

Теоремы Н. Г. Четаева о неустойчивости получили весьма широкое распространение. Теперь часто пользуются методом Четаева построения функции Ляпунова в виде линейных связок первых интегралов.

Большой и важный цикл работы Н. Г. Четаева посвящен методам решений вопроса об устойчивости движения по первому приближению, коэффициенты которого суть функции t . Эти исследования Четаева продолжали многие его ученики: Б. С. Разумихин, Н. Н. Красовский, В. В. Румянцев, Е. А. Барбашин и др.

Во многих работах Четаева рассматривается вопрос о явлениях устойчивости в природе в самой общей постановке задачи равновесных явлений. Мы не касаемся здесь работ Четаева по устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости.

Исследования Четаева по качественной теории дифференциальных уравнений и приближенным методам интегрирования дифференциальных уравнений на основе теории устойчивости, по-видимому, и в дальнейшем будут играть роль источника новых исследований в разных областях физики и математики. Этот метод теории устойчивости решения многих математических задач весьма эффективно развивается Н. Н. Красовским и др. Отметим, что небольшая, но весьма содержательная монография Четаева «Устойчивость движения» (1946, 1965 гг.) является первой, после Ляпунова, книгой по устойчивости движения и основана на многих работах Четаева.

Вопрос о существовании функции Ляпунова или вопрос об обращении теорем Ляпунова впервые начал изучать К. П. Персидский

¹² См., например, Н. П. Е р у г и н. Теоремы о неустойчивости. — ПММ, 1952, т. XVI, в. 3.

(1935—1937 гг.). Позднее эту же задачу при разных предположениях относительно правых частей $f_k(t, x_1, \dots, x_n)$ решали И. Г. Малкин, Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский, В. И. Зубов, Массера, Курпвейль, Вркоч, Йошизава. Особенно интересна своей общностью работа Е. А. Барбашина за 1947 г. (вышедшая одновременно с работой Массера), в которой рассматривается и вопрос о существовании функции Ляпунова. Обобщая это исследование Барбашина, Н. Н. Красовский доказал существование сколь угодно гладкого сечения у дисперсионной динамической системы, правые части уравнений которой удовлетворяют лишь условиям Липшица. Этот результат был затем использован для решения задачи устойчивости при постоянно действующих возмущениях. Весьма подробно исследовал вопрос о существовании функций Ляпунова и Четаева, а также сравнил исследования по этому вопросу Н. Н. Красовский (1959 г.).

Во всех случаях задачи устойчивости доказано существование функций Ляпунова и Четаева (и достаточно гладких). Это очень важный факт. Следует, однако, иметь в виду, что на самом деле функцию Ляпунова или Четаева не всегда удается построить даже в том случае, когда вопрос об устойчивости решен качественными методами. Если бы все-таки в этом случае удалось построить функцию Ляпунова, то мы получили бы, по-видимому, новый способ такого построения.

Те случаи, когда имеются характеристические числа первого приближения системы (18), равные нулю, и нет отрицательных характеристических чисел, Ляпунов назвал сомнительными. Сам он рассматривал некоторые системы в сомнительных случаях с большой полнотой, свойственной всем работам Ляпунова. Но в целом этот вопрос остается мало изученным. Рассматривались задачи устойчивости движения и в сомнительных случаях, когда правые части $f_k(t, x_1, \dots, x_n)$ не зависят от t (Г. В. Каменков, И. Г. Малкин).

Эффективные критерии устойчивости и неустойчивости решения линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими и квазипериодическими коэффициентами получены И. З. Штокало в его работах: «Критерий устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами» (1946 г.) и «Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами» (1960 г.).

Установив формальное преобразование, сводящее рассматриваемую систему линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами указанного выше вида к системе с постоянными коэффициентами, И. З. Штокало построил для нее детерминанты Гурвица и разложил их в формальные ряды по степеням малого параметра ε .

Из полученного результата вытекает: 1) если первые не исчезающие члены в разложении всех указанных детерминантов положительны, то решение исходной системы обладает сильной устойчивостью в положительном направлении при достаточно малых ε ; 2) если хотя бы для одного из детерминантов Гурвица в его разложении первый исчезающий член отрицателен, то исходная система обладает неогра-

ническим решением при $t \rightarrow \infty$ для достаточно малых значений параметра ε .

При выводе указанного критерия не налагалось никаких ограничений на корни соответствующего характеристического уравнения.

Мы не останавливаемся на прикладных вопросах, где теория устойчивости играла существенную роль. Работы в этом направлении проводились особенно интенсивно начиная с 1945 г. Например в работе М. В. Келдыша «Шимми переднего колеса трехколесного шасси» (1945 г.) подробно исследовалось явление самовозбуждения на передних колесах шасси самолета (явление «шимми»). Здесь эта задача была впервые математически поставлена и решена с точки зрения устойчивости.

Позднее Г. К. Пожарицкий и В. В. Румянцев провели ряд исследований по устойчивости движения твердого тела с жидким наполнением. Пожарицкий предложил прием решения задачи минимума потенциальной энергии в задаче устойчивости движений твердого тела с полостью, частично заполненной жидкостью. В 1965 г. вышла монография В. В. Румянцева и Н. Н. Моисеева «Динамика тела с полостями, содержащими жидкость». Г. К. Пожарицкий опубликовал (1962—1965 гг.) ряд статей по динамике и устойчивости механических систем с сухим трением и частичной диссипацией. А. А. Богоявленский, прилагая теорию групп к решению уравнений динамики, указал (1961—1966 гг.) случаи наличия ранее неизвестных линейных относительно скоростей первых и частных интегралов уравнений движения механических систем. Л. М. Мархашов предложил (1961 г.) оригинальный способ нахождения в пространстве параметров системы поверхностей, таких, что смена устойчивости на неустойчивость может происходить только на них.

На кафедре теоретической механики МГУ были также выполнены многие работы. И. Л. Хмилевский показал (1960 г.), что не существует функции координат и скоростей неголономной системы, такой, что ее варьирование по Гамильтону приведет к уравнениям движения. В. И. Киргетов вывел (1958 г.) необходимые и достаточные условия для перестановочности операций $d\delta$ и δd по отношению к заданному набору обобщенных координат неголономной системы. А. М. Табаровский, следуя идеям К. П. Персидского, предложил (1958 г.) критерий асимптотической устойчивости, сняв требование определенной положительной производной $\dot{V}$ от функции Ляпунова V и заменив его требованием неограниченности по времени функций V в любой точке окрестности нуля.

В. И. Зубов провел исчерпывающие исследования уравнений свободного движения твердого тела в случае Эйлера, в результате которого была установлена аналитическая природа движений при любом выборе начальных условий и указаны точные пределы нестационарных колебаний оси собственного вращения.

5

Разработка теории линейных систем в развитие общей классификации таких систем, введенной А. М. Ляпуновым

Рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = XP(t), \quad (19)$$

где $P(t)$ — непрерывная n -го порядка матрица-функция, ограниченная в области $t \geq 0$; X — фундаментальная интегральная матрица.

А. М. Ляпунов разбил такие системы на три класса. Первый класс — это приводимые системы, которые преобразованием $Y = XZ(t)$, где дифференцируемая матрица преобразования $Z(t)$ ограничена вместе с $Z^{-1}(t)$, переводятся в систему вида (19) для Y с постоянной матрицей P . Матрица X таких систем имеет вид $X = e^{-At}Z(t)$, где A — постоянная матрица. Второй класс — это правильные системы, интегральная матрица которых, как показали Ю. С. Богданов и В. П. Басов, имеет вид

$$X = e^{-At}\bar{X}(t),$$

где A — постоянная матрица, а элементы $\bar{x}_{kl}$ и $\bar{\bar{x}}_{kl}$ матрицы $\bar{X}(t)$ и $\bar{X}^{-1}(t)$ обладают свойством: функции $e^{\alpha t}\bar{x}_{ik}(t)$ и $e^{\alpha t}\bar{\bar{x}}_{ik}(t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ для любой постоянной $\alpha < 0$. Вещественные части характеристических чисел матрицы A характеризуют поведение решений в обоих случаях при $t \rightarrow \infty$ и называются по Ляпунову характеристическими числами системы (19). Все остальные системы (19) называются по Ляпунову неправильными.

После 1941 г. была проделана большая работа по разработке теории систем (19). Это важно как для общей теории линейных дифференциальных уравнений, так и, как показал Ляпунов, для теории устойчивости движения, потому что система (19) является для общего случая системы первым приближением и во многих случаях определяет поведение решений общей нелинейной системы.

Если система первого приближения приводимая, то вопрос о поведении решений нелинейной системы во многих случаях может быть рассмотрен более подробно.

В 1942 г. Н. П. Еругин на основе аппарата И. А. Лаппо-Данилевского построил общую теорию приводимых систем. Были получены необходимые и достаточные признаки приводимых систем, а также построены методы исследования приводимости систем. В частности, исследована приводимость некоторых классов систем

$$\frac{dX}{dt} = XP(t),$$

когда матрица $P(t)$ имеет предельное¹³ значение $P(t) \rightarrow P_0, t \rightarrow \infty$. Для установления вида решения (приводимости) $X = e^{At} Z(t)$, где A — постоянная матрица и $Z(t)$ — матрица, ограниченная вместе с $Z^{-1}(t)$, были предложены, в частности, два метода последовательных приближений, основанных на методе Ляпунова аналитического построения решения в окрестности точки равновесия.

Эти два метода последовательных приближений потом применялись В. В. Хорошиловым (1950—1951 гг.), Л. И. Донской (1951—1954 гг.), А. К. Гахановым, В. П. Басовым (1951—1956 гг.) и И. М. Рапопортом (1954 г.) для построения матрицы X уравнения $\dot{X} = X P(t)$, где $P(t) \rightarrow P_0, t \rightarrow \infty$ в окрестности точки $t = \infty$ в виде равномерно сходящегося ряда. Эта форма решения позволяет получить оценки остаточных членов асимптотических разложений матрицы X на всем промежутке $t \geq t_0$.

В. В. Хорошилов построил (1950 г.) решение $X(t)$ в случае, когда

$$P = P_0 + \frac{P_1}{t} + \frac{P_2}{t^2} + \dots,$$

вещественные части характеристических чисел матрицы P_0 различны и для системы двух уравнений, когда матрица P_0 любая. Отсюда он получил новые представления (именно в виде равномерно сходящихся рядов в окрестности $t = \infty$) решений уравнений Уиттекера и Бесселя. Во второй работе Хорошилов использовал метод преобразования к некоторому почти треугольному виду матрицы $P(t)$ на основании способа, предложенного в книге Н. П. Еругина «Приводимые системы» (1946 г.), для исследования вопроса приводимости.

Следуя В. В. Хорошилову, Л. И. Донская рассмотрела (1951—1954 гг.) систему трех уравнений во всех случаях матрицы P_0 . Она же построила решение в окрестности $t = \infty$ для случая, когда

$$P(t) = \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t^2} + \dots,$$

где $P(t)$ — матрица n -го порядка, т. е. когда $t = \infty$ — регулярная особая точка. Уже в работах И. А. Лаппо-Данилевского было показано, что если среди характеристических чисел матрицы A_1 нет таких, которые отличаются на целое число, то

$$X = t^{A_1} Z(t),$$

где $Z(t)$ — регулярная вместе с $Z^{-1}(t)$ в окрестности точки $t = \infty$. Л. И. Донская рассмотрела этот вопрос при всех предположениях относительно A_1 . Она показала, что $X = t^W Z(t)$, где $Z^{-1}(t)$ не всегда голоморфна в окрестности $t = \infty$, а W — постоянная, не всегда равная, или даже подобная матрице A_1 . После Донской этот же вопрос иначе рассмотрел Ф. Р. Гантмахер в своей книге «Теория матриц» (1953 г.). Он внес поправку в известную теорему Биркгофа.

¹³ Мы не останавливаемся на других случаях, приведенных в работе, когда $P(t)$ не имеет предела при $t \rightarrow \infty$.

Большой цикл исследований в этом направлении провел В. П. Басов (1951—1956 гг.) при значительно более общих предположениях, чем его предшественники. В частности, он первый построил способ получения одного решения или группы решений, когда нельзя что-нибудь сказать о других решениях. На этом были основаны некоторые исследования, проведенные А. К. Гахановым, который рассматривал вопрос о приводимости систем трех уравнений вида

$$\dot{X} = X \left[P_0 + \frac{P_1}{t} + \dots \right],$$

где P_k — постоянные матрицы и $P_0 \neq \|0\|$. Гаханов нашел для этого случая необходимые и достаточные условия приводимости.

И. М. Рапопорт рассмотрел систему

$$\frac{dX}{dt} = X [P^{(0)} + P],$$

где $P_0 = [\omega_1(t), \dots, \omega_n(t)]$, $\omega_i(t) \in L(t^*, t_1)$ с произвольным конечным t_1 и $P \in L(t^*, \infty)$. Такую систему он назвал диагональной. Он предположил еще, что $\operatorname{Re} \omega_k(t) - \operatorname{Re} \omega_l(t) \neq 0$, $k \neq l \neq 0$, и решение в окрестности $t \rightarrow \infty$ построил по методу последовательных приближений главы IV работы Н. П. Еругина «Приводимые системы».

Рассмотренную в книге Еругина систему Рапопорт называет L -системой и к ней применяет ту же последовательность вычислений, которой пользуется Еругин и которая порождается методом последовательных приближений, разработанным Ляпуновым в его первом методе. В «Приводимых системах» этот метод применяется к более общим системам, однако не затрагивается вопрос о приведении заданной системы к L -системе, что делает Рапопорт¹⁴. В § 3 книги «Асимптотические методы» (1954 г.) Рапопорт этому методу последовательных приближений придает намного более общий характер (в виду системы n уравнений и кратных характеристических чисел матрицы $A_0(t)$), когда $\dot{X} = X [A_0(t) + A(t)]$, хотя одновременно и огрубляет этот метод, так как таким образом не может изучить уравнения, рассмотренные до него в работах Н. П. Еругина, В. В. Хорошилова, Л. И. Донской и В. П. Басова. Все эти работы относятся к построению решений в окрестности $t = \infty$ в виде равномерно сходящихся рядов.

Многие ученые рассматривали вопрос об устойчивости линейных систем с переменными коэффициентами. После К. П. Персидского (1946 г.) этими вопросами занимались, например, Н. И. Гаврилов (1952 г.) и Р. Э. Виноград (1952 г.), который, обобщая результаты Т. Важевского (1948 г.) и Г. А. Антосиевича (1951 г.), распространил признаки устойчивости и неустойчивости, полученные им, и на нелинейные системы.

¹⁴ По-видимому, первым теорию приведения заданной системы к L -системе разработал еще в 1940 г. Чезари и получил условия устойчивости линейных систем. Преобразование к виду L -систем и более сложных уже выполнял В. В. Хорошилов до 1951 г.

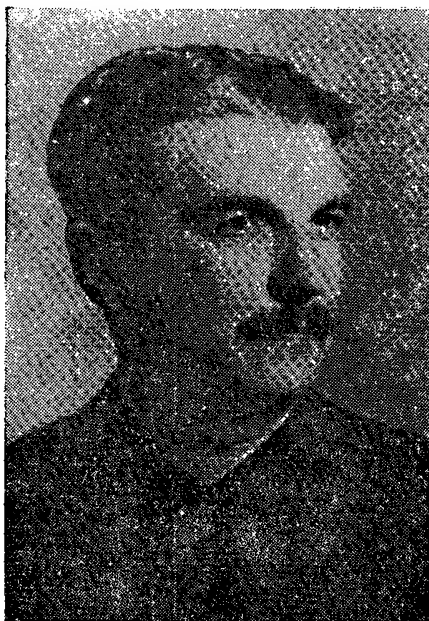
Вопрос о приводимости системы двух уравнений, когда матрица $P(t)$ является квазипериодической, при весьма общих предположениях рассмотрел А. Е. Гельман (1957—1965 гг.). Он показал также неустойчивость свойства приводимости как функций от частот матрицы $P(t)$. Вслед за Гельманом и пользуясь его методом, систему n уравнений такого же типа рассмотрела Л. Я. Адрианова (1962 г.). Вопрос о матрице приведения, зависящей от малого параметра, рассматривал К. А. Бреус (1955 г.). В. Г. Штелик выделил (1958 г.) новые классы приводимых систем. Большой цикл работ, посвященных системе линейных уравнений с квазипериодическими коэффициентами, выполнили В. Х. Харасахал (1961—1965 гг.) и его ученики. Они получили ряд теорем относительно свойств матриц, приводящих заданную систему к системе с постоянными коэффициентами, и признаков¹⁵ приводимости таких систем.

Сразу после 1945 г. ряд результатов по линейным системам в развитие программы Ляпунова получил Ю. С. Богданов (1963 г.). Впервые необходимые и достаточные условия (по структуре решений) правильности системы были получены В. П. Басовым (1952 г.) и Ю. С. Богдановым. Систематическое исследование асимптотических характеристик линейных дифференциальных уравнений было проведено К. П. Персидским (1935—1960 гг.), который, в частности, ввел важное понятие устойчивости (и неустойчивости) характеристических чисел относительно вариации коэффициентов и доказал, что характеристические числа приводимых систем устойчивы, т. е. бесконечно малые вариации коэффициентов системы вызывают бесконечно малые изменения ее характеристических чисел. Устойчивости характеристических чисел посвящены также работы Б. Ф. Былова (1950 г., 1954 г.), Р. Э. Винограда (1953 г., 1958 г.), Д. М. Гробмана (1952 г., 1958 г.), Б. П. Демидовича (1952 г.). Были найдены сначала достаточные, а затем — необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических чисел правильной системы линейных дифференциальных уравнений. Указаны конкретные правильные системы с неустойчивыми характеристическими числами, оценен, а в некоторых случаях и вычислен, скачок наибольшего и наименьшего характеристического числа при вариации коэффициентов, исчезающих на бесконечности (Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий).

В последнее время наметился новый метод исследований асимптотики решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Интересные исследования по теории обобщенных характеристических чисел и на основании этого по асимптотической качественной теории дифференциальных уравнений проводит В. М. Миллионщиков (1965—1966 гг.). Его работы тесно связаны с понятием предельного решения неавтономной системы дифференциальных уравнений, введенного в рассмотрение В. В. Немыцким. Обращают на себя внимание исследования Н. А. Изובה (1965 г.).

¹⁵ Эти признаки основаны на трудно проверяемых предположениях.



Ю. С. Богданов.

Ю. С. Богданов, продолжая рассуждения К. П. Персидского и Р. Э. Винограда, показал следующее. Пусть дана правильная система

$$\frac{dX}{dt} = XP(t) \quad (19)$$

и последовательность

$$t_1, t_2, \dots \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Полагаем $Q_k(t) = P(t)$ при $0 \leq t \leq t_k$ и вне этого промежутка распространяем периодически с периодом $\omega = t_k$

$$\frac{dX}{dt} = XQ_k(t), \quad Q_k(t + t_k) = Q_k(t). \quad (21)$$

Ставится вопрос: существует ли последовательность (20) такая, что предельные значения характеристических чисел системы (21) при $k \rightarrow \infty$ будут равны характеристическим числам системы (19). Ю. С. Богданов показал,

что существуют системы (19), для которых аппроксимирующей последовательности (20) нет. Но для каждой системы (19) существует линейное преобразование Ляпунова $Z(t)$ (ограниченное вместе с $Z^{-1}(t)$), переводящее систему (19) в такую систему, для которой аппроксимирующая последовательность (20) существует. Богданов показал (1963 г.), что каждую линейную систему с ограниченными коэффициентами ляпуновским¹⁶ линейным преобразованием можно перевести в другую линейную систему, коэффициенты которой принимают лишь два значения.

Вообще в конце 40-х и начале 50-х годов многие математики обратили внимание на качественную теорию линейных систем. Работы в этом направлении велись в Ленинграде и Минске (Ю. С. Богданов, В. П. Басов, А. К. Гаханов, П. В. Атрашенок, А. Е. Гельман и др.), в Москве под руководством В. В. Немыцкого (Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, Б. П. Демидович). Построена геометрическая теория правильных систем (Р. Э. Виноград), изучены различные характеристики неправильности — коэффициенты неправильности (Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман). Построены признаки топологической и асимптотической эквивалентности систем дифференциальных уравнений (Д. М. Гробман). Изучены основные свойства почти приводимых систем (которые преобразованием Ляпунова переводятся в систему, с коэффициентами сколь угодно мало отличающимися от постоянных).

¹⁶ Линейное преобразование $X = YZ(t)$ называется ляпуновским, если матрица $Z(t)$ вместе с $Z^{-1}(t)$ ограничена. Такое преобразование не изменяет характеристических чисел системы.

Указаны признаки ограниченности на всей полупрямой монотонных решений линейных дифференциальных систем. Заметим, что результаты, полученные для линейных систем, имеют большое значение при изучении нелинейных систем, так как часто поведение решений нелинейных систем вполне определяется поведением решений соответствующих линейных систем. А, кроме того, метод, развитый для линейных систем, основанный на переходе от дифференциальных уравнений к интегральным уравнениям, часто позволяет легко изучить и системы, близкие к линейным. Отметим еще интересную работу Б. П. Демидовича (1965 г.), в которой дается развитие теории правильной системы (вполне правильные системы), определяются обобщенные характеристические числа такой системы, и применяется это к вопросу устойчивости нелинейной системы.

Большие исследования проведены по различным обобщениям теории обыкновенных дифференциальных уравнений на бесконечные системы дифференциальных уравнений и в общих пространствах. В 1934 г. появилась статья А. Н. Тихонова, посвященная бесконечным системам. В Алма-Ате под руководством К. П. Персидского по бесконечным системам линейных уравнений проделана очень большая работа В. Х. Харасахалом, С. И. Горшиным, Х. И. Ибрашевым, О. Т. Матуциной, Ш. М. Еникеевым и др. О. А. Жаутыковым выполнена серия работ по счетным системам уравнений в частных производных на основе метода осреднения Крылова — Боголюбова. Многие исследования К. П. Персидского посвящены теории дифференциальных уравнений в нормированных и нелинейных пространствах.

М. А. Красносельским, С. Г. Крейном, П. Е. Соболевским выполнен большой цикл работ по теории дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. На основе топологических методов и теории дифференциальных уравнений в обобщенных пространствах ими были получены результаты и для классической теории дифференциальных уравнений по качественной теории, теории периодических, ограниченных и почти периодических решений, устойчивости периодических решений, краевым задачам. Теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах посвящены книги М. Г. Крейна «Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве» (1964 г.) и Е. А. Барбашина «Введение в теорию устойчивости» (1967 г.).

Весьма интересной является монография А. С. Галиуллина «Некоторые вопросы устойчивости программного движения» (1960 г.), в которой приведено и получено много результатов, посвященных качественной теории линейных систем с переменными коэффициентами и приложений этого к теории устойчивости. Здесь же освещен вопрос об устойчивости движения на конечном расстоянии, который получил развитие, начиная с Г. В. Каменкова. Интересные результаты в этом направлении получены также В. П. Рудаковым.

Теория устойчивости в большом

С 1950 г. под влиянием теории автоматического регулирования начала бурно развиваться теория устойчивости в большом и в целом. Много работ в этом направлении появилось после заметки М. А. Айзермана (1949 г.), в которой была поставлена задача, возникшая в теории автоматического регулирования.

Первым этой темой занялся Н. П. Еругин (1950 г.). Им были разработаны методы исследования теории устойчивости движения в целом и в большом на плоскости. Этот вопрос решался одновременно с выяснением точной качественной картины в целом, главным образом, в так называемых сомнительных случаях с неаналитическими правыми частями, поэтому этот метод получил название качественного метода в теории устойчивости. Были решены также вопросы качества регулирования и др.

Пожалуй, первым исследованием по устойчивости в большом была работа Х. С. Халикова (1937 г.), но здесь устойчивость в большом определялась иначе, чем позднее, после 1950 г. Затем И. Г. Малкин (1952 г.), пользуясь методом Постникова и Лурье, построил функцию Ляпунова для системы двух уравнений, которая позволила ему рассмотреть устойчивость нулевого решения при более жестких условиях на нелинейность, чем это делал Н. П. Еругин. Пользуясь общими теоремами качественных методов и функцией Малкина, Еругин рассмотрел (1952 г.) вопрос при самых общих предположениях. Н. Н. Красовский исследовал систему двух уравнений, более общую, чем в работах Еругина и, в частности, закончил теорию тех систем, которую изучал Еругин (Красовский впервые указал исключительный случай, когда гипотеза Айзермана не оправдывается). В этих работах возник вопрос о том, какими дополнительными свойствами должна обладать функция Ляпунова (и область, заполненная интегральными кривыми рассматриваемой системы), чтобы построение этой функции доказывало устойчивость в целом. Для системы двух уравнений Айзермана этот вопрос был разрешен Н. П. Еругиным (1952 г.), в общем же виде Н. Н. Красовским, Е. А. Барбашиным и А. П. Тузовым.

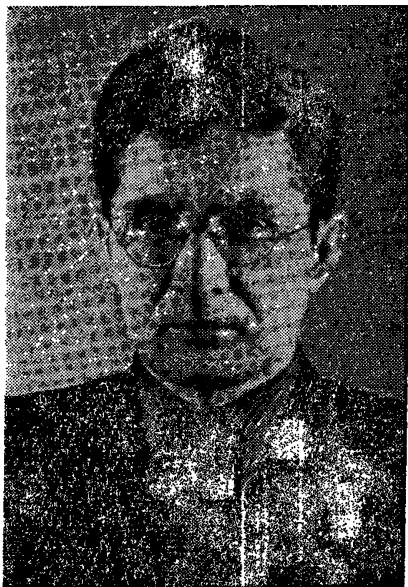
В работах Н. Н. Красовского (1952 г.) и Е. А. Барбашина (1952 г.) положительно решен вопрос и о существовании функции Ляпунова, дающей возможность установить устойчивость в целом. Но до сих пор не удалось построить на самом деле функции Ляпунова такого рода для многих систем даже второго порядка, для которых устойчивость в целом доказана качественными методами. В. А. Плисс построил (1955 г.) границы области асимптотической устойчивости для таких систем двух уравнений типа Айзермана, для которых не имеет места устойчивость в целом (случай, указанный Красовским). Н. П. Еругин для системы двух уравнений типа Айзермана разными способами указал (1950 г.) область, из которой не выходит интегральная кривая в зависимости от начальных значений и от параметров правых частей.

Позднее цикл таких работ качественными методами проделал Б. Н. Скачков (1954—1962 гг.) относительно систем Лурье. На основе функции Ляпунова этот вопрос рассматривал Б. С. Разумихин (1955—1958 гг.).

Некоторые общие соображения по вопросу об устойчивости в целом и в большом высказали Н. П. Еругин (1953—1955 гг.), В. А. Плисс (1954—1957 гг.), В. И. Зубов (1955—1959 гг.).

Особенно много работ появилось в Ленинграде и в Свердловске (сначала под руководством Е. А. Барбашина, а потом под руководством Н. Н. Красовского). Для систем трех уравнений глубокое исследование провел В. А. Плисс (1958 г.), применяя методы функции Ляпунова, качественные методы и топологические методы Картрайт и Литтлвуда. Большие исследования в этом направлении провел А. М. Летов (1948—1952 гг.) по большей части в связи с теорией автоматического регулирования. Во всех этих работах (Н. Н. Красовского, Е. А. Барбашина, И. Г. Малкина, В. А. Плисса, А. П. Тузова, В. И. Зубова, Б. Н. Скачкова, В. В. Румянцева, С. Н. Шиманова, А. М. Летова, В. А. Якубовича, Б. С. Разумихина и др.) появилось много методов построения функций Ляпунова. За рубежом в этом направлении работают: в Чехословакии — Я. Курцвейль, в Англии — М. Л. Картрайт, в Америке — С. Лефшец, который исследовал системы общего вида, близкого к системам, рассматриваемым Лурье и Постниковым.

Большое развитие получил вопрос об устойчивости при условии возмущения правых частей дифференциальных уравнений в работах С. И. Горшина, О. Т. Матуциной, И. Г. Малкина, П. В. Атрашенка, В. В. Немыцкого, Г. Н. Дубошина, Е. И. Дыхмана, К. П. Персидского, Н. Н. Красовского, Е. А. Барбашина и др. Методы исследования устойчивости для дифференциальных уравнений с последствием развития Н. Н. Красовским и др., а также и Б. С. Разумихиным (1956—1960 гг.).



А. М. Летов.

7

Устойчивость движения на конечном промежутке времени при вариациях правых частей дифференциальных уравнений

Устойчивость нулевого решения по Ляпунову требует, чтобы всякое решение оставалось достаточно близко от начала координат на всем промежутке времени $t > t_0$. Но в различных проблемах естествознания эта малость решения или некоторая его

ограниченность должна быть лишь на некотором конечном промежутке времени $t_0 \leq t \leq T$. Сама малость решения или та область, из которой решение не должно выходить, может определяться по-разному. Такие определения устойчивости на конечном расстоянии были введены в рассмотрение и даны условия их существования многими учеными: Н. Д. Моисеевым, Г. В. Каменковым, А. А. Лебедевым, Н. И. Гавриловым, К. А. Карачаровым, А. Г. Пилютин, Б. С. Разумихиним. Полную систематизацию всех этих признаков, их взаимосвязи и обобщения выполнил В. П. Рудаков под руководством С. Ф. Фещенко в ряде своих работ.

Большая серия исследований по теории устойчивости при вариациях правых частей для уравнений с запаздывающим аргументом, для конечных разностей и других задач выполнена под руководством Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского. Обзор этих работ дан в докладе Барбашина на Третьем Всесоюзном математическом съезде. Вопрос об устойчивости периодического движения при вариациях правых частей дифференциальных уравнений рассматривал Н. А. Артемьев (1939 г.).

8

Качественная теория дифференциальных уравнений (исследования до 1941 г.)

Раздел качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений возник еще в конце прошлого столетия в работах А. Пуанкаре (1887 г.) и А. М. Ляпунова (1883 г.). Пуанкаре развернул эту проблематику как качественную теорию дифференциальных уравнений в чистом виде (но многие вопросы он ставил и в небесной механике), а Ляпунов строил теорию устойчивости и сталкивался при этом в сущности во многих случаях с теми же вопросами, что и Пуанкаре. Но подход к этим задачам и методы решения у Пуанкаре и Ляпунова были различными. Рассматривались вопросы геометрической топологии расположения интегральных кривых и функциональных свойств решений систем дифференциальных уравнений

$$x_k = f_k(x_1, \dots, x_n, t) \quad (22)$$

в окрестности точки равновесия $(x_1^*, \dots, x_n^*) : f_k(x_1^*, \dots, x_n^*, t) = 0$ ($k = 1, \dots, n$) в некоторой области G или во всей области D , где заданы функции $f_k(x_1, \dots, x_n, t)$. До 1930 г. основными работами по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений кроме исследований Пуанкаре и Ляпунова были работы Бендиксона, Перрона, Брауэра, Дюляка, Кунина, Биркгофа, Боля, Коттона. У нас в 1934 г. опубликована большая работа И. Г. Петровского «О поведении интегральных кривых системы обыкновенных дифференциальных уравне-

ний вблизи особой точки», в которой (как и в работе Перрона) было исследовано поведение интегральных кривых системы n дифференциальных уравнений в окрестности точки равновесия.

С 1930 г. в Московском университете под руководством В. В. Степанова и В. В. Немыцкого начались исследования по качественной теории, в которых приняли участие московские математики и математики других городов. До 1941 г. рассматривались главным образом вопросы общей теории динамических систем. После Пуанкаре это направление было развито в работах американского математика Биркгофа и в несколько ином плане получило развитие в московской школе. Причем исследования шли в двух направлениях: топологические вопросы разрабатывались В. В. Немыцким, А. Н. Тихоновым, М. В. Бебутовым, А. Я. Хинчиным, Л. С. Понтрягиным, А. А. Марковым и др., а метрические вопросы теории (эргодическая теория) — в работах А. Н. Колмогорова и А. Я. Хинчина. Метрические вопросы также нашли свое отражение в работах киевской школы Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. Начиная с 1943—1944 гг. тематика исследований московских математиков расширилась и охватила многие направления.

Под руководством А. А. Андропова с 1926 г. проводились исследования по приложениям качественной теории дифференциальных уравнений Пуанкаре и Ляпунова к колебательным явлениям физики (Е. А. Андропова-Леонтович, Л. И. Мандельштам, А. А. Витт (1959—1960 гг.)). Это вызвало большой интерес к разработке качественной теории дифференциальных уравнений, в которой приняла участие горьковская школа (Е. А. Андропова-Леонтович, Н. Н. Баутин, Л. С. Понтрягин, Л. Н. Белюстина, Н. Ф. Отроков, А. Г. Майер и др.). В 1934 г. А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин ввели в рассмотрение грубые системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$, качественная картина расположения интегральных кривых которых в конечной области G мало изменяется при малых вариациях правых частей.

К 1939 г. А. А. Андроновым, Е. А. Андроновой-Леонтович и А. Г. Майером была выяснена возможная топология качественной картины расположения интегральных кривых грубых систем без доказательств. В 1952 г. американский математик Г. Ф. Баггис при более общих условиях, чем у А. А. Андропова и Л. С. Понтрягина, подробно изучил грубые системы и доказал в общем наличие тех же случаев. Работа Н. Н. Баутина (1940 г.) положила начало новым исследованиям в этом направлении, посвященным вопросам резкой смены качественной картины (негрубые системы) при прохождении параметров, входящих в правые части дифференциальных уравнений, через некоторые особые (бифуркационные) значения. В частности, рассматривались вопросы рождения и исчезновения предельных циклов (изолированные периодические решения) динамических систем (не содержащих в правых частях уравнений независимой переменной t). Большой и подробный доклад на эту тему в 1963 г. на Международном симпозиуме по нелинейным колебаниям в Киеве сделали Е. А. Андропова-Леонтович, Л. Н. Бе-

люстина. Н. Ф. Отроков рассматривал «грубость» по отношению к полиномиальным добавкам.

Первыми работами по решению вопроса о существовании предельного цикла были работы А. А. Андропова, А. Г. Майера, Н. Н. Баутина и Ю. И. Неймарка (1944—1945 гг.), которые пользовались методом точечных отображений.

Общая теория точечных отображений изложена в докладе Ю. И. Неймарка (1963 г.), где дан также подробный очерк развития метода точечных отображений в применении к теории дифференциальных уравнений до 1961 г. После 1941 г. качественная теория во многих направлениях развивалась учеными Москвы, Ленинграда, Свердловска, Киева, Самарканда, Казани, Кишинева, Рязани, Ижевска. Здесь следует прежде всего указать на исследования Н. Н. Боголюбова об инвариантных поверхностях и почти периодических решениях, возникающих вблизи периодических решений, продолженных Ю. А. Митропольским. Исследования об инвариантных поверхностях у диссипативных систем¹⁷ в общем виде проведены в 1964 г. В. А. Плиссом.

9

Поведение интегральных кривых в окрестности особой точки

Точку $(0, 0)$ называют особой точкой для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad (23)$$

если $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$.

Частным случаем уравнений (23) является уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Ax + By}{Cx + Dy}. \quad (24)$$

Это уравнение интегрируется в конечном виде. Качественная картина уравнения (23) определяется корнями λ_1, λ_2 уравнения

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ C & D - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (25)$$

Рассмотрим тот случай уравнения (23), когда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Ax + By + \Phi(x, y)}{Cx + Dy + \Psi(x, y)} \quad (26)$$

и

$$\frac{\Phi}{r^{1+\alpha}} \rightarrow 0, \quad \frac{\Psi}{r^{1+\alpha}} \rightarrow 0 \quad \text{при } r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0, \quad \alpha > 0. \quad (27)$$

¹⁷ Так называются системы, все решения которых попадают в некоторую ограниченную область. Эти системы в 1954 г. исследовал П. В. Атрашенко и затем В. В. Немыцкий.

Известно (В. В. Немыцкий, В. В. Степанов), что если вещественные части λ_1, λ_2 отличны от нуля, то качественная картина уравнений (24) и (26) в окрестности точки $(0, 0)$ будет одинаковой независимо от выбора функций Φ и Ψ (но подчиненных условию (27)). Этого совпадения качественных картин, вообще говоря, не будет, если по крайней мере один из корней уравнения (25) имеет вещественную часть, равную нулю (так называемый сомнительный случай).

Предположим, что в указанном случае уравнение (23) или (26) можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p(x, y) + \varphi(x, y)}{q(x, y) + \psi(x, y)}, \quad (28)$$

где, например, p и q — многочлены от x и y (без свободных членов), а φ и ψ — бесконечно малые высшего порядка по сравнению с высшими членами полиномов p и q . Возможны два случая:

1) качественные картины расположения интегральных кривых в окрестности точки $(0, 0)$ уравнения (28) и уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p(x, y)}{q(x, y)} \quad (29)$$

совпадают;

2) нет таких полиномов $p(x, y)$ и $q(x, y)$, при которых можно уравнение (23) представить в виде (28) и качественные картины уравнений (28) и (29) совпадают.

Во втором случае качественная картина уравнения (23) определяется как угодно малыми членами числителя и знаменателя уравнения (23). Этот случай называется трансцендентным и представляет особые трудности для исследователя. Здесь все интегральные кривые в окрестности точки $(0, 0)$ могут быть либо спиралями (фокус), либо замкнутыми кривыми — циклами (центр). Особенно трудно установить наличие центра.

На трансцендентном случае остановимся отдельно, а сейчас рассмотрим первый случай.

При изучении уравнения (23), следуя Фроммеру, окрестность точки $(0, 0)$ разбивают на секторы, стороны и дуги которых не касаются интегральных кривых (нормальные области). Рассмотрим области трех типов, приведенные на рис. 2. Здесь прямые AB суть касательные к интегральным кривым в точках границы сектора. В области I при вхождении в сектор интегральные кривые приближаются к особой точке $(0, 0)$. В области II они удаляются, а в области III слева удаляются, а справа приближаются. В области I все интегральные кривые примыкают к точке $(0, 0)$. В области II есть по крайней мере одна интегральная кривая, примыкающая к точке $(0, 0)$, а в области III таких кривых может и не быть. В последнее десятилетие

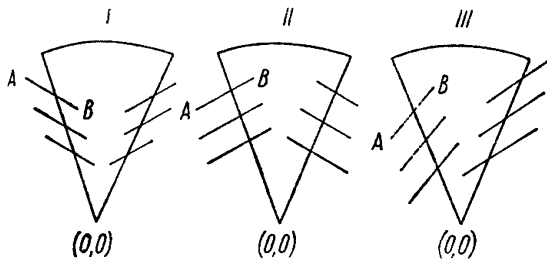
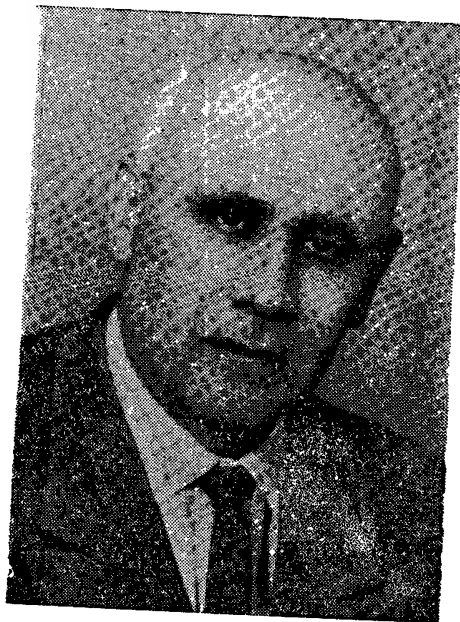


Рис. 2. Области трех типов.



И. С. Куклес.

для различных типов уравнений (23) построены признаки единственности интегральной кривой, примыкающей к точке $(0, 0)$, в области II и признаки существования таких кривых в области III.

Работы в этом направлении можно разбить на три группы.

1. Поведение интегральных кривых уравнения (26), т. е. тогда, когда P и Q имеют линейные члены. Для случая, когда функции $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ — голоморфные, поведение интегральных кривых в окрестности точки $(0, 0)$ полностью изучено Н. Б. Хаимовым и А. Ф. Андреевым.

2. Проблема различения особых точек 1-й и 2-й групп. В случае голоморфных $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ окончательно была решена проблема различения особых точек 1-й группы (имеются интегральные кривые, примыкающие к особой

точке с определенной касательной) и 2-й группы (такие кривые отсутствуют) в работах Н. Б. Хаимова, И. С. Куклеса, Д. М. Груза, А. Ф. Андреева. Андреев и Куклес решали эту проблему также для одного класса с неаналитическими правыми частями. И. С. Куклес и А. М. Суяршаев построили метод решения проблемы для некоторого общего класса неаналитических правых частей. Заметим еще, что во всех этих работах (как и у Фроммера) дается метод построения аналитического представления этих интегральных кривых, входящих в точку с определенной касательной (O -кривая).

3. Проблемы различения для нормальных областей, типов II и III. Отправляясь от известных теорем Лонна, И. С. Куклес, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман и А. Ф. Андреев получили весьма важные результаты по проблеме единственности интегральных кривых, входящих в точку $(0, 0)$ в областях типа II, и по проблеме наличия таких интегральных кривых в области типа III. В частности, Андреев установил, что для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y) + p(x, y)}{Q(x, y) + q(x, y)},$$

где P и Q — однородные многочлены от x и y степени $n \geq 1$, $p = o(r^n)$, $q = o(r^n)$ при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$, единственность O -кривой в области типа II обеспечивается не одним лишь требованием достаточно высокого порядка малости функций p и q относительно радиуса-вектора r (как это имеет место для области типа III), но и достаточно сильным условием Липшица по полярному углу φ , налагаемыми на эти функции (так что понижение порядка малости относительно r для самих p и q можно компенсировать повышением этого порядка для коэффициента

в условии Липшица по φ), и наоборот. Подробный обзор результатов по этим проблемам, полученных до 1961 г., и полная библиография содержатся в статье А. Ф. Андреева «О проблемах различения Фроммера» (1964 г.). Позднее эти вопросы трактовались А. Ф. Андреевым, И. С. Куклесом. Им посвящено много и зарубежных работ (Ф. Хартмана, А. Винтнера, С. Лефшеца).

Перейдем к обзору исследований по проблеме центра фокуса. Еще в работах Пуанкаре и Ляпунова возникла классическая проблема различения центра — фокуса. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = ay + P(x, y), \quad \dot{y} = -ax + Q(x, y), \quad (30)$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — сходящиеся ряды по положительным степеням x, y , не содержащие свободных и линейных членов. Ляпунов и Пуанкаре показали, что в этом случае все интегральные кривые, начинающиеся в окрестности начала координат, будут либо спиралями с полюсом в точке $(0, 0)$, либо замкнутыми кривыми. В первом случае имеем фокус, во втором — центр. Проблема заключается в том, чтобы указать условия для P и Q , при которых будет первый или второй случай. Если существует голоморфный интеграл $\Phi(x, y) = C$, то, как показали Пуанкаре и Ляпунов, имеем центр. Но даже если P и Q суть полиномы, то, вообще говоря, нельзя установить, будет ли здесь центр или фокус. Для наличия центра должна быть выполнена некоторая бесконечная последовательность равенств, и это также показали Пуанкаре и Ляпунов. Если обнаружено, что какое-нибудь из этих равенств нарушено, то будет фокус. В работах М. И. Альмухамедова, И. С. Куклеса, Т. Н. Нурова и К. Е. Малкина продолжались поиски эквивалентов этих условий центра, в той или иной мере упрощающих составление этих условий. Проблему центра и фокуса, начиная с Фроммера (P и Q — полиномы второй степени) и Дюляка, решали многие ученые. Для случая полиномов второй степени эта задача окончательно была решена Н. А. Сахарниковым (1948—1950 гг.). Но завершающей работой здесь является статья К. С. Сибирского (1963 г.), в которой имеется и полная библиография по этому вопросу.

Полиномы третьей степени рассматривали М. И. Альмухамедов¹⁸, Н. А. Сахарников и К. Е. Малкин.

Полное и окончательное решение проблемы центра-фокуса в случае

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + P_3(x, y)}{cx + dy + Q_3(x, y)},$$

где P_3 и Q_3 — однородные полиномы третьей степени, дали В. А. Лункевич и К. С. Сибирский. В 40-х годах И. С. Куклес развил новый метод различения центра и фокуса — так называемый метод обобщенной симметрии, который и был в основе многих работ его учеников (Х. Р. Рахимова, И. И. Широга, Н. Н. Николаевой, Т. Н. Нуровым). Сибирский

¹⁸ М. И. Альмухамедов доказал общую теорему о том, что если P и Q в (30) полиномы, то существует конечное число равенств, которые порождают бесконечное число условий центра.

полностью исследовал вопрос о существовании оси симметрии поля направлений, проходящей через точку $(0, 0)$. Он же оценил число предельных циклов в окрестности точки, когда правые части суть полиномы и характеристические числа линейной системы мнимые, т. е. когда имеем центр или фокус.

А. Ф. Андреев впервые разрешил неклассическую проблему центра-фокуса, когда матрица линейных членов имеет кратный нулевой корень с непростым элементарным делителем и правые части P и Q суть полиномы третьей степени:

$$\dot{x} = y + P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y). \quad (31)$$

Эта проблема в общем виде была поставлена в работах Ляпунова. Н. В. Медведев показал (1961 г.), что метод составления условий центра, разработанный Ляпуновым для системы (31), применим к некоторому более общему классу систем.

В работах Н. П. Еругина изучалась качественная картина в окрестности точки равновесия в сомнительном случае и вопрос о существовании предельных циклов для системы двух уравнений с неаналитическими правыми частями. Качественную картину в сомнительных случаях изучали также А. Ф. Андреев, В. А. Табуева, Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский. В 1945 г. Ю. К. Солнцев провел исследования о предельном поведении интегральных кривых в области, где есть бесконечное число точек равновесия. Р. Э. Виноград построил соответствующую теорию для неограниченной области на плоскости.

Еще в 1937 г. А. А. Андронов, А. А. Витт и С. Э. Хайкин в книге «Теория колебаний» обратили внимание на то, что важно для приложений исследовать особые точки и множества особых точек для того случая, когда правые части имеют разрывы вдоль линий. Достаточно цельную теорию поведения таких систем построил Ю. К. Солнцев.

10

Аналитическое представление и качественная картина расположения интегральных кривых в окрестности точки равновесия

Пусть дана система уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{i=1}^n p_{ik}(t) x_i + P_k(t, x_1, \dots, x_n), \quad (32)$$

где ряды

$$P_k = \sum_{k_1 + \dots + k_n = 2} A_{k_1 \dots k_n}(t) x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \quad (33)$$

сходятся равномерно при $t \geq 0$ в окрестности точки $x_1 = \dots = x_n = 0$. А. М. Ляпунов на основе своего первого метода получил m -параметри-

ческое свойство интегральных кривых в виде рядов, равномерно сходящихся при $t \geq 0$, когда система

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{i=1}^n p_{ik} x_i \quad (34)$$

правильная и m характеристических чисел (Ляпунова) положительные. При $t \rightarrow \infty$ эти интегральные кривые входят в начало координат. Если все m характеристических чисел Ляпунова положительные, то эти ряды Ляпунова представляют общее решение системы (32) в окрестности точки $x_1 = \dots = x_n = 0$ и $0 \leq t < \infty$ и, следовательно, всякое решение системы (32), начинающееся в окрестности начала координат, входит в начало координат при $t \rightarrow \infty$. Здесь решение $x_1 = \dots = x_n = 0$ будет и устойчиво (асимптотически) по Ляпунову. Если матрица $\|p_{ik}(t)\|$ постоянная, то характеристические числа Ляпунова суть вещественные части с обратным знаком характеристических чисел этой матрицы. Отсюда видна и качественная картина¹⁹ в окрестности начала координат, порождаемая этими m характеристическими числами. Несколько другое построение этих интегральных кривых и в более простых случаях, чем у Ляпунова, провел Э. Коттон.

Мы уже отметили выше, что системы вида (32) с постоянной матрицей $\|p_{ik}\|$ и неголоморфными относительно $x_1, \dots, x_n$ функциями P_k рассматривали О. Перрон и И. Г. Петровский.

Пусть теперь в системе (32) p_{ik} и $A_{k_1 \dots k_n}$ — постоянные

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{i=1}^n p_{ik} x_i + P_k(x_1, \dots, x_n) \quad (k = 1, \dots, n). \quad (35)$$

Как уже отмечалось, по первому методу Ляпунова можно получить общее решение в окрестности начала координат (и при $t \geq 0$), если вещественные части характеристических чисел $R(\lambda)$ матрицы $\|p_{ik}\|$ отрицательные. Если же все $R(\lambda) > 0$, то получим параметрическое представление интегральных кривых $x_k = \varphi_k(t)$ в окрестности начала координат и при $t \leq 0$. Из этих разложений видно, кроме того, что $x_k \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$.

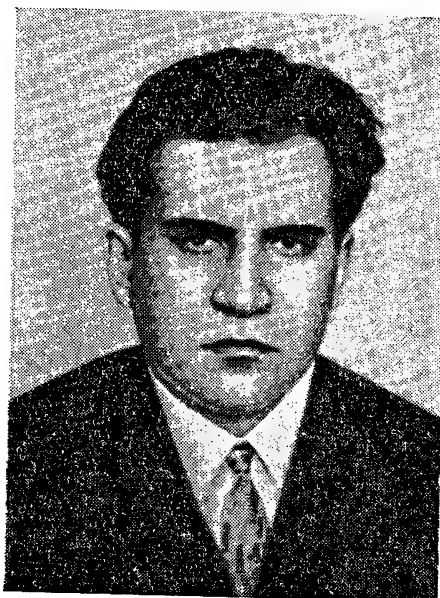
Если же $R(\lambda) = 0$, то вопрос о построении уравнений интегральных кривых становится намного труднее. Так же обстоит дело и в том случае, когда имеются чисто мнимые λ . Рассмотрим, например, систему²⁰

$$\dot{x} = ay + P(x, y), \quad \dot{y} = -ax + Q(x, y), \quad (36)$$

где ряды $P(x, y)$, $Q(x, y)$ не имеют свободных и линейных членов. По теореме Пуанкаре — Ляпунова точка $x = 0, y = 0$ будет или центром (замкнутые интегральные кривые вокруг начала координат) или

¹⁹ На качественную картину будет влиять и совокупность элементарных делителей матрицы коэффициентов p_{ik} , соответствующая этим m характеристическим числам (Петровский И. Г.).

²⁰ Здесь $\lambda_1 = ai, \lambda_2 = -ai$.



А. Н. Еругин.

фокусом (спирали). Чтобы указать, какой из этих случаев имеет место согласно теореме Пуанкаре — Ляпунова, составляется последовательность величин $g_1, g_2, \dots$, зависящих от коэффициентов системы (36). Если есть $g_k \neq 0$, то имеем фокус, если же все $g_k = 0$, то будет центр.

Таким образом, случай фокуса, вообще говоря, легко обнаруживается, случай же центра — труднее, так как требуется выполнение бесконечного числа равенств. В случае центра Пуанкаре и Ляпунов построили уравнения интегральных кривых в окрестности начала координат (периодические решения). В случае фокуса эта задача оставалась нерешенной с XIX в.

А. Н. Еругин на основании изученной им функции

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t p(t) L(t) dt, \quad t \rightarrow \infty,$$

где $p(t)$ — периодическая функция и $L(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, построил методы асимптотического представления интегральных кривых системы уравнений

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{\infty} X_i, \quad \dot{y} = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i,$$

где X_i, Y_i — однородные полиномы от x, y в случае фокуса. В полярных координатах этой системе соответствует уравнение

$$\frac{dr}{d\vartheta} = gr^m + \sum_{n=m+1}^{\infty} R_n(\vartheta) r^n \quad (m \geq 3),$$

где $R_n(\vartheta)$ — полиномы от $\sin \vartheta$ и $\cos \vartheta$, $g \neq 0$. Интегральные кривые получены в виде

$$r = \vartheta_1^{-1} [1 + Y(\vartheta)], \quad \vartheta_1 = \sqrt[m-1]{g(m-1)\vartheta},$$

где $Y(\vartheta)$ — дается в виде ряда по малым возрастающего порядка (трех видов) при $\vartheta \rightarrow \infty$. На основе этого дается характеристика качества поведения интегральных кривых при $\vartheta \rightarrow \infty$. В частности, показывается, что при $\vartheta \rightarrow \infty$ все интегральные кривые асимптотически сближаются с кривой $r = \vartheta_1^{-1}$. Эти методы, обобщающиеся на многие более общие системы с неголоморфными правыми частями, позволяют построить законченную теорию этих систем, а также получить результаты, подобные результатам Фроммера, в тех случаях, когда способ Фроммера не применим (нет исключительных направлений, вдоль которых могут входить в начало координат интегральные кривые). В частности, для

этих общих систем получена и теорема, аналогичная теореме Пуанкаре — Ляпунова для систем (36), и соответствующий признак различения центра и фокуса.

Японский математик Фукухара получил асимптотические представления интегральных кривых в случае фокуса в параметрической форме, качественно отличные от представлений А. Н. Еругина и не сводимые к последним.

При рассмотрении многомерных систем вида (32) или (35) в окрестности точки $x_1 = \dots = x_n = 0$ исследуются два вопроса: качественная геометрическая картина поведения интегральных кривых и аналитическое представление этих кривых, их асимптотика. Отметим некоторые из соответствующих работ.

Д. М. Гробман показал (1959—1962 гг.), что для систем

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + f_i(x_1, \dots, x_n)$$

и

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$$

топология качественной картины в окрестности начала координат совпадает, если нет характеристических чисел λ постоянной матрицы $A = \|a_{ik}\|$ с нулевой вещественной частью, $f_i(0, \dots, 0) = 0$ и $f_i(x_1, \dots, x_n)$ удовлетворяют условиям Липшица в окрестности точки $x_1 = \dots = x_n = 0$ с достаточно малой константой Липшица. В других работах (1961—1964 гг.) Д. М. Гробман рассмотрел вопрос об асимптотическом (при $t \rightarrow \infty$), топологическом соответствии решений этих систем. Эти проблемы изучали и Э. М. Вайсборд, и Р. М. Минц. Л. Э. Рейзинь, обобщая результаты Д. М. Гробмана, построил (1964 г.) топологическую классификацию для замкнутых траекторий.

Системы вида

$$\frac{dx_k}{dt} = P_k^{(m)}(x_1, \dots, x_n) + P_k(x_1, \dots, x_n) \quad (k = 1, \dots, n), \quad (37)$$

где P_k — однородные полиномы степени m , P_k — малые порядка $\alpha > m$ в окрестности начала координат, изучали В. И. Зубов, А. А. Шестаков и Л. Э. Рейзинь. А. А. Шестаков определял кривизну (через элементарные кривые, вдоль которых входят в начало координат интегральные кривые) и размерность многообразий, состоящих из решений, которые входят по определенному характеристическому направлению в точку равновесия. Он и строил эти многообразия. Им дано наиболее общее построение парабол общего вида, вдоль которых входят интегральные кривые в точку покоя, уравнений с голоморфными правыми частями, не имеющими свободных и линейных членов. А. А. Шестаков изучал поведение интегральных кривых и в бесконечности.

Большой цикл работ выполнил Л. Э. Рейзинь. Для систем вида (37) он в случае нечетного n доказал существование, по крайней мере, одного характеристического направления, вдоль которого траектории могут войти в особую точку, и дал оценку для этих систем числа характеристических направлений (вдоль которых могут входить траектории в точку покоя). Рейзинь весьма подробно исследовал поведение траекторий в конической окрестности отдельного характеристического направления и показал, что исследование всей окрестности точки покоя в n -мерном пространстве сводится к исследованию $n - 1$ -мерной системы в целом. Этот метод позволил ему поставить и разрешить некоторые проблемы различения качественной картины расположения интегральных кривых в окрестности точки покоя. Сначала он это сделал для системы трех уравнений, а затем и для n уравнений. Он нашел условия, при которых все интегральные кривые вблизи особой точки входят в нее, условия, при которых по определенному характеристическому направлению или касаясь определенной плоскости, входит в нее семейство траекторий той или иной размерности.

Л. Э. Рейзинь, обобщая метод Гробмана для установления топологии поведения интегральных кривых в окрестности точки покоя, нашел некоторую аналогичную характеристику топологии поведения интегральных кривых в окрестности периодических решений систем вида $\dot{x} = X(x)$ (x и X — векторы). Обобщение этих результатов на случай, когда вместо однородных многочленов P_k^m стоят однородные функции общего вида, дал И. З. Маневич. Л. Э. Рейзинь получил классификацию систем (37), основанную на топологической почти эквивалентности этой системы и системы, полученной из нее при $P_k = 0$ ($k = 1, 2, 3$) в окрестности начала координат.

П. Н. Папуш исследовал поведение траекторий в окрестности сложной точки покоя, используя топологические поверхности $V(x_1, \dots, x_n) = C$, гомеоморфные сфере, и первые и вторые производные от $V(x_1, \dots, x_n)$ в силу системы (37).

Л. П. Шильников рассматривал систему $n + 1$ уравнений

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, \dots, x_{n+1}, \mu),$$

первое приближение которой (линейная система) имеет одно нулевое характеристическое число, а вещественная часть остальных приближений — одного знака. Известно, что вопрос об устойчивости нулевого решения изучен Ляпуновым полностью. Шильников нашел случаи рождения устойчивых периодических движений из особых траекторий при изменении параметра μ . Б. Н. Скачков рассмотрел такую же систему при $n = 2$. Он изучил качественную картину в окрестности точки покоя в том случае (указанном Ляпуновым), когда в точку покоя входит кривая, состоящая из точек покоя, и когда в окрестности точки покоя $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ находится голоморфный интеграл. Р. М. Минц рассмотрела (1956—1964 гг.) топологическую структуру окрестности точки покоя в трехмерном случае, когда одно собственное значение равно нулю, а действительные части других отличны от нуля. Она же изу-

чала поведение интегральных кривых в окрестности периодического решения системы

$$\dot{x} = P(x, y, z), \quad \dot{y} = Q(x, y, z), \quad \dot{z} = R(x, y, z),$$

где P, Q, R — аналитические функции. Е. А. Назаров исследовал (1965 г.) поведение интегральных кривых в окрестности периодического решения в трехмерном случае, обобщая результаты Гомори и Хааса на случай неаналитических правых частей уравнений.

Поведение интегральных кривых в бесконечности в многомерном случае²¹ изучили Р. М. Минц (1955 г.), А. А. Шестаков (1959 г.), Х. Р. Латилов (1964 г.), Д. М. Груз (1961—1962 гг.). А. Д. Брюно (как и Шестаков) определял асимптотический вид интегральных кривых системы $\dot{x}_k = x_k f_k(x_1, \dots, x_n)$ ($k = 1, \dots, n$) (f_k — степенные ряды) в окрестности начала координат. А. Н. Еругин для интегральных кривых уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - \psi(x, y)}{x - \varphi(x, y)},$$

где $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ — ряды, не имеющие свободных и линейных членов, нашел асимптотический ряд

$$y = x \ln |x| + cx + \sum_{n=2}^{\infty} x^n \sum_{l=0}^{2n-1} a_{n,l} \ln^l |x|.$$

Топология расположения интегральных кривых системы (35) в случае переменной матрицы $\{p_{kl}(t)\}$ изучалась в работах Р. Э. Винограда, Б. Ф. Былова, Д. М. Гробмана. Асимптотическое поведение решений системы $\dot{x} = Ax + f(t, x)$ при $t \rightarrow \infty$ изучал В. А. Якубович (1948 г.).

11

Качественная картина в целом

Уже в исследованиях Пуанкаре был поставлен вопрос о качественной картине расположения интегральных кривых в большом и во всей области задания правых частей дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, \dots, x_n). \quad (38)$$

Биркгоф рассматривал топологию качественной картины в целом для общей теории динамических систем. Эта проблематика была продолжена в нашей московской школе, о чем уже было сказано выше.

²¹ Как будет указано далее, в плоском случае весьма подробные исследования провел А. П. Воробьев.

Качественная теория в целом в классической теории дифференциальных уравнений начала развиваться с 1950 г. Именно исследовалась качественная картина поведения и расположения интегральных кривых во всей (или некоторой конечной) области, где задана система дифференциальных уравнений. В работах Н. П. Еругина изучалась качественная картина в окрестности точки равновесия и в целом в сомнительных случаях (т. е. когда система первого приближения имеет нулевое характеристическое число) системы двух уравнений с неаналитическими правыми частями

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y), \quad f(0, 0) = g(0, 0) = 0, \quad (39)$$

имеющей единственную точку равновесия $(0, 0)$. Рассматривался вопрос о существовании и построении предельных циклов для систем вида (39) с аналитическими и неаналитическими функциями $f(x, y)$ и $g(x, y)$. В частности, впервые было показано, что если функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ голоморфные, то голоморфное решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} \quad (40)$$

является граничной кривой для различных соседних топологических ячеек.

После работы Еругина появилась большая серия работ по качественной теории в целом в Свердловске, в частности работы И. Г. Малкина по теории устойчивости в большом. Наиболее глубокие исследования по качественной теории и теории устойчивости в большом провели Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский и С. Н. Шиманов. В Ленинграде этими вопросами занимались Н. П. Еругин, А. П. Тузов, В. А. Плисс, В. И. Зубов, В. А. Якубович. В. А. Табуева показала, что уравнение $\ddot{x} + \varphi(x)\dot{x} + f(x) = 0$, где $\varphi(x)$, $f(x)$ — периодические функции, может иметь три различные качественные картины расположения интегральных кривых. Частные случаи этого уравнения ранее изучались Зейфертом, Трикоми, Ку, Америо, Белюстиной и др. Систему трех уравнений типа Айзермана исследовали Н. Н. Красовский и Е. А. Барбашин. Но наиболее общие исследования, как уже было отмечено, даны в работе В. А. Плисса. Важную роль при решении вопроса о существовании периодических решений в этой работе играли топологические методы Картрайта.

Системы с одной точкой равновесия (вопросы устойчивости и качественной теории) изучались во многих других работах после 1952 г. (С. А. Маркосян, Н. Н. Виноградов, В. В. Немыцкий, Н. Н. Баутин, Л. А. Черкас, Н. Н. Красовский, А. Г. Майер, Лефшец, Гафари, А. Ф. Филиппов, А. В. Иванов, Левинсон, Смит, М. И. Войлоков, Чжан-Чжи-фэн, Дж. Сансоне, В. А. Табуева).

Многие ученые свои работы посвятили построению границ областей устойчивости качественными методами: П. Е. Кунин, В. В. Немыцкий, В. И. Зубов, В. А. Плисс, Н. П. Еругин, Е. И. Железнов, С. А. Сте-

баков, Б. Д. Воронцов, В. А. Табуева, Н. С. Капралов. В работе Н. А. Сахарникова исследуется (1951 г.) качественная картина поведения интегральных кривых вблизи границы области, заполненной замкнутыми интегральными кривыми. А. П. Воробьев для системы $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$, где P, Q — полиномы второго порядка и $(0, 0)$ — центр, нашел необходимые и достаточные условия независимости периодов от выбора интегральной кривой. Он показал также, что если решения этой системы в случае центра имеют постоянный период, то: а) в конечной части плоскости или вообще отсутствуют особые точки, или есть второй центр, период решений вокруг которого тоже постоянен; б) интегральные кривые, образующие центр, являются в рассматриваемом случае кривыми 2-го или 4-го порядка.



В. И. Зубов.

Воробьев исследовал качественную картину в окрестности особых точек на конечном расстоянии и на бесконечности, когда $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ и P, Q — полиномы второй степени. Он построил и решения в окрестности этих точек.

Интересную серию работ по качественной теории в целом выполнил Н. А. Лукашевич (1965 г.). Он показал, что если есть одна особая точка типа центр, когда P и Q — полиномы, то возможно построить качественную картину в целом и найти интеграл в замкнутой форме. Он это установил во всех случаях, когда имеем центр, согласно признакам Н. А. Сахарникова, М. И. Альмухамедова, И. С. Куклеса, А. Ф. Андреева. Работы Лукашевича продолжали И. С. Куклес и М. Хасанова, А. Н. Берлинский, Ш. Шарипов, Х. Р. Латипов. Но остается нерешенным возникающий здесь вопрос, можно ли установить качественную картину и интеграл в замкнутой форме, если P и Q — любые полиномы и одна из особых точек есть центр. Во всех случаях, рассмотренных Лукашевичем и его последователями, нет предельных циклов, т. е. изолированных периодических решений. Будет ли это во всех случаях, когда P и Q полиномы и есть точка покоя центр?

Большое число исследований посвящено решению вопроса существования, характера, области нахождения и построения периодических решений. Работы Н. Н. Кушкова относятся к качественному исследованию в целом и предельным циклам системы $\dot{x} = y + f(x)$, $\dot{y} = g(x)$. Отметим некоторые из этих работ, касающихся систем с одной точкой равновесия. Н. Н. Красовский рассмотрел (1953 г.) систему

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y) \quad (41)$$

и показал, что она имеет устойчивый предельный цикл ²², когда корни λ уравнения

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} - \lambda & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} - \lambda \end{vmatrix}_{x=y=0} = 0$$

имеют положительную вещественную часть, а вне окружности $x^2 + y^2 = R^2$ — отрицательную часть или, если

$$\int_0^{\infty} m(r) dr = \infty, \quad m(r) = \min_{x^2+y^2=r} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Е. И. Железнов несколько расширил эти условия. В. В. Немыцкий доказал отсутствие предельных циклов для системы вида (41) на основании свойств некоторой функции Ляпунова. Н. Н. Баутин изучил систему вида

$$\dot{x} = ax + by - x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = cx + dy - y(x^2 + y^2).$$

при условии, что здесь есть только одна точка равновесия. Он доказал наличие только одного предельного цикла и нашел кольцо, внутри которого этот цикл находится. Н. А. Лукашевич подробно (1966 г.) рассмотрел качественную картину более общей системы и построил для нее общее решение.

А. И. Яблонский нашел условия, при которых уравнения (41), где $X(x, y)$, $Y(x, y)$ — полиномы второй степени, имеют предельный цикл в виде алгебраической кривой четвертого порядка, причем кривая выписана в явном виде через параметры уравнения. При наличии указанного предельного цикла исследован также характер всех особых точек уравнения как конечных, так и бесконечных.

Л. А. Черкас изучил систему (41) в предположении, что X, Y — полиномы второго порядка, и при условии, что на бесконечности есть одна особая точка, т. е. существует направление, вдоль которого приближается интегральная кривая к бесконечности.

Для таких систем указаны условия существования и отсутствия предельных циклов на основании изучения особой точки на бесконечности. Этот прием применялся ранее Майером, Лефшецем, Гафари. Последний изучил систему

$$\dot{y} = y(x^2 + y^2 - 2x - 3)(x^2 + y^2 - 2x - 8) + x,$$

$$\dot{x} = x(x^2 + y^2 - 2x - 3)(x^2 + y^2 - 2x - 8) - y$$

и доказал, что кольцо $1 < x^2 + y^2 < 16$ содержит только два предельных цикла. Вне кольца их нет. В бесконечности особых точек нет, и все интегральные кривые уходят в бесконечность как спирали.

²² Это значит, что система имеет периодическое изолированное решение, к которому приближаются все решения при $t \rightarrow \infty$, начинающиеся достаточно близко от него.

Многие работы посвящены вопросу о существовании периодического решения уравнения

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0 \quad (42)$$

и частным случаям этого уравнения ²³:

$$\ddot{x} - h(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \text{ — уравнение Рэля,} \quad (43)$$

$$\ddot{x} - h(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \text{ — уравнение Ван-дер-Поля,} \quad (44)$$

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \text{ — уравнение Лизнара.} \quad (45)$$

Существование предельного цикла уравнения (45) при довольно общих предположениях, налагаемых на функции $f(x)$ и $g(x)$, рассматривались А. В. Драгиловым и А. Ф. Филипповым, единственность предельного цикла — Н. Левинсоном и О. К. Смитом. Условия единственности предельного цикла получены М. И. Войлоковым (1962 г.) и Чжан-Чжи-фэн (1958 г.). Все эти признаки единственности основаны на доказательстве того, что любые две интегральные кривые с течением времени сближаются в том или ином смысле. Чжан-Чжи-фэн доказала единственность цикла уравнения

$$\ddot{x} + (x^2 + ax + \beta)\dot{x} + x = 0, \quad \beta < 0.$$

Это уравнение не охватывалось никакими прежними признаками. Уравнение (45), а также $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, как мы уже отметили, подробно изучено у нас В. А. Табуевой (1958—1960 гг.) и Л. Н. Белюстиной (1954—1963 гг.).

А. А. Дородницын рассмотрел (1947 г.) уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - \nu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (46)$$

при больших значениях параметра ν , которое в фазовой плоскости ($p = \dot{x}$) (x, p) имеет вид

$$p \frac{dp}{dx} - \nu(1 - x^2)p + x = 0. \quad (47)$$

Дородницын дал метод асимптотического построения решения уравнения (47) в фазовой плоскости (x, p) при больших ν , что позволяет приближенно строить предельные циклы уравнения (46). Этот метод применим и к более общим уравнениям, чем уравнение (46). Для такого асимптотического построения решений уравнения (46) можно применить и методы, разработанные А. Н. Тихоновым (1948 г.).

Периодические решения систем с малым параметром при высших производных рассматривали Л. С. Понтрягин, Е. Ф. Мищенко, Н. А. Железцов, Л. В. Родыгин, А. Б. Васильева. Вопросы существо-

²³ Reissig R., Sansone G., Conti R. Qualitative Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen. Roma, Ed. Gremonese, 1963, 381 S.

вания периодических решений для системы двух уравнений или одного уравнения второго порядка изучали А. В. Драгилев, Н. Н. Кушков, В. М. Чересиз, Е. И. Железнов, С. А. Маркосян, М. М. Никулина, В. А. Табуева. Систему $\dot{z} = f(z, t)$, где z и t — векторы и f — разрывная функция, исследовали М. А. Айзерман и Ф. Р. Гантмахер.

Е. А. Барбашин со своими ученицами В. А. Табуевой и В. С. Серебряковой рассматривали системы двух и четырех уравнений. Отысканию правильных предельных циклов посвящена работа В. П. Захарова (1963 г.). Гладкие предельные циклы уравнения $\frac{d\rho}{dw} = f(\rho, w)$ изучал М. И. Альмухамедов (1937—1938 гг.), кратные — Н. Ф. Отроков (1957 г.). В. А. Чечик для уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ получил (1955 г.) условия полуустойчивости предельного цикла, В. Ф. Ткачев (1957 г.) — условия предельного цикла для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

В. И. Зубов занимался (1961 г.) признаками различения устойчивых, неустойчивых предельных циклов системы

$$\dot{x} = f_1(x, y), \quad y = f_2(x, y).$$

Он нашел условия существования периодических и почти периодических движений и построил аналитический аппарат для представления эргодических классов рекуррентных по Биркгофу движений.

Г. Е. Шилов рассмотрел возможные расположения интегральных кривых уравнения

$$y' = \frac{P_n(x, y)}{Q_n(x, y)},$$

где P_n и Q_n — однородные полиномы n -й степени. Этот вопрос исследовали также Л. С. Лягина (1951 г.), В. Ф. Воронова (1960 г.), А. Н. Берлинский (1952 г.), П. Т. Черевичный (1963 г.).

Расположение интегральных кривых однородного уравнения общего вида $\dot{y} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ изучали В. В. Немыцкий и В. В. Потлов, Г. И. За-

порожец рассмотрел уравнение вида $F\left(\dot{y}, \frac{y}{x}\right) = 0$. Полуустойчивым циклам посвящена работа Л. А. Черкаса (1962 г.). В. В. Немыцкий предложил (1946 г.) свой способ аппроксимации траекторий автономной системы с помощью сетей ломаных. Им создан алгоритм, позволяющий построить кольца, в которых только и могут лежать предельные циклы. М. И. Войлоков применил (1959 г.) результаты В. В. Немыцкого для оценки числа предельных циклов плоской автономной системы.

Е. А. Барбашин и Э. В. Вдовина доказали единственность периодического решения системы $\dot{x} = y, \dot{y} = -R(x, y) - f(x)$. Н. Ф. Отро-

ков оценивал (1944 г.) число предельных циклов для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_n(x, y)}{Q_n(x, y)}, \quad (48)$$

где P_n и Q_n — полиномы при некоторых условиях относительно коэффициентов этих полиномов.

И. Г. Петровский и Е. М. Ландис предложил новый метод исследования вопроса оценки предельных циклов системы

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y)$$



В. А. Плисс.

по степени полиномов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Оценке числа предельных циклов посвящены работы Л. А. Черкаса (1962 г.) и М. И. Войлокова (1961 г.), построению критериев отсутствия замкнутых решений — работы В. Ф. и Вл. Ф. Ткачевых (1960 г.), Ю. С. Богданова (1958 г.).

Методом неподвижных точек преобразования признак существования периодического решения для уравнения 3-го порядка нашел Эзейло. Более общий случай рассмотрел В. А. Плисс в работе «Нелокальные проблемы теории колебаний» (1964 г.).

Систему трех уравнений рассмотрел Б. В. Широкоград (1958 г.) и Э. М. Вайсборд. В. А. Плисс, обобщая результаты А. М. Ляпунова, Ю. А. Рябова и М. А. Красносельского, рассмотрел систему вида

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \lambda_i^2 x_i = g_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n),$$

где λ_i — положительные числа, а $g_i(x_1, \dots, x_n)$ — ряды по степеням $x_1, \dots, x_n$ без свободных и линейных членов, сходящихся при достаточно малых $|x_i|$. Для таких систем им даны условия существования семейства периодических решений, способы их построения и исследованы свойства этих семейств. Вопрос о предельных циклах для многомерных систем рассматривали К. О. Фридрихс, Л. Л. Раух, В. В. Немыцкий, Б. В. Широкоград, В. А. Плисс, Э. М. Вайсборд, В. С. Блинчевский, Б. П. Демидович, В. В. Королев.

Б. П. Демидович исследовал вопрос о периодических решениях для систем

$$\dot{x} = f_{10}(t, x, y) + x f_{11}(t, x, y) + y f_{12}(t, x, y),$$

$$\dot{y} = f_{20}(t, x, y) + x f_{21}(t, x, y) + y f_{22}(t, x, y),$$

где $f_{ij}(t, x, y)$ — периодические функции с одним периодом по t . Все признаки (за исключением одного) существования периодических

решений построены на основании изучения корней λ уравнения

$$\begin{vmatrix} f_{11} - \lambda & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

и обобщают признаки С. Лефшеца. В этой работе даются признаки существования периодических решений систем $\dot{x} = f(t, x)$, $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$ (x — вектор) и делается обзор некоторых методов решения вопроса о существовании периодических решений, основанных на существовании неподвижной точки преобразования. Н. А. Артемьев оценивал число периодических решений таких систем (1939 г.). Н. Н. Виноградов разработал (1965 г.) метод перехвата (основанный на методе неподвижной точки преобразования) для исследования вопроса о периодических решениях и качественной теории в целом. Периодические решения систем

$$\dot{x} = F(x, t) \quad (F \text{ и } x \text{ — векторы}),$$

имеющие периоды, несоизмеримые с периодом $F(x, t)$ или с непериодической функцией $F(x, t)$, рассматривал Н. П. Еругин и зарубежные ученые Т. Массера, Я. Курцвейль, О. Вейвода.

Интересно отметить, что если имеем систему (Лукашевич)

$$\dot{x} = P(x, y, t), \quad \dot{y} = Q(x, y, t), \quad (49)$$

то может случиться, что есть замкнутое решение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, но не периодическое (т. е. точка $x(t)$, $y(t)$ движется по замкнутой кривой). Тогда существует замена независимой переменной $t = \alpha(\tau)$, которая переводит систему (49) в такую, правые части которой будут периодическими функциями от τ , а рассматриваемое решение — периодическое относительно τ . Если P и Q — периодические относительно t функции, то период решений как функций τ может оказаться несоизмеримым с прежним периодом.

Н. Н. Боголюбов (мл.) и Б. И. Садовников построили (1963 г.) метод нахождения периодического решения уравнения n -го порядка в виде ряда по положительным степеням малого параметра, входящего в дифференциальное уравнение. М. З. Колосский обосновал применение метода малого параметра для отыскания периодических решений, близких к разрывным решениям порождающей системы. Е. Н. Розенвассер нашел (1963 г.) условия, при которых некоторые приближенные методы отыскания периодических решений оправданы. Ю. А. Рябов (1963 г.), С. Н. Шиманов, А. Е. Гельман, А. А. Круминг (1953 г.) оценивали область применимости метода малого параметра при отыскании приближенного построения периодического решения (по методам Пуанкаре — Ляпунова и Крылова — Боголюбова).

Вопрос о сохранении и устойчивости периодического решения при постоянно действующих возмущениях правых частей дифференциальных уравнений, как мы видели, рассматривался Н. А. Артемьевым



Президиум Международного симпозиума по нелинейным колебаниям. Слева направо: В. В. Немыцкий (СССР), А. Н. Тихонов (СССР), Т. Хаяси (Япония), Ю. А. Митропольский (СССР), С. А. Лефшец (США), Л. С. Понтрягин (СССР), С. Земба (Польская Народная Республика), А. И. Лурье (СССР), Киев. 1961 г.

(1939 г.). Затем его исследовали Н. Н. Красовский (1957 г.), Е. А. Барбашин (1956 г.).

В «Трудах Международного симпозиума по нелинейным колебаниям» опубликовано большое число интересных работ и зарубежных авторов по изучению периодических решений: В. Бадера (ФРГ), Г. Брадистилова (Болгария), В. Вазова (США), Р. М. Розенберга, С. С. Гсу (США), Т. Хаяси, Г. Сибаяма, И. Уеда (Япония), Р. Конти, Д. Граффи, Дж. Сансоне (Италия).

Обобщая результаты Пуанкаре, периодические решения систем с малым параметром исследовал И. Г. Малкин (1951 г.), а устойчивость периодического решения — И. И. Блехман (1963 г.). Еще более общие случаи при использовании теории неявных функций рассматривали А. П. Проскуряков (1958—1961 гг.), Н. Н. Серебрякова (1963 г.), Г. В. Плотникова (1962—1963 гг.), Ю. М. Копнин (1965 г.). На основе метода Н. Н. Боголюбова этот вопрос решали Ю. А. Митропольский (1959—1960 гг.), О. Б. Лыкова (1960—1964 гг.), Г. Н. Пученкин (1961 г.).

Ряд работ посвящен исследованию периодических решений систем $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$ (x, y, f и g — векторы, а ε — малый параметр), близких периодическим решениям систем $\dot{y} = g(x, y)$, $f(x, y) = 0$ (Н. А. Железцов, Л. В. Родыгин, Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягин). Метод краевых задач для доказательства существования периодических решений разрабатывали Н. В. Азбелев (1958 г.), З. Б. Цалюк (1958 г.), А. Я. Хохряков (1963—1965 гг.), А. М. Колобов,

Б. М. Архипов (1965 г.). М. А. Красносельский (1956 г.) и А. И. Перов (1958 г.) нашли признаки существования периодических решений методами функционального анализа.

Многие из указанных здесь работ по исследованию периодических решений связаны с работами, которые выполнили зарубежные математики Гафари, Беллман, Лефшец, Сансоне, Чжан-Чжи-фэн, Ф. Б. Фуллер, Мунтяну, Б. Олек, Тунг-чин-чу, Р. де Вогеларе, Хуан-ци-юй, Литтлвуд, Фридрихс, Эзейло, Левинсон, Гомори, Минорский, Чин-Юан-Шен, Халанай. Особенно обращают на себя внимание работы Картрайта и Литтлвуда, а также серия работ польских и других математиков, выполненных на основе метода Важевского, работы С. Лефшеца, Р. Беллмана и др. А. Н. Еругин построил (1966 г.) классификацию решений системы [38] по их асимптотическим свойствам при $t \rightarrow \infty$.

12

Ограниченные решения

За последние 15 лет вопросы существования и построения ограниченных решений привлекают к себе большое внимание. Если удалось доказать, что нулевое решение устойчиво в смысле Ляпунова, то тем самым удалось доказать, что решения, начинающиеся в окрестности нулевого решения, являются ограниченными. Тогда речь может идти только о том, какова область начальных значений, в которой проходят ограниченные решения. Такой областью может оказаться и вся область задания системы дифференциальных уравнений. Периодическое решение — ограниченное решение. Решения, начинающиеся в окрестности устойчивого предельного цикла, являются ограниченными при $t \rightarrow +\infty$. Но во многих работах решается вопрос о наличии одного ограниченного решения или семейства ограниченных решений, без выяснения дополнительных свойств этого ограниченного решения. Например, Н. П. Еругин показал (1951 г.), что если полутраектория $(x(t), y(t))$ при $t \rightarrow \infty$ системы $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ (где P и Q обеспечивают единственность решений на всей плоскости) не остается в ограниченной части плоскости и не стремится к бесконечности при $t \rightarrow +\infty$, то она остается в ограниченной части плоскости при $t \rightarrow -\infty$.

Пусть все решения заданной системы ограничены при $t \rightarrow \infty$. Может оказаться при этом, что все решения при $t \rightarrow \infty$ заходят в одну и ту же область D и остаются там. Такие системы называются диссипативными. Их рассматривал еще Болье. Продолжая исследования Боля, П. В. Атрашенко, а затем и В. В. Немыцкий нашли условия диссипативности и оценили область D через параметры правых частей заданных дифференциальных уравнений.

Б. П. Демидович рассмотрел (1956 г.) вопрос о существовании предельного режима системы $\dot{x} = F(x) + G(t)$, где $F(x)$ и $G(t)$ —

векторы. Он решил вопрос об ограниченных решениях для систем

$$\dot{x} = xA + \varphi(t, x, \mu) \text{ и } \dot{x} = f(x, t),$$

где x — вектор, A — постоянная матрица, не имеющая характеристических чисел с нулевой вещественной частью, μ — малый параметр, $\varphi(t, x, \mu)$ — непрерывный вектор и $\varphi(t, x, \mu) \geq 0$ при $\|x\| \rightarrow \infty$. Здесь обобщается теорема Боля на основе принципа Важевского. Если $\varphi(t, x, \mu)$ — почти периодическая функция t , то и ограниченное решение будет почти периодическим. Почти периодические решения суть ограниченные решения. Общие исследования по диссипативным системам и для конкретных классов систем провел В. А. Плисс²⁴. Диссипативные системы нашли широкое применение в механике систем в работах Я. М. Скворецкого и С. Зембы. На основе функции Ляпунова абсолютную устойчивость и диссипативность изучал (1964 г.) В. А. Якубович.



Б. П. Демидович.

13

Линейные и нелинейные системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

В работах А. М. Ляпунова проведено глубокое исследование линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Он построил почти исчерпывающее бесконечное число признаков ограниченности и неограниченности всех решений уравнения

$$\ddot{x} + p(t)x = 0, \quad p(t + \omega) = p(t), \quad p(t) \geq 0. \quad (50)$$

Ляпунов рассмотрел также случай знакопеременного $p(t)$. Большое число работ (начиная с исследований Н. Е. Жуковского) посвящено частным достаточным признакам ограниченности решений уравнения (50). Тот случай, когда не выполнено ни одно из условий, полученных Ляпуновым для уравнения (50), полностью рассмотрел Н. П. Еругин (1948 г., 1963 г.). Он показал, что в этом случае есть периодические решения. В последние годы ряд обобщающих исследований в этом направлении выполнен воронежским математиком А. А. Левиным.

²⁴ См.: Р. Беллман. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. ИЛ, М., 1954.

Начиная с работ Н. А. Артемьева (1941 г., 1944 г.) были предприняты поиски признаков ограниченности решений и существования периодических решений системы ²⁵

$$\dot{X} = XP(t), \quad P(t + \omega) = P(t), \quad (51)$$

где $P(t)$ — матрица.

Даны способы построения интегральной матрицы X в виде

$$X = e^{At} Z(t). \quad (52)$$

Большой цикл работ посвящен уравнениям вида

$$\dot{X} = XP(t, \varepsilon), \quad P(t, \varepsilon) = P(t + \omega; \varepsilon), \quad (53)$$

где $P(t, \varepsilon)$ — матрица, голоморфная в окрестности $\varepsilon = 0$ (или только непрерывная, как у Артемьева). Н. А. Артемьев в своих работах (1941 г.) начал изучение вопроса о поведении решений системы (53) при малых ε , когда известно поведение решений ²⁶ (например, неасимптотическая устойчивость) при $\varepsilon = 0$. У него же поставлен вопрос о представлении интегральной матрицы X уравнения (53) в виде (52), где, таким образом, A и $Z(t)$ будут функциями от ε . В работе Артемьева появился способ последовательного определения коэффициентов разложений величин A и $Z(t)$ в виде

$$A(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \varepsilon^k, \quad Z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(t) \varepsilon^k \quad (54)$$

из уравнений

$$\dot{Z}_k(t) = Z_k(t) P_0(t) - A_0 Z_k(t) + F_k(t) - A_k Z_0(t). \quad (55)$$

Но в этой работе не было закончено доказательство сходимости рядов (54) во всех возможных случаях. В работе Н. П. Еругина «Приводимые системы» (1942 г.) этот вопрос полностью решен для частного случая

$$\dot{X} = XP(t) \varepsilon;$$

в работе Фукухара — для системы общего вида (53). Здесь найдены и разложения характеристических чисел ²⁷ матрицы $A(\varepsilon)$ по дробным степеням ε (или по целым, когда это возможно). Независимо от Фукухара вопрос о разложениях (54) изучал иным способом Н. П. Еругин в работе «Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений» (1956 г.).

Область сходимости рядов (54) рассматривал Н. П. Еругин в работе «Приводимые системы». Здесь было показано, что радиус сходимости этих рядов не меньше $r^* = |\varepsilon^*|$, где $\varepsilon^* = \varepsilon \neq 0$ такое (ближайшее к $\varepsilon = 0$), при котором матрица $V = X(\omega, \varepsilon)$ имеет кратные корни.

²⁵ Такие уравнения начал рассматривать и Чезари, а затем Гэмбилл и др.

²⁶ Этот же вопрос подробно обсуждался в работе И. М. Гельфанда и В. Б. Лидского (1954 г.) для гамильтоновых систем.

²⁷ Этот вопрос рассматривался в работе Артемьева, но до конца не был решен.

Особая точка $\varepsilon = \varepsilon^*$ может быть и такой, что непростой элементарный делитель матрицы $X(\omega, \varepsilon)$ может порождать несколько элементарных делителей меньшей степени. Ряды (54) могут сходиться при $\varepsilon = \varepsilon^*$ и в том случае, когда величина

$$\ln \sum_{k=0}^{\infty} X_k \varepsilon^k = \sum_{k=0}^{\infty} W_k \varepsilon^k$$

в окрестности ε^* является иррегулярной.

По поводу сходимости рядов (54) интересно отметить следующее. Рассмотрим уравнение (53) и представление матрицы

$$X = e^{\sum_{k=0}^{\infty} A_k \varepsilon^k t} \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(t) \varepsilon^k.$$

Мы видели, какие обстоятельства ограничивают радиус сходимости этих рядов по сравнению с радиусом сходимости ряда

$$V = X(\omega, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(\omega) \varepsilon^k$$

или ряда

$$P(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \varepsilon^k. \quad (56)$$

Сравним это с теоремой 35.2 в книге Н. П. Еругина «Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений» (1963 г.). В этой теореме утверждается, что радиус сходимости рядов, представляющих периодические решения уравнения (53), совпадает с радиусом сходимости ряда (56). Периодические решения системы (53) порождаются характеристическими числами $\nu = 1$ матрицы $V(\omega, \varepsilon)$, т. е. корнями $\nu = 1$ уравнения $|V - I\nu| = 0$. Характеристическое число $\nu = 1$ порождает в матрице

$A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \varepsilon^k$ характеристическое число $a_k = 0$. Это указывает на то,

что ряды $\sum_{m=0}^{\infty} A_{kl}^{(m)} \varepsilon^m$ и $\sum_{m=0}^{\infty} Z_{kl}^{(m)}(t) \varepsilon^m$, представляющие элементы A_{kl} матрицы $A(\varepsilon)$ и матрицы $Z(t, \varepsilon)$, могут иметь различные радиусы сходимости при разных k, l .

И. Н. Блинов оценил радиус сходимости рядов, представляющих $A(t, \varepsilon)$ и $Z(t, \varepsilon)$, и остаточные члены, используя работы И. З. Штокало и А. Е. Гельмана. Многие уравнения вида (53) и со многих точек зрения (ограниченность и периодичность решений) изучал П. Б. Голоквочус. Мы не останавливаемся на таких многих задачах из этой области, как, например, изучение поведения решений системы (53) на основе матрицы $V = X(\omega, \varepsilon)$, опираясь на условия нахождения характеристических чисел матрицы $X(\omega, \varepsilon)$ на единичной окружности, связь теории уравнений (53) с проблемой Пуанкаре — Лапко-Данилевского, задача Артемьева, обобщающая многие задачи для уравнений (53)

и т. д. Много работ посвящено разысканию характеристических чисел линейной системы с периодическими коэффициентами, например, С. Н. Шиманова (1958 г.), В. А. Якубовича (1954 г.), М. Г. Крейна (1951—1962 гг.).

Большой обзорный доклад ²⁸ на Международном симпозиуме по нелинейным колебаниям о гамильтоновых системах линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами сделали (1963 г.) М. Г. Крейн и В. А. Якубович. Здесь также рассматривалась задача (она формулировалась и решалась Н. А. Артемьевым (1941—1944 гг.)) о сохранении устойчивости (неасимптотической) решений гамильтоновых линейных систем при малых вариациях матрицы и коэффициентов. Обсуждался и вопрос об области значений параметров системы, при которых нарушается устойчивость решений.

Канонические системы исследуются и в книге Н. П. Еругина «Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений» (1963 г.).

14

Линейные системы с квазипериодическими коэффициентами

Вопрос об ограниченности всех решений линейной системы

$$\frac{dX}{dt} = X [A + \varepsilon F(t, \varepsilon)], \quad (57)$$

где $F(t, \varepsilon)$ — ограниченная матрица, X — интегральная матрица, A — постоянная матрица и ε — малый параметр, решен А. М. Ляпуновым в 1892 и в 1900 гг., несколько иначе — Бодем, если вещественные части характеристических чисел матрицы A отрицательные. В случае, когда $F(t + \omega, \varepsilon) = F(t, \varepsilon)$, а A имеет нулевые вещественные части характеристических чисел, ограниченность решений начали изучать Н. А. Артемьев (1941 г. и Н. П. Еругин 1942 г.).

Решение задачи облегчается свойством интегральной матрицы $X(t + \omega) = VX(t)$, где V — постоянная матрица. Но проблема становится намного труднее, если $F(t, \varepsilon)$ непериодическая (и есть характеристические числа матрицы A с нулевой вещественной частью). И. З. Штокало впервые (1945 г.) рассмотрел это в случае, когда матрица A имеет нулевые или чисто мнимые характеристические числа, а $F(t, \varepsilon)$ — квазипериодическая матрица-функция от t (или даже почти периодическая).

И. З. Штокало строит формальную матрицу

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \varepsilon^k, \quad A_0 = A,$$

с постоянными матрицами A_k , которые легко находятся по его способу.

²⁸ В этом докладе рассматривались работы И. Г. Малкина, М. Г. Крейна, Г. Я. Любарского, И. М. Гельфанда, В. Б. Лидского, М. Г. Нейгауза, В. М. Старжинского, К. Р. Коваленко, Ж. Сейдена, В. А. Якубовича, Б. Г. Питтеля, И. И. Гольденблатта, К. Г. Валеева, некоторые технические работы и ряд зарубежных.



Научный семинар по дифференциальным уравнениям акад. АН УССР И. З. Штокало. 1-й ряд (слева направо): И. З. Штокало, К. Г. Валеев, И. А. Павлюк, П. С. Бондаренко, Л. Н. Грацианская, Н. И. Шкиль, Н. И. Терещенко, Д. И. Мартынюк, 2-й ряд: И. И. Старун, А. Г. Кузьменко, Б. И. Мосеенков, В. А. Волкова, М. М. Сидляр, В. В. Довгай, Г. О. Разин, В. М. Алексеев, Г. С. Орел, Т. З. Дерикот, Ю. И. Сикорский. 1968 г.

Согласно его теореме, если теперь при каком-нибудь m и достаточно малом ε матрица

$$U_m = \sum_{k=0}^m A_k \varepsilon^k$$

имеет характеристические числа только с отрицательной вещественной частью, то $X(t) \rightarrow \|0\|$, т. е. все решения уравнения (57) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Если же матрица U_m при каком-нибудь m и достаточно малых ε имеет характеристические числа с положительной вещественной частью, то система (57) имеет неограниченное решение.

Заметим, что и в случае периодической матрицы $F(t, \varepsilon)$ эта теорема играет фундаментальную роль при исследовании асимптотической устойчивости нулевого решения, так как освобождает нас от проверки схо-

димости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} A_k \varepsilon^k$ при тех значениях ε , при которых вещественные

части характеристических чисел матрицы $\sum_{k=0}^m A_k \varepsilon^k$ будут отрицательные (и при которых, согласно теореме Штокало, имеем асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (57)).

В последние годы обратили на себя внимание исследования В. Х. Харасахала и его учеников по линейным системам



А. В. Быков.

с квазипериодическими коэффициентами. В этих исследованиях рассматриваются вопросы правильности, приводимости, ляпуновские матрицы, приводящие систему (57) к системе с постоянными коэффициентами, и возможная структура решений таких систем, напоминающая вид решений приводимых систем, а также вопрос о существовании почти периодических решений таких систем уравнений. Структуру решений линейных систем с почти периодическими коэффициентами изучал Б. Ф. Былов (1965 г.).

И. Н. Блинов также исследовал (1965 г.) уравнение

$$\dot{X} = X \left[P_0 + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) \right],$$

где $P_k(t)$ — матрицы с почти периодическими элементами, а P_0 — диагональная матрица с различными постоянными диагональными

элементами. При некоторых предположениях относительно области изменения λ рассматриваются вопросы правильности, приводимости и устойчивости, а также существования почти периодических решений. Эти исследования опираются на работы А. Гельмана.

Ограниченность, периодические, почти периодические и осциллярные решения систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими и почти периодическими коэффициентами рассматривал Я. В. Быков (1965 г.). Он же изучал задачу о разложении периодических решений в ряд по дробным степеням параметра μ , входящего в правую часть дифференциальных уравнений.

Еще в 1945 г. Н. Н. Боголюбов провел исследования о почти периодических решениях системы нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр.

В 1954 г. Г. И. Бирюк для некоторой весьма общей системы с малым параметром построила почти периодическое решение. Этот же вопрос изучал также И. Г. Малкин. Б. П. Демидович на основе методов Боля и Важевского доказал существование ограниченных, и в частности почти периодических, решений для систем более общего вида. Он также рассмотрел вопрос о почти периодических решениях для уравнения²⁹ $\dot{x} = f(x) + g(t)$, где $g(t)$ — непрерывная почти периодическая функция.

Большая серия работ посвящена трудному вопросу устойчивости точки равновесия гамильтоновых нелинейных систем с малым пара-

²⁹ Очень интересны исследования о возможных периодических решениях М. Л. Картрайт.

метром в правой или левой части уравнений. Эти работы начались исследованиями А. Н. Колмогорова (1953—1954 гг.) и продолжены В. И. Арнольдом (1963 г.). Глубокие исследования в этом же направлении провел К. Л. Зигель. Здесь возникают почти периодические решения, когда точка равновесия устойчива. Этой темы коснулся и Н. П. Еругин (1967 г.).

15

Уравнения с малым параметром при старшей производной

Начало систематического изучения обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных относится приблизительно к 1950 г. Тема обусловлена развитием физики и техники, в частности теории автоматического регулирования, теории колебаний, теории цепных реакций. Хотя многие вопросы этого направления решаются в рамках классического анализа и теории дифференциальных уравнений и в принципе могли бы быть разработаны значительно раньше, но, по-видимому, в более ранние годы такое направление недостаточно стимулировалось потребностями практики.

Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений (z, y — векторы) с малым параметром $\mu > 0$

$$\begin{aligned}\mu \frac{dz}{dt} &= F(z, y, t), \\ \frac{dy}{dt} &= f(z, y, t),\end{aligned}\tag{58}$$

решение которой определяет некоторыми дополнительными условиями. С точки зрения физики наличие μ в (58) соответствует наличию в системе слабо инерционного элемента (например, малой массы в механической системе, малой индуктивности в электрической, быстрого активного центра в системе кинетических уравнений, описывающих химическую реакцию и т. д.). Возникает вопрос о том, как воспользоваться малостью μ для приближенного описания решения. Полагая в системе (58) $\mu = 0$, получим более простую систему

$$\begin{aligned}0 &= F(z, y, t), \\ \frac{dy}{dt} &= f(z, y, t),\end{aligned}\tag{59}$$

которая называется вырожденной, так как ее порядок ниже порядка исходной системы. Решение такой вырожденной системы, вообще говоря, не может удовлетворить всем дополнительным условиям, которым удовлетворяет решение исходной системы.

Ко времени начала изучения системы (58) были хорошо известны результаты, относящиеся к случаю, когда μ входит регулярно в правую часть системы

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t, \mu). \quad (60)$$

При $\mu = 0$ порядок системы не понижается, т. е. $\frac{dx}{dt} = F(x, t, 0)$, и решение этой системы, удовлетворяющее тем же дополнительным условиям, что и решение системы (60), является для последнего достаточно хорошим приближением при весьма общих предположениях. В случае же (58) (если (58) записать в виде (60), то справа по μ будет полюс) в силу указанной выше «потери» дополнительных условий возможность использования решения вырожденной системы в качестве приближения для решения исходной системы требовала тщательной проверки. В самом деле, априори было неясно, какие из дополнительных условий, заданных для исходной системы, следует оставить для определения решения вырожденной системы, а какие отбросить, чтобы получить нужное, т. е. близкое к исходному, решение. Кроме того, если уравнение $F(z, y, t) = 0$ имеет относительно z несколько корней, то опять-таки было неясно, как нужно выбирать корень для получения правильного приближения. Простейшие примеры показывали, что в случае (58) возникают особенности, которые не наблюдались для регулярного случая (60). Так, для уравнения $\mu = \frac{dz}{dt} = az$ решение задачи Коши $z|_{t=0} = z^0$ имеет вид $z = z^0 \exp \frac{at}{\mu}$ и, таким образом, при малых μ близко к вырожденному $z = 0$ лишь, если $a < 0$; если же $a > 0$, то оно при $\mu \rightarrow 0$ уходит в бесконечность. Из этого примера видно, что близость исходного решения к вырожденному имеет место лишь при некоторых специальных дополнительных условиях на правые части. Необходимо было выяснить, каковы эти условия в общем нелинейном случае (для данного простейшего примера эти условия должны были сводиться к требованию определенного знака a). Вот тот первоначальный круг вопросов, с которого начиналось изучение системы (58).

Задача Коши. Первые работы, относящиеся к системе (58), были посвящены задаче Коши, как наиболее простой задаче. Основополагающие результаты принадлежат А. Н. Тихонову и И. С. Градштейну. Наиболее общий результат Тихонова относится к 1952 г. Этому предшествовали еще две его работы (1948, 1950 гг.), также посвященные нелинейным случаям, но при более частных предположениях. Параллельно с А. Н. Тихоновым этой же задачей занимался И. С. Градштейн (1949—1953 гг.), начавший, правда, с линейных уравнений, но в дальнейшем успешно разрабатывавший также нелинейные случаи. Работы Тихонова и Градштейна, пожалуй, следует считать в СССР первоначальными в теории дифференциальных уравнений с малым параметром при производных ³⁰.

³⁰ Если не считать работ И. М. Волка (1946—1947 гг.), о которых речь будет идти ниже. Работы эти, однако, не вызвали развития темы.

Результаты работы А. Н. Тихонова (1952 г.) заключаются в следующем. Пусть уравнение $F(z, y, t) = 0$ определяет в некоторой замкнутой области $D(y, t)$ несколько изолированных корней $z = \varphi_i(y, t)$. Введем так называемую присоединенную систему

$$\frac{dz}{d\tau} = F(z, y^*, t^*), \quad (61)$$

в которой y^* и t^* рассматриваются как параметры. Возьмем один из корней $z = \varphi_i$ и обозначим его $z = \varphi(y, t)$. Назовем корень $z = \varphi(y, t)$ устойчивым в D , если для каждой точки $(y^*, t^*) \in D$ соответствующая точка покоя $z = \varphi(y^*, t^*)$ присоединенной системы (61) является асимптотически устойчивой по Ляпунову. Вводится также понятие области влияния (иногда говорят притяжения) устойчивого корня $z = \varphi(y, t)$, представляющей собой множество точек z^*, y^*, t^* ($(y^*, t^*) \in D$), таких, что решение (61), определяемое начальным условием $z|_{\tau=0} = z^*$, стремится к $\varphi(y^*, t^*)$ при $\tau \rightarrow \infty$. Основным результатом Тихонова состоит в том, что если $z = \varphi(y, t)$ — устойчивый корень и точка $(0, y^0, z^0)$ принадлежит его области влияния, то решение системы (58), определяемое начальным условием $y|_{t=0} = y^0, z|_{t=0} = z^0$, при $\mu \rightarrow 0$ стремится к решению вырожденной системы (59), которое соответствует корню $z = \varphi(y, t)$, т. е.

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} y(t, \mu) = \bar{y}(t), \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} z(t, \mu) = \bar{z}(t) \equiv \varphi(\bar{y}(t), t), \quad (62)$$

$$(0 \leq t \leq T) \quad (0 < t \leq T)$$

где $\bar{y}(t)$ находится из системы

$$\frac{dy}{dt} = f(\varphi(y, t), y, t) \quad (63)$$

при начальном условии $\bar{y}|_{t=0} = y^0$. Число T связано с размером области D .

Таким образом, по крайней мере в отношении задачи Коши теорема отвечает на все вопросы, поставленные в конце предыдущего пункта. Доказательство этой теоремы основано на простой идее, что в окрестности начальной точки независимое переменное t близко к нулю, y , как относительно медленно меняющаяся функция, близко к y^0 , а тем самым быстро меняющееся z близко к решению присоединенной системы (61), в которой положено $\tau = \frac{t}{\mu}, y^* = y^0, t^* = 0$, определяемому условием $z|_{\tau=0} = z^0$, и вместе с этим решением приближается к значению $\varphi(y^0, 0)$. Таким образом, интегральная кривая попадает в окрестность поверхности $z = \varphi(y, t)$, а далее в силу устойчивости корня $z = \varphi(y, t)$ величина z будет оставаться вблизи значения $\varphi(y, t)$ и тем самым y будет приближенно описываться системой (63). Предельный переход $z \rightarrow \bar{z}$ не является равномерным в связи с тем, что $z^0 \neq \varphi(y^0, 0)$ и в окрестности $t = 0$ существует (правда, бесконечно узкая) область, где z близко не к φ , а к решению присоединенной системы. Это явление получило в дальнейшем название явления пограничного слоя. Название заимствовано из гидродинамики, где встречаются уравнения типа (58) (уравнение Навье — Стокса в случае малой вязкости).

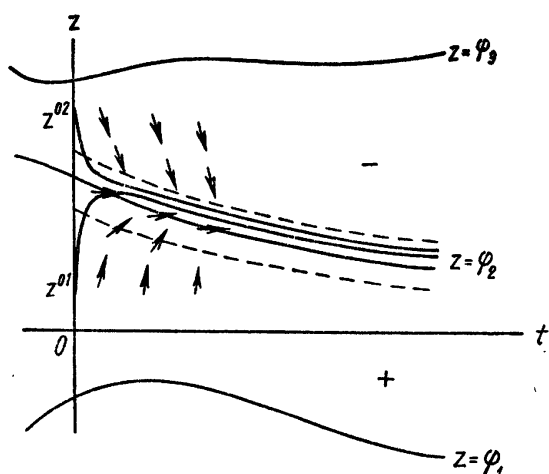


Рис. 3. Поле направлений.

кости, расположенная между кривыми $z = \varphi_1(t)$ и $z = \varphi_3(t)$ и содержащая кривую $z = \varphi_2(t)$. На рис. 3 изображены две интегральные кривые, начинающиеся в точках z^{01} и z^{02} . Для данного примера нетрудно построить поле направлений. Если μ достаточно мало, то поле всюду направлено почти вертикально за исключением некоторой малой окрестности кривой $z = \varphi_2(t)$, на которой поле направлено горизонтально. Поэтому интегральная кривая, начинающаяся в z^{01} (или в z^{02}), пойдет резко вверх (или соответственно вниз), пока не приблизится к $\varphi_2(t)$, и в дальнейшем уже останется вблизи $\varphi_2(t)$. Кривая φ_2 как бы притягивает интегральные кривые, а φ_1 и φ_3 их отталкивают. Заметим, однако, что если интегрироваться решением задачи Коши слева от начальной точки, т. е. для $t \leq 0$, то φ_1 и φ_3 будут притягивать интегральные кривые, а φ_2 их отталкивать; решение, начинающееся в z^{01} , будет стремиться к $\varphi_1(t)$, а решение, начинающееся в z^{02} , — к $\varphi_3(t)$. Явление пограничного слоя на рис. 3 отчетливо заметно.

Из сказанного ясно, какую большую роль играет условие устойчивости корня. Различным критериям устойчивости по Ляпунову соответствуют различные критерии устойчивости корней. Одним из наиболее употребительных критериев является критерий устойчивости по первому приближению, заключающийся в требовании, чтобы действительные части корней λ характеристического уравнения

$$\text{Det} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{z=\varphi(y,t)} - \lambda E \right) = 0 \quad (64)$$

были отрицательными в D . Этот критерий был впервые использован в работе И. С. Градштейна (1949 г.).

Возникает естественный вопрос: что будет, если условие устойчивости нарушается? Случаи нарушения весьма разнообразны. В первую очередь был рассмотрен случай невыполнения условий устойчивости, при котором λ в уравнении (64) оказываются чисто мнимыми. К этому классу относится уравнение

$$\mu^2 \frac{d^2 y}{dt^2} = F(y, t), \quad (65)$$

Указанные закономерности нетрудно проследить на простом случае $\mu \frac{dz}{dt} = F(z, t)$. Пусть уравнение $F(z, t) = 0$ имеет непересекающиеся корни $z = \varphi_1, \varphi_2, \dots$, причем F меняет знак при переходе через каждый корень и расположение знаков таково, как указано на рис. 3 (+ или -). Очевидно, корень $z = \varphi_2(t)$ будет устойчивым в смысле данного выше определения, а $z = \varphi_1(t)$ и $z = \varphi_3(t)$ этим свойством не обладают. Областью влияния устойчивого корня будет в данном случае часть плоскости

эквивалентное системе $\mu \frac{dz}{dt} = F(y, t)$, $\mu \frac{dy}{dt} = z$. Чисто мнимые λ получаются при условии $\frac{dF}{dy} < 0$. Уравнение (65) было впервые рассмотрено В. М. Волосовым в 1950 г. Оказалось, что в этом случае $y(t, \mu)$ при $\mu \rightarrow 0$ предела не имеет, а колеблется с бесконечно большой частотой и конечной амплитудой, зависящей от начальных данных, около вырожденного решения $y = \varphi(t)$ ($\varphi(t)$ — корень уравнения $F(y, t) = 0$). Для y было получено представление $y(t, \mu) = \varphi(t) + u(t, \mu)$, где $u(t, \mu)$ — колеблющаяся функция с частотой порядка $1/\mu$. Для максимумов и минимумов этой функции были построены так называемые опорные кривые $F_1(t)$ и $F_2(t)$ (при $\mu \rightarrow 0$ экстремумы и приближаются к этим кривым), удовлетворяющие некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений, не содержащей μ . В. М. Волосовым получены аналогичные результаты также для более сложных случаев, в частности для уравнения $\mu^2 y^{(n)} = F(t, y, y^1, \dots, y^{(n-2)})$. В дальнейшем Волосов развивал метод осреднения (см. ниже, стр. 433).

Если действительные части корней характеристического уравнения (64) имеют разные знаки, то решение задачи Коши при $\mu \rightarrow 0$, вообще говоря, уходит в бесконечность. Этот случай был рассмотрен значительно позднее в связи с краевыми задачами.

Нарушение условия устойчивости в отдельных точках может привести к так называемым явлениям срыва.

Дальнейшее исследование задачи Коши как самостоятельной задачи велось в направлении усложнения системы (58) или увеличения промежутка, на котором рассматривается решение, а также в направлении построения асимптотики решения.

Асимптотика решения задачи Коши. Известно, что в случае (60) асимптотической формулой для решения задачи Коши $x|_{t=0} = x^0$ может служить обычная формула Маклорена

$$x(t, \mu) = \bar{x}_0(t) + \mu \bar{x}_1(t) + \dots \quad (66)$$

Коэффициенты этого разложения определяются из уравнений в вариациях (получаемых подстановкой (66) в (60) и приравниванием членов с одинаковыми степенями μ) при начальных условиях $\bar{x}_0|_{t=0} = x^0$, $\bar{x}_k|_{t=0} = 0$, $k > 0$. Наличие пограничного слоя в системе (58) приводит к существенному изменению этой схемы. Правда, вне пограничного слоя ($0 < t < t_0 \leq t \leq T$) можно воспользоваться разложением типа (66), но если при этом начальные значения коэффициентов считать, как и в регулярном случае (60), нулевыми, то полученный ряд не будет давать асимптотики для рассматриваемого решения. Чтобы получить правильную асимптотику, эти начальные значения нужно задать специальным образом (см. формулы (67)). Если же требуется получить асимптотику, равномерную на всем промежутке $0 \leq t \leq T$, то к разложению (66) нужно добавить еще одно разложение, члены которого зависят от μ экспоненциально (убывают, как $\mu^n \exp\left(-\frac{\alpha t}{\mu}\right)$, $\alpha > 0$).

Приведем правило построения такой равномерной асимптотики, справедливое при выполнении условия устойчивости по первому приближению (64). Это правило было установлено А. Б. Васильевой (1948—1960 гг.). Сделаем в системе (58) замену переменных $\tau = t\mu$ и построим формальное решение полученной таким образом системы в виде ряда (x означает y и z в совокупности)

$$x = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \dots$$

Коэффициенты этого разложения определим из уравнений в вариациях при начальных условиях $x_0|_{\tau=0} = x^0$, $x_k|_{\tau=0} = 0$ ($k > 0$). Построим также формальное решение (58), не делая замены переменных, в виде ряда

$$x = \bar{x}_0(t) + \mu \bar{x}_1(t) + \dots$$

Начальные значения для определения коэффициентов этого ряда получим следующим образом. Обозначим $\Pi_k[x] = x_k(\tau) - \sum_{i=0}^k \tau^i \bar{x}_{i,k-i}(\bar{x}_{i,k-i}$ есть i -й коэффициент разложения $\bar{x}_{k-i}(t)$ по степеням t). Назовем $\Pi_k[x]$ Π -операторами, или операторами пограничного слоя. Π -операторы определены и на правых частях системы (58), являющихся функциями x . При помощи Π начальные значения для определения $\bar{x}_k(t)$ запишутся следующим образом:

$$\bar{y}_0|_{t=0} = y^0, \quad \bar{y}_k|_{t=0} = \int_0^\infty \Pi_{k-1}[f] d\tau \quad (k > 0). \quad (67)$$

А. Б. Васильевой доказано, что выражение

$$X_n = \sum_{k=0}^n \{\bar{x}_k + \Pi_k[x]\} \mu^k \quad (68)$$

служит для решения задачи Коши асимптотической формулой с остаточным членом, имеющим равномерную оценку $O(\mu^{n+1})$ на отрезке $0 \leq t \leq T$. $\Pi_k[x]$ как функции τ убывают подобно функции $\exp(-\alpha\tau)$ ($\alpha > 0$), и, таким образом, формула (68) на отрезке $0 < t_0 \leq t \leq T$ (вне пограничного слоя) переходит в формулу маклореновского типа. Заметим, что $\bar{x}_0(t)$ это то самое решение вырожденной системы, которое в (62) обозначено через $\bar{y}(t)$, $\bar{z}(t)$. Для простейшего случая, представленного на рис. 3, приближение точности $O(\mu)$, получаемое по формуле (68), имеет вид $z = \varphi_2(t) + z_0\left(\frac{t}{\mu}\right) - \varphi_2(0)$, где $z_0(\tau)$ — решение уравнения $\frac{dz_0}{d\tau} = F(z_0, 0)$. Здесь $\Pi_0[z] = z_0\left(\frac{t}{\mu}\right) - \varphi_2(0)$ — экспоненциально убывающая поправка к вырожденному решению $\varphi_2(t)$.

Задачи с другими дополнительными условиями. Асимптотическая формула (68) содержит как параметры начальные значения x^0 . Если x^0 определить надлежащим образом, возникает возможность удовлетворять различным дополнительным условиям. Именно на этом пути А. Б. Васильева изучала вопрос о существовании, единственности и

асимптотике решения двухточечной краевой задачи, а также многоточечной, с подвижной границей и др.

Пусть краевое условие имеет вид

$$R(x(0), x(1)) = 0. \quad (69)$$

Подставляя сюда асимптотическое разложение (68), соответствующее начальной точке t^0 , в которой начальное значение x^0 в свою очередь представлено как степенное разложение по μ (приведенная здесь формула (68) относится к случаю $t^0 = 0$ и не зависящих от μ начальных значений x^0 , но легко видоизменяется применительно к случаю регулярной зависимости x^0 от μ и отличного от нуля t^0), получим уравнения для определения коэффициентов разложения $x^0(\mu)$ по μ , а тем самым определим некоторое формальное решение, удовлетворяющее краевому условию (69) с

точностью $O(\mu^{n+1})$. В окрестности нулевого члена такого разложения удастся доказать существование точного решения поставленной краевой задачи. При этом вспомогательную начальную точку t^0 можно взять на конце промежутка $[0, 1]$ (если корень $z = \varphi(y, t)$, фигурирующий в формуле (68), приводит к отрицательным действительным частям λ в (64), то полагаем $t^0 = 0$, а если к положительным, то следует брать $t^0 = 1$, так как в этом случае корень устойчив для $t \leq t^0$, что отмечалось в пояснениях к рис. 3), а можно — как некоторую внутреннюю точку этого промежутка. Последнее возможно при наличии по меньшей мере двух корней φ_1 и φ_2 уравнения $F(z, y, t) = 0$ (F , таким образом, должно быть существенно нелинейным по z), один из которых, скажем φ_2 , приводит к отрицательным действительным частям λ в (64), а другой — φ_1 — к положительным. Решение по-прежнему представляется формулой (68), но справа от t^0 в формуле берется корень $z = \varphi_2$, а слева корень $z = \varphi_1$. Различный выбор t^0 дает возможность построить асимптотику и доказать существование двух качественно различных типов решений краевой задачи (69) (заметим, что эти различные решения могут осуществляться при одном и том же условии (69), так что единственности в целом, вообще говоря, нет): а) решение, которое имеет в пределе скачок z и связанный с этим пограничный слой на одном из концов промежутка $[0, 1]$; б) решение, которое имеет скачок z и связанный с этим пограничный слой в некоторой внутренней точке промежутка $[0, 1]$. График предельной функции для y представляет в этом случае ломаную, состоящую из двух звеньев.

Не имея здесь возможности хоть сколько-нибудь подробно остановиться на описании этих случаев в общем виде, укажем простейшие примеры их реализаций: а) $\mu \frac{dz}{dt} = 1 - z^2$, $\frac{dy}{dt} = z$, $z(0) = 0$, $y(1) = 0$;



А. Б. Васильева.

б) то же уравнение при дополнительных условиях $y(0) = 0, y(1) = 0$. Решение $y(t, \mu)$ задачи а) имеет пределом решение $\bar{y}_0 = 1 - t$ вырожденного уравнения $\frac{dy}{dt} = 1$, определяемое условием $\bar{y}_0(1) = 0$; z имеет скачок при $t = 0$: $z(0) = 0$, а $\bar{z}_0(0) = -1$. Решение $y(t, \mu)$ задачи б) имеет пределом ломаную $\bar{y}_0 = \begin{cases} -t, & t \leq \frac{1}{2} \\ -1 + t, & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ ($-t$ — решение $\bar{y}_0$ вырожденного уравнения, соответствующее корню $\varphi_1 = -1$ и определяемое условием $\bar{y}_0(0) = 0$, а $-1 + t$ — решение вырожденного уравнения, соответствующее корню $\varphi_2 = +1$ и определяемое условием $\bar{y}_0(1) = 0$; z имеет в пределе скачок в точке $t_0 = \frac{1}{2}$).

Однако результаты, полученные с помощью формул (68), требуют наличия действительных частей λ в выражении (64) одного знака, что, вообще говоря, не является необходимым для существования предельного перехода в решении краевой задачи. Простейший пример $\mu^2 \frac{d^2 y}{dt^2} = y + 1, y(0) = y(1) = 0$ показывает, что предельный переход в решении краевой задачи может иметь место, когда действительные части корней характеристического уравнения имеют разные знаки. Двухточечную задачу для таких случаев изучал в 1963 г. В. А. Тупчиев. Рассматривалась система общего вида (58) при дополнительных условиях, состоящих в задании на конце $t = 0$ p компонент вектора z , а на конце $t = 1$ $M - p$ компонент вектора z (M — размерность z), кроме того, задавалось значение y либо при $t = 0$, либо при $t = 1$. Предполагалось, что характеристическое уравнение (64) имеет p корней с отрицательными действительными частями и $M - p$ корней с положительными действительными частями. Асимптотические формулы, полученные В. А. Тупчиевым, имеют ту же структуру, что в случае одинаковых знаков действительных частей λ , но в отличие от (68) пограничный слой и Π -функции появляются здесь на обоих концах рассматриваемого промежутка. Интересно, что в классе уравнений, приводящих к различным знакам действительных частей λ , могут существовать решения, имеющие в пределе ломаные линии, состоящие из нескольких (более двух) звеньев, — обобщение упомянутого выше случая б) ³¹.

Однако даже в классе систем, приводящих к одинаковым знакам действительных частей λ , не все краевые задачи поддаются исследованию с помощью формулы (68). Например, если рассмотреть уравнение $\mu \frac{dz}{dt} = -z + 1, \frac{dy}{dt} = z$ с краевым условием $y(0) = y(1) = 0$, то непосредственным расчетом можно убедиться, что решение этой краевой задачи не может быть описано с помощью асимптотической формулы (68) по той причине, что для рассматриваемой задачи $z(0)$ бесконечно

³¹ В дальнейшем (с 1964 г.) В. А. Тупчиев исследовал специального вида краевую задачу, связанную с задачей о распаде разрыва для квазилинейных уравнений.

велико при $\mu \rightarrow 0$. Чтобы иметь возможность дать описание таких классов краевых задач, нужно было предварительно рассмотреть задачу Коши при бесконечно больших начальных значениях z . Это сделали Л. А. Люстерник и М. И. Вишик (1960 г.). Исследования продолжены К. А. Касымовым (1963 г.), М. А. Галаховым (1969 г.), А. Б. Зиминным (1969 г.). В этом случае асимптотика носит весьма сложный характер, просто выписывается лишь старшее приближение. Характерным является то, что $\bar{y}$ — предельная функция для y — определяется из вырожденного уравнения, но в то время как в случае, описанном в (59), начальные значения $\bar{y}$ и y совпадают и равны y^0 , теперь начальное значение $\bar{y}$ отлично от y^0 . Для $\bar{y}(0)$ Люстерник и Вишик нашли эффективную формулу. Если F и f линейны по z , то асимптотика упрощается; для этого случая справедливы формулы типа (68), но с добавлением для z члена вида $\frac{1}{\mu} P_{-1}[z]$.

Таковы основные результаты, касающиеся асимптотики решений краевых задач для нелинейных уравнений (58). Заметим, что предельный переход в двухточечной краевой задаче (без построения асимптотики) еще раньше изучался в работах О. А. Олейник и А. И. Жижинной (1952 г.) и Н. И. Бриша (1954 г.).

Остановимся еще специально на задаче отыскания периодических решений систем типа (58). Если действительные части имеют одинаковые знаки, то периодическое решение может быть построено как частный случай общей двухточечной задачи (69) для неавтономного случая и задачи с подвижной границей для автономного случая. Для периодического решения P -функции исчезают и асимптотика дается чисто степенным рядом. Однако условие одинакового знака действительных частей λ не является необходимым для существования периодического решения. Д. В. Аносов рассмотрел (1960 г.) вопрос о существовании периодического решения для случая, когда действительные части λ могут быть разных знаков.

Отметим, что построению периодических решений в виде некоторых разложений посвящены значительно более ранние работы И. М. Волка (1946 г.), которые, к сожалению, не были продолжены.

Наконец, говоря о краевых задачах, необходимо упомянуть о работе Л. А. Люстерника и М. И. Вишика (1957 г.). В ней рассматривались линейные уравнения и развивались методы, применимые также и к уравнениям в частных производных. Для решений различного рода краевых задач строилась асимптотика типа (68). Хотя работа посвящена линейным уравнениям, установленные в ней закономерности относительно того, какой должна быть связь между типом краевых условий и числом положительных и отрицательных действительных частей корней характеристического уравнения (64), чтобы существовал предельный переход в решении краевой задачи к некоторому решению вырожденной системы, носят общий характер и на них можно ориентироваться и при исследовании нелинейных случаев.

Явление срыва. Выше упоминалось о том, что случаи нарушения устойчивости корня могут быть разнообразными и приводят к характер-

ным для каждого случая явлениям. Особое внимание исследователей привлекал случай, когда нарушение устойчивости вызвано тем, что при некотором $t = t^0$ один из корней характеристического уравнения становится нулевым. Этот случай имеет важное значение для теории так называемых релаксационных (или разрывных) колебаний. Как оказалось, в этом случае интегральная кривая может «сорваться» с корня, который был устойчивым для $t < t^0$, и перейти на другой корень, устойчивый для $t \geq t^0$. Возможность такого срыва отмечалась еще А. Н. Тихоновым (1948 г.). Простейший пример поясняет эту возможность. Рассмотрим уравнение $\mu \frac{dz}{dt} = z - z^3 - t$. На рис. 4 изображена интегральная кривая, начинающаяся в точке F . От точки F до сколь угодно малой, но фиксированной окрестности точки $B \left(z = \frac{1}{\sqrt{3}}, t = \frac{2}{3\sqrt{3}} \right)$ интегральная кривая идет так, как кривая рис. 3, поскольку ветвь AB корня $z = \varphi(t)$ уравнения $z - z^3 - t = 0$ устойчива всюду, кроме точки B , где $\frac{\partial F}{\partial z} = 1 - 3z^2$ обращается в нуль. Более детальное исследование поля направлений в окрестности точки B устанавливает, что интегральная кривая пересекает вертикаль, проходящую через B , выше B и попадает в область влияния устойчивой ветви CD и, следовательно, интегральная кривая быстро перейдет из окрестности точки B в окрестность кривой CD , приближаясь к этой последней опять так, как на рис. 3. Точку B естественно назвать точкой срыва.

В случае системы общего вида (58) это явление приобретает более развитую и сложную форму. Специфическим является возникновение колебательного процесса, близкого к некоторому разрывному периодическому процессу; возможен и строго периодический процесс — установившиеся релаксационные колебания. На рис. 5 представлен случай $F = z - z^3 - y$, $f = z$. Изображена цилиндрическая поверхность $z - z^3 - y = 0$ (корень $z = \varphi(y)$ уравнения $F = 0$) и интегральная кривая, состоящая из «медленных» участков $A_1B_1, A_2B_2, \dots$, расположенных вблизи устойчивых полостей корня $z = \varphi(y)$ и «быстрых» участков, начинающихся в окрестностях точек срыва. Начальный участок FA_1 также принадлежит к быстрым. На фазовой плоскости (y, z) изображен цикл, вблизи которого расположена фазовая траектория — проекция интегральной кривой.

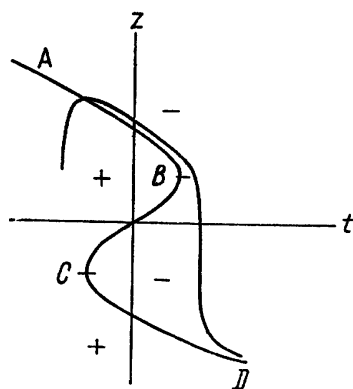


Рис. 4. Явление срыва для одного уравнения.

Этот круг вопросов для случая, если система (58) автономна, детально изучался в работах Л. С. Понтрягина, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розова, С. П. Пулькина. Был исследован характер движения вблизи точек срыва, получено асимптотическое представление для цикла на фазовой плоскости, а также формулы для периода релаксационных колебаний.

Специальному случаю уравнения Ван-дер-Поля была посвящена более ранняя рабо-

та А. А. Дородницына (1947 г.).

Задачи, специфические для линейных уравнений. До сих пор речь шла в основном о работах, посвященных нелинейным системам. Выводы, полученные для нелинейных систем, естественно, сохраняют силу и в случае линейных систем, если не считать того, что, например, такие явления, как явление срыва или существование решений краевых задач типа б) (стр. 428) для линейных уравнений не реализуются. Однако, с другой стороны, линейные уравнения допускают специфические постановки задач, не имеющие по тем или иным причинам места для нелинейных уравнений. Остановимся на некоторых из них.

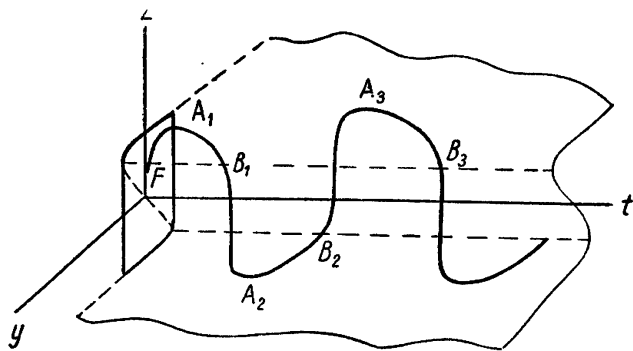


Рис. 5. Явление срыва для системы уравнений.

Метод ВБК³². Из сказанного выше ясно, что для нелинейных систем метод исследования существенно зависит от вида корней характеристического уравнения (64), т. е. от того, действительные они или мнимые, отрицательны их действительные части или положительны. Для линейных систем, однако, известен метод, начало которого было заложено еще в работах Биркгофа (1908 г.) и Нуайона (1912 г.) и для которого указанные различия несущественны. Метод этот заключается в следующем. Пусть для простоты в системе отсутствует y и она однородна: $\mu \frac{dz}{dt} = Az$. Определим корни $\lambda_i(t)$ характеристического уравнения (64) и далее построим элементарные решения, подчиняющиеся уравнениям $\mu \frac{du_i}{dt} = \lambda_i u_i$; они, очевидно, имеют вид $u_i = \exp \frac{1}{\mu} \int \lambda_i(t) dt$. Исследование показывает, что фундаментальную систему решений для исходной линейной системы можно искать в асимптотической форме $z = \sum_{i=1}^M \alpha^{(i)} u_i^{(i)}$ ($i = 1, \dots, M$), где $\alpha^{(i)}$ — вектор-столбец, элементы которого представляют собой степенные ряды по μ (в случае постоянных коэффициентов в исходной системе $\alpha^{(i)}$ были бы просто константами и представление фундаментальной системы было бы точным), коэффициенты которых определяются в результате подстановки z в исходную систему. Метод допускает любые значения действительных частей корней характеристического уравнения, а также их обращение в нуль, но существенным требованием его является различие λ_i . Если при некотором значении t корни характеристического уравнения становятся кратными, то

³² Метод ВБК назван по имени физиков Вентцеля, Бриллюэна и Крамерса, развивавших этот метод применительно к задачам квантовой механики.



Е. Ф. Мищенко.

указанная асимптотика теряет смысл. Такие точки получили название точек поворота ³³.

При наличии точек поворота возникает вопрос о «сшивании» асимптотических представлений для решения, справедливых соответственно слева и справа от точки поворота, или о получении асимптотики, справедливой в области, включающей точку поворота. Этому вопросу посвящены работы В. А. Фока, А. А. Дородницына, В. С. Пугачева, И. М. Рапопорта, В. П. Маслова, М. В. Федорюка (1964—1966 гг.), М. А. Евграфова, С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиля, Л. Д. Николенко (1966 г.).

Вопросы, связанные с наличием особых точек (в смысле аналитической теории дифференциальных уравнений). Если начальная точка

является особой точкой линейного уравнения, то задача Коши в обычном смысле не может быть поставлена и, следовательно, не может быть применена изложенная выше теория. Исследованием уравнения n -го порядка в окрестности особой точки занимались (1959 г.) Ю. Л. Рабинович и М. М. Хапаев. Исследование производилось в комплексной области и при комплексных значениях параметра, строилась асимптотика канонических решений, отвечающих характеристическим показателям рассматриваемой особой точки.

Начальная точка $t = 0$ может не быть особой точкой исходного уравнения ($\mu \neq 0$), но являться особой точкой для вырожденного уравнения (например, для уравнения $\mu y'' + ty' + y = 0$), тем самым при вырождении, хотя порядок уравнения понижается на единицу, теряются оба начальных условия. Эта задача родственна задаче о точке поворота.

Может случиться, что, хотя порядок уравнения при $\mu = 0$ не понижается, тем не менее часть дополнительных условий теряется, так как уравнение, отвечающее $\mu = 0$, опять-таки имеет при $t = 0$ особую точку (например: $(\mu + t)y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t)$). Оказывается, при этом также наблюдается пограничный слой. Исследование было проведено для уравнения n -го порядка С. А. Ломовым (1962 г.). Полученное в этих работах асимптотическое разложение существенно отличается от (68), и разница проявляется именно в характере представления решения в области пограничного слоя, который в этом случае получил название степенного пограничного слоя.

³³ Термин взят из квантовой механики.

Задачи, связанные с собственными значениями и собственными функциями линейных операторов. В работе Л. А. Люстерника и М. И. Вишика (1960 г.) в последовательном изложении рассматривалась задача о возмущении линейных алгебраических и дифференциальных операторов (возмущенный оператор имеет вид $L_\mu = L_0 + \mu L_1$), в том числе исследовался случай, когда возмущение μL_1 представляет собой оператор более высокого порядка, чем невозмущенный оператор L_0 . В этой работе было получено асимптотическое представление для собственных значений и собственных функций возмущенного оператора для некоторых классов задач. Если оператор L_μ дифференциальный, то собственные значения ищутся при определенных граничных условиях; оператору L_0 соответствует лишь часть этих граничных условий. Как оказалось, в окрестности нулевого (для определенности) собственного значения оператора L_0 существует, вообще говоря, несколько собственных значений оператора L_μ , представляющихся в виде ряда по дробным степеням μ . Для соответствующих собственных функций имеет место аналогичное разложение, но с добавлением пограничных членов (П-функций).

В этой же работе рассматриваются краевые задачи, обладающие той особенностью, что предельная ($\mu = 0$) задача находится на спектре. Это значит, что если для уравнения $L_\mu z = h$ поставлена некоторая краевая задача, то для уравнения $L_0 z = h$ соответствующая краевая задача неразрешима (уравнение $L_0 z = 0$ имеет при тех же краевых условиях нетривиальное решение). Асимптотика решения исходной краевой задачи будет иметь различный вид в зависимости от того, имеет или нет оператор L_0 присоединенные функции, отвечающие нулевому собственному значению, но во всех случаях характерно наличие особенности по μ в степенной части асимптотики.

Изучению собственных значений и собственных функций для некоторого уравнения 4-го порядка, вырождающегося в уравнение второго порядка, были посвящены более ранние работы В. Б. Гласко (1956 г.), Д. П. Костомарова (1957 г.) и А. А. Шишкина (1958 г.). В работе В. Б. Гласко строилась также асимптотика функции Грина. Этот же вопрос для уравнения n -го порядка рассмотрен в работе Н. А. Ивановой (1961 г.).

Исследованием вопросов перехода от дискретного спектра к непрерывному при $\mu \rightarrow 0$ занимался В. П. Маслов (1954—1956 гг.). К такой задаче приводит, например, задача о собственных значениях для уравнения Шредингера в квантовой механике, где малым параметром служит постоянная Планка $\hbar$. В дальнейшем В. П. Масловым в этом направлении были получены результаты, выходящие за рамки обыкновенных дифференциальных уравнений³⁴.

Применение метода осреднения. Для изучения уравнений типа (58) могут быть использованы асимптотические методы, связанные с

³⁴ См.: В. П. Маслов. Теория возмущений и асимптотические методы. Изд-во Моск. ун-та, М., 1965.

осреднением. Для этого вводится новое переменное $\tau = \frac{t}{\mu}$ и система (58) переписывается в виде

$$\begin{aligned}\frac{dz}{d\tau} &= F(z, y, t), \\ \frac{dy}{d\tau} &= \mu f(z, y, t), \\ \frac{dt}{d\tau} &= \mu.\end{aligned}\tag{70}$$

Конечному отрезку изменения независимого переменного $t: 0 \leq t \leq T$ соответствует бесконечно большой промежуток изменения $\tau: 0 \leq \tau \leq \leq \frac{T}{\mu}$. Система (70) внешне выглядит как регулярная (70), но для получения асимптотики на отрезке порядка $\frac{1}{\mu}$ описанные выше классические приемы, относящиеся к регулярному случаю, неприменимы.

Метод осреднения в его простейшей форме применительно к системе вида

$$\frac{dx}{d\tau} = \mu X(x, \tau, \mu)\tag{71}$$

закljučается, согласно Н. Н. Боголюбову (он является одним из основоположников метода), в следующем. Если существует предел $\bar{X}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(x, \tau, 0) d\tau$, то системе (71) можно поставить в соответствие осредненную систему

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \mu \bar{X}(\bar{x}).\tag{72}$$

Как оказывается, решение осредненной системы (72), полученное при том же начальном условии, что и решение исходной системы (71), аппроксимирует это последнее равномерно на всем отрезке $0 \leq \tau \leq \frac{T}{\mu}$ и стремится к нему при $\mu \rightarrow 0$. Можно построить также асимптотику более высокого порядка. Метод осреднения развивался очень многими учеными: Н. М. Крыловым, Н. Н. Боголюбовым, Ю. А. Митропольским, С. Ф. Фещенко, В. О. Кононенко, Д. Н. Зубаревым, В. М. Волосовым, Н. Н. Моисеевым, О. Б. Лыковой, Д. В. Аносовым, Б. И. Моргуновым, К. В. Задиракой, В. П. Рубаником, А. Н. Филатовым, Г. Н. Медведевым, Г. С. Макеевой, О. А. Жаутыковым, Л. Д. Акуленко и др. В частности, В. М. Волосовым этот метод был разработан для системы вида

$$\begin{aligned}\frac{dz}{d\tau} &= Z(z, x, \tau, \mu), \\ \frac{dx}{d\tau} &= \mu X(z, x, \tau, \mu),\end{aligned}\tag{73}$$

частным случаем которой является система (70). Равномерное приближение для x и в этом случае получается из (72), но $\bar{X}$ определяется уже более сложным образом $\bar{X}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(z(x, \tau), x, \tau, 0) d\tau$, где $z(x, \tau)$ определяется из первого уравнения системы (73), в котором x рассматривается как параметр, а μ положено равным нулю. В. М. Волосовым получены также и высшие приближения.

Метод осреднения с успехом применяется к исследованию различных специальных вопросов, связанных с теорией колебаний. Излагая здесь в общих чертах этот метод, мы лишь хотим подчеркнуть возможность применения его к системам вида (58), или, что то же, (70). Методом осреднения могут быть получены многие из изложенных выше результатов, касающиеся как релаксационных ($\operatorname{Re} \lambda \neq 0$), так и колебательных случаев (таких, как, например, (65)); при применении метода осреднения эти случаи можно не различать. Возможности метода осреднения в применении к системам вида (58), по-видимому, еще далеко не исчерпаны.

Дальнейшее развитие направлений исследования систем типа (58). Некоторые другие системы и задачи. После получения основных результатов дальнейшее развитие исследования систем с малым параметром при производных велось как в направлении усложнения самой системы, так и в направлении поисков иных постановок задач.

А. Н. Тихонов наряду с основным случаем (58) рассматривал (1950—1952 гг.) также задачи Коши для случая, когда система содержит несколько малых параметров различного порядка малости, иными словами, в системе (58) μ считалось диагональной матрицей, отличные от нуля элементы которой являются бесконечно малыми различных порядков. А. Б. Васильева строила (1963 г.) асимптотику. Регулярная часть разложения, как оказалось, представляет собой многократный степенной ряд по степеням отношений параметров.

Задачу Коши для неразрешенного уравнения $\mu F(t, y, y') = f(t, y)$ изучала Н. С. Сацкая (1962—1963 гг.).

Задача Коши для системы (58) с добавлением в правой части второго уравнения быстропеременного аргумента t/μ рассматривалась К. В. Задиракой (1956—1965 гг.). В ряде работ К. В. Задирака развивал для системы типа (58) метод интегральных многообразий Н. Н. Боголюбова (1957, 1962—1965 гг.).

Работы И. С. Градштейна (1953 г.) и А. Б. Васильевой (1963 г.) посвящены рассмотрению задачи Коши для системы (58) на бесконечном промежутке изменения аргумента. Для бесконечного промежутка характерны и другие постановки задач, например выяснение условий, при которых устойчивость тривиального решения вырожденной системы влечет за собой устойчивость тривиального решения системы при $\mu \neq 0$. Этой задачей занимались Н. Н. Красовский, А. И. Климусhev, Б. С. Разумихин.

В ряде работ видоизменялось или совершенствовалось асимптотическое представление типа (68). Выше, в п. 6, уже упоминались работы,



В. М. Волосов.

в которых описывался так называемый степенной пограничный слой. Изменение характера асимптотики может вызываться и другими причинами. Формулы (68) получены в предположении выполнения условия устойчивости по первому приближению: $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Предельный же переход (62) доказан при более слабых ограничениях. Один из возможных случаев устойчивого корня, приводящего к нулевым значениям λ в формуле (64), рассмотрен в работе А. Б. Васильевой и А. Б. Зимина (1964 г.). Разложение в этом случае проведено по дробным степеням μ и пограничный слой не обладает экспоненциальным характером. Некоторые работы посвящены упрощению алгоритма построения асимптотики для некоторых известных уже случаев (В. С. Королук и Э. Р. Ницкая (1961 г.)).

С представлением (68) связан еще один круг вопросов. Формула (68) носит асимптотический характер, и отличие X_n от истинного решения $x(t, \mu)$ выражается неравенством $|x(t, \mu) - X_n| < C\mu^{n+1}$, где C — некоторая константа, не зависящая от μ , но зависящая, вообще говоря, от n и от свойств правых частей (58). Однако эта зависимость в общем виде не исследована, что затрудняет практическое применение формул (68). В работе И. С. Любченко (1964 г.) для некоторых простейших случаев найдено выражение для C через различные константы, характеризующие уравнение.

Явление пограничного слоя может возникать в результате наличия в правых частях уравнений неравномерно малых возмущений, как это имеет место, например, для уравнения

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\mu}{\mu^2 + t^2} + 1, \quad z|_{t=0} = z^0.$$

Асимптотической формулой здесь может служить формула (68) при $n = 0$, в которой надо положить

$$\frac{dz_0}{d\tau} = \frac{1}{1 + \tau^2}, \quad z_0|_{\tau=0} = z^0, \quad \frac{d\bar{z}_0}{dt} = 1, \quad \bar{z}_0|_{t=0} = z_0(\infty).$$

Исследование этого явления для системы вида

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{\mu} Z_1\left(\frac{y}{\mu}, z, \mu\right) + Z_2(y, z, \mu), \quad z(0, \mu) \rightarrow \varepsilon_0, \\ \frac{dy}{dt} &= Y_1\left(\frac{y}{\mu}, z, \mu\right) + Y_2(y, z, \mu), \quad \frac{y(0, \mu)}{\mu} \rightarrow \eta_0, \end{aligned} \quad (74)$$

где $Y_1 \rightarrow 0$, $\frac{1}{\mu} Z_1 \rightarrow 0$ при $\frac{y}{\mu} \rightarrow \infty$, $\mu \rightarrow 0$, проведено В. М. Алексеевым (1962 г.) в связи с задачами небесной механики. Формально систему

(74) можно записать как систему уравнений с малым параметром при производной $\frac{dz}{dt}$, но условия на правые части здесь существенно отличаются от принятых в рассмотренных выше работах. При $\mu = 0$ порядок уравнения не понижается. Однако асимптотические свойства решения во многом сходны с рассмотренными выше и допускают исследование аналогичными методами.

Приведем еще ряд результатов, относящихся к различного рода задачам, но так или иначе связанных с системой типа (58). Л. С. Понтрягин и Л. В. Родыгин рассматривали (1960 г.) случай, когда присоединенная система имеет не точку покоя, а предельный цикл. Уравнения с малым параметром при производной и с отклоняющимся аргументом рассматривались А. П. Великим (1964 г.), А. И. Климушевым (1963—1964 гг.) и М. К. Шапиной (1966 г.). Вариационные задачи, возникающие при $\mu = 0$ (например, задача об экстремуме функционала



М. И. Иманалиев.

$\int_a^b F(t, y, \mu, y') dt$), исследовалась Н. Х. Багировой (1965 г.). В работе В. П. Скрипника (1964 г.) рассматривались системы (x — вектор), в которых x' входит в виде комбинации $A(\mu, t)x'$, где $A(\mu, t)$ — невырожденная матрица, обращающаяся при $\mu = 0$ в вырожденную (для системы (58), переписанной в такой форме и в случае одномерных y и z , матрица $A(\mu, t)$ имеет вид $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$). В работе А. П. Кубанской показано (1965 г.), насколько важен учет явления пограничного слоя при использовании приближенных методов решения краевых задач (метод Галеркина). В работах Б. Н. Панайоти (1963 г.), Ю. Г. Борисовича (1963 г.), В. М. Миллионщикова (1962 г.), Л. А. Грозы, П. Е. Соболевского, Р. Габасова уравнения с малым параметром при производных рассматривались как операторные уравнения в абстрактных пространствах. Сюда же, по существу, относятся упомянутые выше работы Л. А. Люстерника и М. И. Вишика, а также В. П. Маслова.

Многие из приведенных выше результатов, относящихся к дифференциальным уравнениям, за последние годы перенесены на интегро-дифференциальные уравнения с малым параметром при производных (М. И. Иманалиев, Н. П. Векуа, К. И. Кванталиани, А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, С. Ю. Борисова и др.). М. И. Иманалиев, в частности, построил для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений асимптотические формулы типа (68). Интересно, что наличие интегрального члена в уравнении может изменить качественную картину решения.

Так, для интегро-дифференциального уравнения имеет место предельный переход в решении задачи Коши (для $t \geq 0$) даже при наличии положительного корня характеристического уравнения, чего не наблюдается для дифференциальных уравнений. Это явление рассмотрено В. Ф. Бутузовым.

За последние годы выявился еще один класс уравнений, для которых справедливы явления, аналогичные рассмотренным выше, хотя во многих отношениях свойства решений этих уравнений существенно отличаются от свойств (58), например решения представляют собой ступенчатые функции. Речь идет об уравнениях с отклоняющимся аргументом нейтрального типа при наличии малого запаздывания. В простейшем случае такое уравнение имеет вид

$$z(t) = F(z(t - \mu), y(t), y(t - \mu), t), \quad (75)$$

$$\frac{dy}{dt} = z.$$

Задача Коши для уравнения (75) ставится следующим образом: $y|_{0 \leq t \leq \mu} = \varphi(t)$, $z|_{0 \leq t \leq \mu} = \dot{\varphi}(t)$. При $\mu = 0$ (75) переходит в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой определяется начальным условием в точке: $y|_{t=0} = \varphi(0)$. Таким образом, при $\mu = 0$, как и в случае (58), происходит «потеря» дополнительных условий, что влечет за собой появление пограничного слоя. Система (72) и некоторые более сложные случаи рассматривались в работах А. Б. Васильевой, В. И. Рожкова и А. А. Плотникова. В этих работах установлено, что при выполнении некоторых условий устойчивости имеют место предельный переход от решения задачи Коши для (75) к решению вырожденной системы и асимптотические формулы, внешне полностью совпадающие с (68). Если же условия устойчивости не выполнены, то могут, в частности, иметь место колебательные процессы. Случай, когда в правой части отсутствует $z(t - \mu)$, фактически является аналогом регулярного случая (70). Уравнения этого типа исследовались Ю. А. Рябовым (1960, 1965 гг.), А. Б. Васильевой (1962 г.), А. М. Родионовым (1962—1964 гг.).

16

Уравнения с запаздывающим аргументом

В том случае, когда скорость изменения состояния какого-нибудь объекта зависит не только от его состояния в данный момент, но и от состояния в предыдущие моменты времени, приходится рассматривать дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = X(t, x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_n)). \quad (76)$$

где $x(t)$ — n -вектор; $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ — положительные величины — запаздывания времени. Когда запаздывание распределено на некотором отрезке длиной τ , уравнение типа (76) приобретает вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t + \vartheta)), \quad (77)$$

где $f = (f_1, \dots, f_n)$ — n функционалов, определенных на непрерывных или кусочно-непрерывных функциях $x(\vartheta)$, $-\tau \leq \vartheta \leq 0$. Уравнения типа (77) называются уравнениями с последействием. Дифференциальные уравнения с запаздыванием являются частным случаем уравнений с последействием.

Последние 10—15 лет уравнения с запаздыванием аргумента и уравнения с последействием интенсивно изучаются как в нашей стране, так и за рубежом. Они нашли применение в различных областях физики, инженерном деле, экономике и биологии. Известно, что в системах регулирования имеются звенья с запаздыванием по времени (они могут быть в объекте регулирования, управляющем органе, в обратной связи). Запаздывание имеет место в следящих системах при наличии дальней линии связи. Наконец, в механических и электрических системах дифференциальные уравнения с запаздыванием оказываются удобным аппаратом в случае, когда эти системы имеют распределенные элементы или элементы с большим числом степеней свободы. Такие системы можно описывать уравнениями более низкого порядка, но с запаздыванием по времени.

Теории систем с запаздыванием (последействием) посвящена большая литература. Мы остановимся на некоторых основных работах по теории дифференциальных уравнений с запаздыванием, а также на работах, посвященных развитию теории устойчивости и теории колебаний систем с запаздыванием по времени.

Основными руководствами по теории систем с запаздыванием на русском языке являются монографии А. Д. Мышкиса «Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом» (1951 г.), Н. Н. Красовского «Некоторые задачи теории устойчивости движения» (1959 г.), Э. Пинни «Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения» (1961 г.), Л. Э. Эльсгольца «Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом» (1964 г.). Очень обстоятельны обзоры литературы по теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и, вообще, по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом: А. Д. Мышкиса «Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом» (1949, 1950 гг.); А. Д. Мышкиса, С. Н. Шиманова, Л. Э. Эльсгольца «Устойчивость и колебания систем с запаздыванием» (1961 г.); А. М. Зверкина, Г. А. Каменского, С. Б. Норкина, Л. Э. Эльсгольца «Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом» (1962, 1963 гг.).

Работы, посвященные уравнениям с запаздывающим аргументом, можно разделить на два больших класса. С одной стороны, в ряде работ выясняются свойства этих уравнений, которые не справедливы для дифференциальных уравнений без запаздывания, с другой стороны — уста-



А. Д. Мышкис.

навливаются свойства, обобщающие соответствующие свойства из теории обыкновенных уравнений. До недавнего времени эти обобщения не удавались или казались невозможными. Однако функциональный подход к уравнениям с запаздыванием позволил найти много свойств, общих с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений, и существенно продвинуть теорию этих уравнений, а также развить теорию устойчивости и колебаний для систем с запаздыванием. В нашем обзоре мы и остановимся в основном на последнем круге работ.

Некоторые основные факты и методы теории дифференциальных уравнений с последействием. Дифференциальные уравнения с запаздыванием по времени t (т. е. с последействием) являются функциональными уравнениями, так как они определяют в момент времени t производные

по времени от искомого вектора $x(t)$ как функции не только величин $x(t)$, подсчитанных к моментам времени t , но и этих величин, подсчитанных к моментам времени $t - \tau_i$, для предшествующих моментов t на отрезке запаздывания $[t - \tau, t]$. Производные по времени $x(t)$ являются функционалами, определенными на функциях $x(t + \vartheta) - \tau \leq \vartheta \leq 0$, τ — время запаздывания. Поэтому в качестве элемента решения можно принять отрезок интегральной траектории системы с запаздыванием и само решение естественно рассматривать в пространстве непрерывных функций

$$C[-\tau, 0], x(\vartheta) = \{x_i(\vartheta), i = 1, \dots, n; -\tau \leq \vartheta \leq 0\}.$$

Такой подход к системам с запаздыванием был предложен Н. Н. Красовским.

Итак, будем брать в качестве элемента решения системы уравнений (76) не вектор-функцию времени t $x(t; t_0, x_0(\vartheta))$, а вектор-отрезок функции времени $x(t + \vartheta; t_0, x_0(\vartheta))$, $-\tau \leq \vartheta \leq 0$. Если от $x(t + \vartheta; t_0, x_0(\vartheta))$ вычислить правую производную по времени t при $\vartheta < 0$, то найдем

$$\frac{dx(t + \vartheta; t_0, x_0(\vartheta))}{dt} = \frac{dx(t + \vartheta; t_0, x_0(\vartheta))}{d\vartheta}$$

$$(\Delta t \rightarrow +0, -\tau \leq \vartheta < 0).$$

Поэтому системе дифференциальных уравнений (77) в функциональном пространстве $C[-\tau, 0]$ будет соответствовать эквивалентная система

«обыкновенных дифференциальных уравнений» с операторной правой частью вида

$$\frac{dx_t(\vartheta)}{dt} = F(t, x_t(\vartheta)), \quad (78)$$

где $x_t(\vartheta) = x(t + \vartheta)$,

$$F(t, x(\vartheta)) = \begin{cases} \frac{dx(\vartheta)}{d\vartheta}, & -\tau \leq \vartheta < 0, \\ f(t, x(\vartheta)), & \vartheta = 0. \end{cases}$$

То обстоятельство, что оператор F будет неограниченным оператором, не мешает использованию системы (78) в качестве удобного рабочего аппарата исследования. Указанный подход к дифференциальным уравнениям с запаздыванием (последствием) оказался эффективным средством исследования систем с запаздыванием, позволившим существенно развить теорию дифференциальных уравнений с запаздыванием и теорию устойчивости и колебаний таких систем.

Другим важным шагом в развитии теории систем с запаздыванием явилось установление формулы для общего решения и аналога формулы Коши для линейных неоднородных систем с запаздыванием. Так, для линейного уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(t - \tau) + f(t) \quad (79)$$

общее решение имеет вид

$$x(t) = u(t)x(0) + \int_0^\tau u(t-t_1)bx_0(t_1 - \tau)dt_1 + \int_0^t u(t-t_1)f(t_1)dt,$$

$$\frac{du(t)}{dt} = au(t) + bu(t - \tau); \quad u(0) = 1, \quad u(t) = 0, \quad t < 0; \quad (80)$$

$$x(t) = x_0(t), \quad t \leq 0.$$

Этот результат почти одновременно в 1959 г. установили Р. Беллман, А. М. Зверкин, С. Н. Шиманов и А. Халанай.

Важным результатом теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами явилась возможность представления начальных функций из $C[-\tau, 0]$, стесненных незначительными ограничениями, в виде сумм типа Фурье, составленных из частных решений Эйлера (С. Верблюнский, Р. Беллман и К. Кук). Последнее обстоятельство играет существенную роль для приложений, в частности в теории оптимальных задач систем с запаздыванием.



Л. Э. Эльсгольд.

Здесь мы не останавливаемся на важных и широко известных результатах, полученных Л. Понтрягиным, Ю. Неймарком, Н. Чеботаревым в теории квазиполиномов — характеристических квазиполиномов систем с запаздыванием.

Теория устойчивости систем с запаздыванием. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения вида

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \int_{-\tau}^0 x_j(t+\vartheta) d\eta_{sj}(\vartheta) + X_s(t, x_1(t+\vartheta), \dots, x_n(t+\vartheta)) \quad (81)$$

$$(s = 1, \dots, n).$$

Здесь интегралы в правых частях понимаются в смысле Стильтьеса, $\eta_{sj}(\vartheta)$ — функции с ограниченной вариацией; $X_s(t, x_1(\vartheta), \dots, x_n(\vartheta))$ — нелинейные функционалы, определенные на кусочно-непрерывных функциях $\{x_i(\vartheta)\}$ аргумента ϑ , который меняется в пределах $-\tau \leq \vartheta \leq 0$ и представляет собою нелинейное возмущение (77). Можно предполагать, что $X(t, x_1(\vartheta), \dots, x_n(\vartheta))$ удовлетворяют условиям Липшица по $x(\vartheta)$ вида

$$|X_s(t, x_1''(\vartheta), \dots, x_n''(\vartheta)) - X_s(t, x_1'(\vartheta), \dots, x_n'(\vartheta))| \leq$$

$$\leq L \|x''(\vartheta) - x'(\vartheta)\|_\tau,$$

$$\|x(\vartheta)\|_\tau = \sup_{-\tau \leq \vartheta \leq 0} \{|x_1(\vartheta)|, \dots, |x_n(\vartheta)|\},$$

$$L = L_1 \{\|x''(\vartheta)\|_\tau + \|x'(\vartheta)\|_\tau\}^{\alpha_1},$$

L_1, α_1 — положительные числа.

Решение $x = 0$ системы (81) называется невозмущенным. Определения устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости даются обычным образом при помощи нормы $\|x(\vartheta)\|_\tau$.

Известно, что второй метод — метод функций Ляпунова — является одним из эффективных методов решения задач устойчивости. Попытки формального перенесения метода функций Ляпунова на системы с запаздыванием оказались неэффективными. Однако уже первое расширение области рассмотрения на функционалы дало практически важные результаты. Приведем результат такого рода, принадлежащий Б. С. Разумихину (1956 г.).

Если дифференциальные уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t; x_j(t), x_{jk}(t-\tau)) \quad (i = 1, \dots, n)$$

таковы, что существует определенно положительная функция $V(t; x_1, \dots, x_n)$, производная которой $\frac{dV}{dt} = U(t; x_j(t); x_{jk}(t-\tau))$ в силу этих уравнений является функционалом $U(t; x_j(t), x_{jk}(t-\tau))$, отрицательно или тождественно равным нулю вдоль всякого решения, удовлетворяющего условию

$$V(\sigma; x_1(\sigma), \dots, x_n(\sigma)) \leq V(t; x_1(t), \dots, x_n(t))$$

при всяких значениях $t \geq t_0$, $\sigma \leq t$, то невозмущенное движение устойчиво. Разумихин получил подобный критерий асимптотической устойчивости невозмущенного движения $x = 0$ и доказал критерии асимптотической устойчивости невозмущенного движения $x = 0$ нестационарной системы первого приближения (1958 г.).



С. Н. Шиманов.

Критерии с помощью функций Ляпунова для систем с запаздыванием оказываются необратимыми. Этот вопрос был рассмотрен Н. Н. Красовским. Вместо функций Ляпунова он предложил использовать функционалы. Оказалось, что теорема об асимптотической устойчивости для систем с запаздыванием обратима, т. е. метод функционалов Ляпунова в теории устойчивости систем с запаздыванием является универсальным методом. С. Н.

Шимановым была доказана теорема Четаева для систем с запаздыванием.

Н. Н. Красовский и Р. Беллман установили критерии устойчивости по первому приближению.

Задача построения функционалов типа Ляпунова для линейных систем с запаздыванием представляет собой нетривиальную задачу

Для линейных уравнений с запаздыванием построен квадратичный функционал в работе Ю. М. Репина (1965 г.). В том случае, когда известен факт асимптотической устойчивости, функционал Ляпунова для систем с запаздыванием построен впервые Н. Н. Красовским путем обобщения известного метода Массера построения функции Ляпунова в соответствующем случае для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему (81). Допустим, что корни характеристического уравнения системы первого приближения имеют отрицательные вещественные части. Тогда движение $x = 0$ будет асимптотически устойчиво (Р. Беллман, Н. Н. Красовский). Если среди корней характеристического уравнения есть хотя бы один с положительной вещественной частью, то $x = 0$ неустойчиво. В том случае, когда среди корней характеристического уравнения есть корни с нулевой вещественной частью, имеет место критический случай. Устойчивость в этом случае, как и для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, зависит от вида нелинейных добавок X_s в (81). Оказалось, что критические случаи устойчивости для систем с запаздыванием могут быть исследованы на базе перехода от системы дифференциальных уравнений к эквивалентной системе «обыкновенных» дифференциальных уравнений с операторной правой частью (78). Для системы (81) соответствующая

эквивалентная система «обыкновенных» уравнений имеет вид

$$\frac{dx_i(\vartheta)}{dt} = Ax_i(\vartheta) + R(x_i(\vartheta)), \quad (82)$$

где

$$x_i(\vartheta) = x(t + \vartheta),$$

$$Ax(\vartheta) = \begin{cases} \frac{dx_k(\vartheta)}{dt}, & -\tau \leq \vartheta < 0, \\ \sum_{j=1}^n \int_{-\tau}^0 x_j(\vartheta) d\eta_{kj}(\vartheta), & \vartheta = 0; \end{cases} \quad (83)$$

$$R(x(\vartheta)) = \begin{cases} 0, & -\tau \leq \vartheta < 0, \\ X(t, x_1(\vartheta), \dots, x_n(\vartheta)), & \vartheta = 0. \end{cases} \quad (84)$$

Допустим, что характеристическое уравнение системы первого приближения имеет один нулевой корень и остальные корни имеют отрицательные вещественные части. Тогда существует постоянный вектор $e = \text{const}$, что $Ab = 0$, и заменой переменной $x(\vartheta)$ на y и $z(\vartheta)$

$$x(\vartheta) = by + z(\vartheta)$$

система (82) приводится к виду

$$\frac{dy}{dt} = Y(y, z(\vartheta)),$$

$$\frac{dz_i(\vartheta)}{dt} = Az_i(\vartheta) + Z(y, z_i(\vartheta), \vartheta), \quad (85)$$

где $Y(y, z(\vartheta))$ — нелинейный функционал; $Z(y, z(\vartheta), \vartheta)$ — нелинейный оператор. Оператор A на подпространстве $\{z(\vartheta)\}$ имеет спектр, состоящий из точек, расположенных в полуплоскости комплексного переменного λ : $\text{Re } \lambda < 0$.

Рассмотрим функции

$$Y(y, 0) = gy^m + \dots,$$

$$Z(y, 0, \vartheta) = g_z(\vartheta)y^{m_1} + \dots$$

Если $m < m_1$ и m — четное, то невозмущенное движение $x = 0$ неустойчиво, если m — нечетное число и $g < 0$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво, и при $g > 0$ оно неустойчиво. В особом случае, когда $Y(y, 0) \equiv 0$, движение $x = 0$ устойчиво, т. е. имеют место те же факты, что и в теории критического случая одного нулевого корня для систем обыкновенных уравнений. Были подробно исследованы критические случаи одного нулевого и пары чисто мнимых корней для систем с запаздыванием (последствием). За последнее время в Свердловске выполнен ряд новых исследований критических случаев: случай двух нулевых корней (В. П. Прокопьев, С. Н. Шиманов), принцип сведения для систем с запаздыванием (Ю. С. Осипов). Показано существование интегрального многообразия (размерности, равной числу

критических корней), на котором движение системы описывает система обыкновенных дифференциальных уравнений той же размерности (С. Н. Шиманов).

Метод функционалов Ляпунова для систем с запаздыванием оказался пока недейственным при исследовании устойчивости систем с запаздыванием в целом. Критерий устойчивости в целом систем с запаздыванием получил частотными методами Стокс (1962 г.), а для систем регулирования с запаздыванием — В. М. Попов и А. Халанай.

Линейные дифференциальные уравнения с запаздыванием и периодическими коэффициентами. Общей теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием посвящен ряд работ А. Стокса, А. Халаная, С. Н. Шиманова, А. М. Зверкина, К. Г. Валеева. Функциональный подход и тут оказался весьма плодотворным.

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и стационарным запаздыванием вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = p(t)x(t) + q(t)x(t - \tau). \quad (86)$$

При фиксированном $t > t_0$ элемент решения $x_t(\vartheta) = x(t + \vartheta; t_0, x_0(\vartheta))$ можно рассматривать как образ элемента $x_0(\vartheta) \in C[-\tau, 0]$ при некотором преобразовании

$$x_t(\vartheta) = T(t, t_0)x_0(\vartheta) \quad (87)$$

с оператором $T(t, t_0)$, $T(t_0, t_0) = I$ — тождественный оператор

$$Ix(\vartheta) = x(\vartheta), \quad T(t, t_0)x_0(\vartheta) = x(t + \vartheta; t_0, x_0(\vartheta)). \quad (88)$$

Оператор $T(t, t_0)$ линеен, обладает полугрупповым свойством и

$$T(t + \omega, t_0) = T(t, t_0)T(t_0 + \omega, t_0). \quad (89)$$

Оператор $T(t_0 + \omega, t_0)$ играет существенную роль в теории линейных дифференциальных уравнений с последствием периодического типа, подобным матрице монодромии в теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Если спектр оператора $T(t_0 + \omega, t_0) = U(\omega, t_0)$, а $\{\rho_j\}$ удовлетворяет условию $|\rho_j| < 1$, то все решения (86) убывают по норме по закону экспоненты. Если среди $\{\rho_j\}$ найдется хотя бы один $|\rho_1| > 1$, то существует решение $y(t)$ (86), возрастающее по закону экспоненты.

Рассмотрим конечное множество собственных и присоединенных элементов оператора $U(\omega, t_0)$, соответствующих собственным числам $\rho_1, \dots, \rho_n$. Решения системы (86), построенные на этих элементах, удовлетворяют теореме Флоке, их изменение описывается системой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами с матрицей монодромии, имеющей собственные числа $\rho_1, \dots, \rho_n$. В пространстве $C[-\tau, 0]$ можно выделить периодически перемещающийся $N(n)$ -мерный базис, такой, что в N -мерном подпространстве, определенном этим базисом, составляющую любого реше-

ния системы (86) будет описывать N -мерная система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. При этом указанная составляющая решения системы (86), обладая видом Флоке, будет асимптотическим при $t \rightarrow +\infty$ решением системы (86) во всем пространстве $C[-\tau, 0]$. А исчезающее дополнение решения $z_i(\theta)$ конечномерной части решения будет оставаться в линейном периодически изменяющемся дополнительном подпространстве и убывать по закону экспоненты тем быстрее, чем больше взято собственных чисел в ряду $\rho_1, \dots, \rho_n$ и чем меньше модули оставшихся собственных чисел $\rho_{n+1}, \dots$. Указанные результаты получены в работах Стокса (1962 г.), С. Н. Шиманова (1963 г.) и А. Халана (1963 г.).

Не всегда могут быть эффективно оценены модули собственных чисел оператора монодромии $U(\omega, t_0)$ или определены приближенно вещественные части их характеристических показателей $\alpha_j = \frac{1}{\omega} \ln \rho_j$. Критерии того, что все $|\rho_j|$ по модулю меньше единицы, были указаны для некоторых частных случаев А. Халана (1963 г.). Был разработан метод подсчета характеристических показателей для линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = (a + \mu f(t, \mu))x(t) + (b + \mu \varphi(t, \mu))x(t - \tau),$$

где a, b — постоянные матрицы $f(t, \mu); \varphi(t, \mu)$ — периодические матрицы периода $\omega; \mu$ — малый параметр.

Метод Лапласа для построения решений и их исследования применял К. Г. Валеев (1963—1964 гг.). Он рассмотрел уравнения с периодическими коэффициентами и постоянными запаздываниями, с экспоненциальными коэффициентами и постоянными запаздываниями, с запаздываниями, линейно зависящими от времени, с квазипериодическими коэффициентами и стационарными запаздываниями. Получающиеся при применении метода Лапласа разностные и функциональные уравнения относительно изображения интегрировались с помощью рядов и делалось аналитическое продолжение изображения на интересующую его область. Эффективность метода сопряжена с предположениями о малости некоторых коэффициентов, т. е. метод эффективен при наличии в системе малого параметра.

Работы С. Б. Норкина посвящены изучению дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами и переменным запаздыванием вида

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + p(t)x(t) + q(t)x(t - \tau(t)) = 0,$$

где $p(t), q(t), \tau(t)$ — периодические функции $t, \tau(t) > 0$.

В работах Р. Беллмана и К. Кука изучались системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и с переменными коэффициентами вида

$$p(t) = A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \dots$$

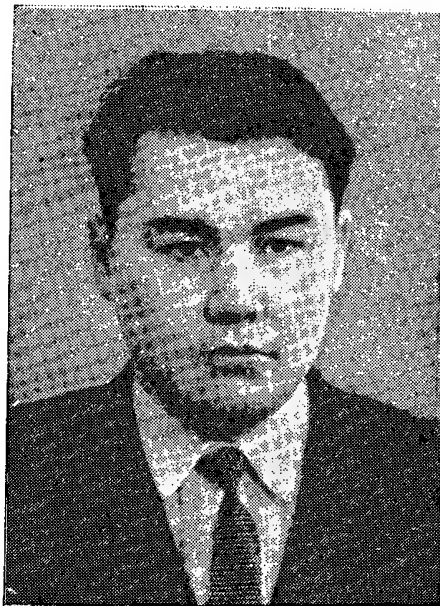
Книга Беллмана и Кука «Дифференциально-разностные уравнения» (1963 г.)³⁵ является одним из самых обстоятельных руководств по дифференциальным уравнениям с отклоняющимися аргументами (и запаздыванием в том числе). Здесь подробно и в разных формах разработаны методы решения этих уравнений, указано несколько вариантов общего решения при различных предположениях о гладкости начальной функции.

В работах А. М. Зверкина рассмотрен подробно частный класс линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздываниями, по времени кратными периоду системы. Для таких систем почти всегда можно построить счетную систему частных решений, получить характеристическое уравнение, критерии устойчивости решения $x = 0$ и исследовать вопросы полноты частных решений в соответствующем пространстве функций. Зверкин получил также условия приводимости линейных периодических систем с запаздыванием к стационарной системе с запаздыванием с помощью точечного преобразования Ляпунова. Вопрос приводимости систем с периодическим запаздыванием с помощью более общего функционального преобразования пока не решен.

Теория периодических и почти периодических колебаний нелинейных систем с запаздыванием. Метод осреднения. Метод функционалов Ляпунова, предложенный Н. Н. Красовским, может быть с успехом использован при выяснении устойчивости периодических и почти периодических режимов, а также для установления факта их существования. Именно этим путем Н. Н. Красовский установил теорему существования периодических режимов для квазилинейных неавтономных систем с запаздыванием и возможность использования для них метода малого параметра.

Изучению резонансных случаев существования периодических и почти периодических режимов были посвящены

³⁵ Bellman R. and Cooke K. Differential-difference equations. New York — London, 1963.



К. Г. Валеев.



Ю. А. Рябов.

работы Л. Э. Эльсгольца, С. Н. Шиманова, А. Халаная. Частотными методами эти вопросы одним из первых исследовал Я. З. Цыпкин. Перенесением метода усреднения на задачи теории колебаний нелинейных систем с запаздыванием занимались В. П. Рубаник, В. И. Фодчук.

Ряд работ Ю. А. Рябова посвящен применению метода малого параметра в теории систем с запаздыванием. Рябов в качестве малого параметра использует запаздывание и строит алгоритм последовательными приближениями, позволяющий приближенно оценить решения систем с запаздыванием (не обязательно периодических). Метод, развитый им, позволяет исследовать линейные системы с переменными коэффициентами и малым запаздыванием.

Решением и исследованием нелинейных систем с запаздыванием и малым параметром при старших производных занимались А. Б. Васильева, Н. Н. Красовский, А. И. Климушев. Асимптотические методы расчета некоторых систем с запаздыванием, связанные с методом усреднения, исследовал В. М. Волосов с сотрудниками.

17

Аналитическая теория нелинейных уравнений

Пенлеве в конце XIX и начале XX в. из уравнения вида

$$w'' = P(w', w, z), \quad (90)$$

где P — рациональная функция относительно w' и w , выделил классы уравнений, решения которых не имеют многозначных подвижных особых точек (координаты этих точек определяются начальными значениями). Он, а затем и Гамбье, Гарнье, пользуясь его методом исследования, доказывали, что эти уравнения имеют только подвижные полюсы. И сам Пенлеве и другие ученые затем доказали, что эти полученные Пенлеве уравнения в качестве решений имеют новые трансцендентные функции, отличные от решений уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$, где $f(x, y)$ — полином от y . Этот метод Пенлеве выделения классов уравнений из (90) с однозначными особыми точками основан на методе Пуанкаре о разложении решений дифференциальных уравнений в ряд по параметру, входящему в дифференциальное уравнение. Заключительное же рассуждение основано на остроумном использовании факта полярности подвижных особых точек. Всего же получено шесть различных уравнений Пенлеве. К 1915 г. создалось впечатление, что методы Пенлеве исчерпали себя и не могут применяться при исследовании расширенного круга задач, а теория уравнений Пенлеве считалась законченной.

В 1952 г. в докладе Н. П. Еругина на Всесоюзном совещании в Москве было высказано мнение о том, что нельзя считать законченной теорию этих уравнений, так как остается неизвестным, есть ли другие полюсы, кроме заранее произвольно выбранного нами полюса z_0 , и если имеются, то сколько их и какова их конфигурация на плоскости Z ; зависит ли



Группа белорусских математиков. 1-й ряд (слева направо): Н. П. Еругин, Т. К. Кравченко, Ф. М. Кириллова, В. И. Крылов, Е. А. Барбашин; 2-й ряд: Д. А. Супруненко, В. Г. Спринджук, А. И. Яблонский, Э. И. Грудо, Е. А. Иванов, А. С. Метельский. 1967 г.

число полюсов и их расположение на плоскости Z от z_0 и от второй произвольной постоянной α (кроме z_0).

Неизвестным оставалось общее представление решений уравнений Пенлеве. Кроме того, отсутствовал метод изучения характера особых подвижных точек z_0 тех из уравнений (90), которые не принимались во внимание самим Пенлеве (в силу его метода) и другими учеными как уравнения, заведомо имеющие многозначные особые подвижные точки. Например, таким уравнением является уравнение

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \sigma y^2 + z^2. \quad (91)$$

В работах Н. П. Еругина был построен новый метод исследования, позволяющий изучить характер особых точек некоторых классов систем уравнений вида

$$\frac{dx}{dz} = P(x, y, z), \quad \frac{dy}{dz} = Q(x, y, z), \quad (92)$$

очевидно, более общих, чем системы, эквивалентные уравнениям (90). Были указаны классы систем вида (92), не имеющие подвижных особых точек типа существенно особых, и дан метод построения решений в окрестности особых подвижных точек этих уравнений в виде рядов,

асимптотических и сходящихся (в том числе и в окрестности многозначных особых подвижных точек).

В работах Н. П. Еругина также было показано, что все решения уравнений

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{z}{2} - w^2 \text{ и } \frac{dw}{dz} = \frac{z}{2} + w^2$$

соответственно являются решениями второго уравнения Пенлеве

$$\frac{d^2w}{dz^2} = 2w^3 + zw + a \quad (93)$$

при $a = -\frac{1}{2}$ и $a = \frac{1}{2}$. Этим было опровергнуто мнение о том, что решения первого уравнения Пенлеве являются трансцендентными функциями (Пенлеве) по сравнению с решениями уравнений вида $\frac{\partial w}{\partial z} = f(z, w)$. Здесь же было показано, что решение уравнения Пенлеве может иметь кроме заданного бесконечное множество других подвижных полюсов первого порядка с вычетом одного знака (равным $+1$ или -1). Указан также способ нахождения координат z_0 этих полюсов как функций начальных значений. Для первого уравнения Пенлеве

$$\frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 + z$$

было найдено общее представление решения в виде

$$w = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

с целыми функциями $P(z)$ и $Q(z)$, т. е. были найдены эти целые функции.

А. И. Яблонский из систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dz} = R_1(y, z), \quad \frac{dy}{dz} = R_2(x, z),$$

где $R_i(u, z)$ ($i = 1, 2$) — функции, рациональные по u с аналитическими по z коэффициентами, выделил все те классы, решения которых не содержат критических подвижных особых точек. Установлено, что решения одного из выделенных классов не могут быть, вообще говоря, выражены через известные функции; они дают класс новых функций. Исследованы основные свойства этих функций. Остальные из выделенных классов уравнений проинтегрированы в элементарных, эллиптических и трансцендентных функциях Пенлеве. А. И. Яблонский показал, что все решения некоторого нелинейного уравнения 4-го порядка являются целыми функциями, и затем указал те начальные значения этих решений, через которые можно дать представление решения второго уравнения Пенлеве (93) во всей области существования.

В 1956 г. Шубарт показал, что второе уравнение Пенлеве

$$w'' = 2w^3 + zw + \alpha$$

при $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = -1$ имеет соответственно решения

$$w = 0, \quad w = -\frac{1}{z}, \quad w = \frac{1}{z}$$

и более ни при каких α не может иметь рациональных решений. Яблонский показал, что второе утверждение Шубарта не является правильным, что для значений α , отличных от целых чисел, действительно нет рациональных решений, но что при всяком целом α можно ожидать рациональные решения, правда, одно единственное для каждого α . Он и определил эти рациональные решения для $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 5$. Он указал также некоторые необходимые и достаточные условия, при выполнении которых будут существовать рациональные решения. Но проверить эти условия трудно. А. П. Воробьев, основываясь на некоторых свойствах рациональных решений, полученных А. И. Яблонским, нашел рекуррентный метод получения рациональных решений через решения при меньших значениях α .

А. И. Яблонский показал, что всякое решение уравнения (93), отличное от рациональных (при целых α) и от решений, найденных Н. П. Еругиным (при $\alpha = \frac{1}{2}, \alpha = -\frac{1}{2}$), имеет бесконечное число вычетов, как равных $+1$, так и равных -1 . Он нашел также число вычетов, равных $+1$: $l = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$ и равных -1 : $r = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$ рациональных решений. Здесь α — целое.

Наконец, Яблонский доказал теорему: пусть α — целое и соответствующее рациональное решение $w(z)$ (оно единственное) с полюсами $a_1, \dots, a_k, k = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} = \alpha^2$. Возьмем еще в плоскости Z круг C_R радиуса R как угодно большого. Тогда, если α_1 (не целое) достаточно мало отличается от целого α и начальные значения решения $w_{\alpha_1}(z)$ также достаточно мало отличаются от начальных значений $w_\alpha(z)$, то есть полюсы $w_{\alpha_1}(z)$, близкие (как угодно) от полюсов $a_1, \dots, a_k$, а все остальные полюсы $w_{\alpha_1}(z)$ (их бесконечное число) находятся вне круга C_R .

Таким образом, было опровергнуто мнение о том, что все решения первого и второго уравнения Пенлеве суть новые трансцендентные функции и что рациональные решения уравнения (93) суть только $w = 0$ ($\alpha = 0$), $w = -\frac{1}{z}$ ($\alpha = 1$) и $w = \frac{1}{z}$ ($\alpha = -1$). Показано, что при каждом целом α будет одно и только одно рациональное решение, найдено число полюсов с вычетом, равным 1 , и вычетом, равным -1 , установлено, что всякое нерациональное решение (кроме найденных Н. П. Еругиным) имеет бесконечное число полюсов, как равных $+1$, так и -1 . Указана некоторая асимптотика расположения полюсов на плоскости Z .

Н. А. Лукашевич получил такие же результаты для 3-го и 4-го уравнений Пенлеве. Он в некоторых случаях здесь нашел и общий интеграл. А. И. Яблонский для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений 2-го и 4-го порядков доказал, что все решения будут целыми функциями. Это особенно интересно в отношении уравнений 4-го порядка, возникающих в теории 1-го и 2-го уравнений Пенлеве.

В связи со всеми предыдущими результатами для уравнения Пенлеве возникают и многие вопросы качественного поведения решений. А. И. Яблонский под влиянием работ В. Авакумович исследовал вопрос об области расположения правильных решений (т. е. решений, продолжимых вместе с двумя производными на промежуток $x > 0$) некоторых уравнений: $y'' = f(x, y)$. Эти общие результаты позволили указать область, в которой расположены правильные решения 1-го и 2-го уравнений Пенлеве $y'' = 6y^2 - x$ ($x > 0$) и $y'' = 2y^3 \pm xy + \alpha$ ($x > 0$). Им указана и качественная картина расположения этих правильных интегральных кривых.

Таким образом, начиная с 1952 г. теория уравнений Пенлеве сильно изменилась как с точки зрения аналитической теории дифференциальных уравнений, так и с точки зрения качественной теории.

В исследованиях Э. И. Грудю получены серьезные результаты относительно поведения и аналитической структуры решений нелинейных уравнений первого порядка в окрестности неподвижной особой точки.

В. И. Зубов нашел условия существования решений уравнений с частными производными в случае, когда нарушены условия Коши—Ковалевской и Ляпунова, полностью решил задачу аналитического представления движений в системах с регулярной особой точкой в классической постановке и указал способы построения семейств O -кривых в тех случаях, когда правые части не имеют линейных членов в своих разложениях.

Л. А. Черкас указал области однозначности решений уравнений

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

где P и Q — полиномы второго порядка, т. е. такие замкнутые кривые L , что решение $y = \varphi(x)$ будет однозначным при обходе комплексной переменной x замкнутой кривой L : $\varphi(x) = \varphi(\bar{x})$, где $\bar{x}$ берется на кривой ³⁶ в точке x после обхода по кривой L .

Мы, конечно, не охватили многих направлений в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, например:

1) сравнение решений двух систем дифференциальных уравнений (В. А. Якубович, Я. Б. Лопатинский, А. Н. Еругин, Б. Н. Петров, Н. В. Адамов, Т. Сабиров, Б. Н. Садовский, М. А. Красносельский, Я. Д. Мамедов и др.);

2) продолжимость решений (Н. П. Еругин, М. Г. Крейн, М. А. Красносельский, С. Г. Крейн, Д. П. Костомаров, Р. В. Петропавловская, П. С. Бондаренко, С. М. Лозинский, В. Н. Касперов и др.);

3) построение систем дифференциальных уравнений с заданным движением (Н. П. Еругин, Е. А. Барбашин, И. Мухаметзянов, М. И. Альмухамедов и др. ;

³⁶ Здесь внутри кривой L могут быть многозначные особые точки решения y , но при обходе кривой L решение y возвращается к исходному значению.

4) исследование систем, правые части которых удовлетворяют условиям Коши — Римана или другим аналогичным условиям (например, условиям И. Аржаных);

5) сингулярная задача Коши (В. А. Чечик, А. И. Перов, Г. А. Бесмертных, И. Т. Кигурадзе, З. И. Гусейнов);

6) уравнения с разрывными правыми частями (А. Ф. Филиппов, Е. Е. Викторский, Я. Курцвейль, Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, А. Б. Самаров, Ю. К. Солнцев, Заремба, Е. А. Барбашин, Ю. И. Алимов, М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер);

7) краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений;

8) дифференциальные уравнения в банаховых пространствах и другие направления.

18

Основные направления развития теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Научные коллективы и центры

Осветим теперь в общих чертах важнейшие этапы и направления в развитии теории обыкновенных дифференциальных уравнений в СССР, деятельность научных центров и школ, а также отметим некоторые детали общего характера.

В 1929—1930 гг. появились первые работы И. А. Лаппо-Данилевского по аналитической теории линейных дифференциальных уравнений на основе разработанной им общей теории функций от матриц. В этих работах был создан новый метод исследования, позволивший решить много фундаментальных проблем. Исследования И. А. Лаппо-Данилевского получили весьма серьезное развитие в работах Н. Е. Кочина, Н. П. Еругина и др. Соединенные с методами Ляпунова эти исследования позволили разрешить очень трудные проблемы и в других областях теории линейных уравнений (теории приводимых систем, теории линейных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, теории асимптотических разложений и т. д.). Вообще влияние методов Лаппо-Данилевского на развитие теории обыкновенных дифференциальных уравнений трудно переоценить.

Интересны некоторые факты из биографии И. А. Лаппо-Данилевского (1896—1931). Сын известного историка, большой любитель музыки, свободно игравший произведения Вагнера, Моцарта, Листа, знаток русской литературы и искусства Лаппо-Данилевский был кадетом пажеского корпуса, работал управдомом. Но в 1925 г. экстерном закончил Ленинградский университет, затем преподавал в высших учебных заведениях. В 1931 г. был избран членом-корреспондентом АН СССР.

В 20—30-х годах начали зарождаться сразу несколько научных школ по обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые оформились к 1935 г. Отметим прежде всего горьковскую школу, возникновение которой надо отнести приблизительно к 1926 г. Л. И. Ман-

дельштам, А. А. Андронов, Н. Д. Папалекси и А. А. Витт начали широко пропагандировать применение строгих математических методов качественной теории и теории устойчивости Ляпунова и Пуанкаре к колебательным явлениям радиофизики. В работах этих ученых мы видим не только применение готовых формул и теорем к вопросам физики (это само по себе было очень важным), но и широкую пропаганду всего того аппарата, который был развит в работах математиков. Формулировались здесь и многие нерешенные задачи в качественной теории и теории устойчивости, которые привлекли внимание молодых ученых, в частности Л. С. Понтрягина.

Уже в 1926—1927 гг., например, в работах А. А. Андропова и др. встречаются такие термины как бифуркация (разрушение качественной геометрической картины), параметрический резонанс, грубые системы (Андронов — Понтрягин). Начинается серия исследований по методу точечных отображений нахождения периодических решений, вопросов устойчивости периодических решений (Мандельштам) и др.

Решение этих задач дано в большом цикле работ к 1935—1941 гг. и после войны. В этом направлении работали М. А. Леонтович, Е. А. Андропова-Леонтович, Н. Н. Баутин, Л. Н. Белюстина, Н. Ф. Отроков, А. Г. Майер и Р. М. Минц.

С 1926 г. в Киеве весьма интенсивно работают Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов. (Крылову тогда было 47 лет, а Боголюбову — 17 лет.) В 1932 г. они начали свою большую интересную серию исследований в области нелинейной механики, на что, по-видимому, повлияли многочисленные выступления Мандельштама и Андропова в этой области.

В исследованиях Крылова и Боголюбова сразу резко определилось оригинальное направление, обусловленное задачами нелинейной механики и астрономии. Крылов и Боголюбов рассматривали нелинейные уравнения, содержащие малый параметр. Они решили трудную и важную для приложений задачу нахождения функционального приближенного значения решений таких уравнений.

Новым этапом в развитии исследований по нелинейной механике явилась работа Н. Н. Боголюбова «О некоторых статистических методах в математической физике», написанная в 1945 г. В ней автор обосновал и дал точную формулировку так называемому методу осреднения, применявшемуся раньше в более простых случаях, и распространил его на решение многих трудных задач нового типа.

Метод осреднения встречается уже в работе Ван-дер-Поля (1920 г.), но там он не был обоснован. Некоторое обоснование метода дал П. Фату. Этот метод широко использовали Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси (1934 г.), А. А. Андронов, А. А. Витт и С. Э. Хайкин в книге «Теория колебаний» (1960 г.). Во многих этих работах предполагалось, что система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, \varepsilon), \quad (94)$$

где x — вектор, $X(t + \omega, x) = X(t, x)$.



Н. М. Крылов (справа) и Н. Н. Боголюбов.

Н. Н. Боголюбов придал методу намного более общий характер, предполагая только, что в некоторой области изменения x выполнено условие Липшица и равномерно

$$\frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt \rightarrow X_0(x)$$

при $t \rightarrow \infty$. В этом случае решения системы (94) будут близки к решениям системы

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_0(x) \quad (95)$$

на интервале ³⁷ $0 < t < \frac{L}{\varepsilon}$, где L определяется по наперед заданной близости между решениями уравнений (94) и (95). Н. Н. Боголюбов разработал методы исследований асимптотического поведения решений уравнения (94) при $t \rightarrow \infty$ на основании известных свойств асимптотического поведения решений уравнения (95). Именно здесь был дан способ доказательства существования D множества ограниченных решений уравнения (94), к которым приближаются все другие решения,

³⁷ Оценка близости решений уравнений (94) и (95) в этом промежутке и появилась впервые именно у Н. Н. Боголюбова, не говоря уже об общности предложений относительно $X(t, \varepsilon)$ в (94).

начинающиеся вблизи D решений. Эти D решения будут почти периодическими, если в уравнении (94) функция $X(t, x)$ — почти периодическая относительно t , и периодическими, если $X(t, x)$ — периодическая.

Исследования Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова послужили тем основанием, на котором выросла киевская школа теории дифференциальных уравнений. Результаты Н. Н. Боголюбова нашли и находят применения во многих областях теории дифференциальных уравнений, в том числе и в теории бесконечных систем дифференциальных уравнений и в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

В последние десять лет киевская школа получила новое развитие в работах Ю. А. Митропольского и его учеников. Об этих исследованиях говорится в § 2 настоящей главы и более подробно в разделе «Асимптотические методы в нелинейной механике» 2-й книги IV тома.

Фундаментальные исследования в стиле идей Н. Н. Боголюбова провел И. З. Штокало по линейным уравнениям с квазипериодическими и почти периодическими коэффициентами ³⁸. Эти исследования суммированы в его монографии «Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами» (1960 г.). В книге «Операционные методы и их развитие в теории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами» (1961 г.) И. З. Штокало изложил свои исследования по развитию операционных методов. Ему впервые удалось обобщить операционные методы на линейные дифференциальные уравнения с почти периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Исследования И. З. Штокало позволили ему дать новые качественные характеристики строению решений таких систем довольно общего вида.

Большой цикл работ выполнен Ю. Д. Соколовым в качественной и аналитической теории дифференциальных уравнений, связанных с аналитической механикой. Эти исследования он начал еще в 1928 г.

Ю. Д. Соколовым были изучены условия общего соударения трех тел, взаимно притягивающихся по закону Ньютона, доказана теорема о минимуме взаимных расстояний системы в задаче трех тел, обобщен на случай n тел его же результат о равенстве нулю всех постоянных интегралов площадей для общего соударения, а также обобщены для этого случая теоремы Дзиобека.

В тридцатых годах Соколов рассмотрел теорию особых траекторий системы свободных материальных точек. Продолжая свои исследования в задачах трех тел, он обобщил результаты Пенлеве, Слудского — Вейерштрасса, Шази, Леви-Чивита, Зундмана и др. Работы Ю. Д. Соколова 40-х годов были посвящены обобщенной задаче n тел и вопросам о пространственных траекториях в окрестности общего соударения системы материальных точек от действия взаимных сил ³⁹.

³⁸ Обзор работ математиков, работающих на Украине, написан В. С. Сологубом.

³⁹ См.: Ю. Д. Соколов. Особые траектории системы свободных материальных точек. Изд-во АН УССР, К., 1951.

Отдельный цикл работ Ю. Д. Соколова представляют его исследования пятидесятих годов по фильтрации грунтовых вод. Им создан новый приближенный «метод осреднения функциональных поправок» (метод Соколова), который был в 1953 — 1966 гг. развит и обобщен автором и его учениками применительно к решению различных операторных уравнений.

Ряд исследований, относящихся к приближенным методам интегрирования дифференциальных уравнений, осуществил М. Ф. Кравчук. В частности, им получены результаты относительно метода наименьших квадратов и метода моментов, а также по вопросу условий сходимости приближений к искомому решению.

Интересные исследования провели С. Ф. Феценко и его ученики по асимптотическому поведению и асимптотическому расщеплению систем линейных дифференциальных уравнений.

С. Ф. Феценко нашел метод асимптотического представления интегралов систем линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами в случае, если одна из собственных частот системы может совпадать при некоторых значениях с частотами возмущающей силы. Он доказал теорему об асимптотическом расщеплении исследуемых систем на независимые системы с порядками, меньшими чем порядок основной системы. В 1966 г. была опубликована монография С. Ф. Феценко, Л. Д. Николенко, Н. И. Шкиля «Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений».

Во время работы в Институте математики АН УССР И. М. Рапопорт провел ряд исследований по асимптотическим методам дифференциальных уравнений. Он создал метод, позволяющий указать асимптотику для решений дифференциальных уравнений высших порядков с неограниченно возрастающими коэффициентами, исследовать асимптотическое поведение неустойчивых решений дифференциальных уравнений с коэффициентами, стремящимися к нулю. В классической задаче устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами Рапопорт получил асимптотические формулы для распределения зон устойчивости и неустойчивости. В 1954 г. была опубликована его книга «О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений».

Основные результаты исследований К. Я. Латышевой, работавшей в Киевском университете, связаны с нормальными решениями линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами.



С. Ф. Феценко.



К. Я. Латышева.



К. В. Задирака.

В докторской диссертации Латышева найдены условия существования нормальных решений вида

$$y = e^{Q(x)} x^\beta \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{-i},$$

а также получила необходимые и достаточные условия существования решений $y = e^{Q(x)} x^\beta S(x)$, где

$$Q(x) = \sum_{s=1}^p \frac{\alpha_{p-s} x^s}{S},$$

α_β — корень соответствующего уравнения, определяемого относительно $x \rightarrow \infty$.

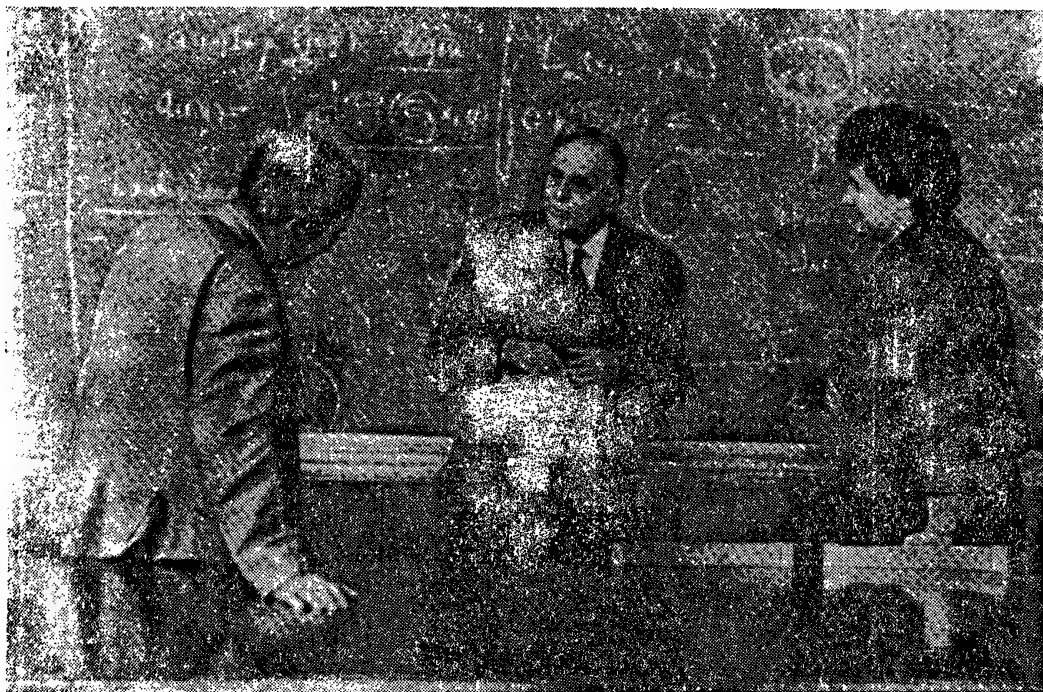
К. В. Задирака впервые разработал метод чередующихся верхних и нижних приближений к решению начальной задачи для самосопряженных линейных дифференциальных уравнений четного порядка с переменными коэффициентами и применил его к нахождению верхних и нижних оценок для собственных значений и собственных функций в задаче типа Штурма — Лиувилля. Эти работы являются основой для многих других исследований. Большой цикл работ К. В. Задираки относится к уравнениям с малым параметром при старших производных.

Рассмотрим направления исследований по теории обыкновенных дифференциальных уравнений московских математиков⁴⁰.

В сплочении московских математиков в единый научный коллектив большую роль сыграли выдающиеся педагоги и ученые Н. Н. Лузин и Д. Ф. Егоров, а также В. В. Степанов. Необычайная эрудиция Степанова, его общительный характер, способность разобраться в еще незаконченных исследованиях, выслуши-

вать часами рассказы начинающего ученого привлекали к нему всех. Он стал истинным основателем и руководителем московской школы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Степанов, как известно, интересовался теорией функций и теорией дифференциальных уравнений.

⁴⁰ Текст о развитии теории обыкновенных дифференциальных уравнений в Москве написал В. В. Немыцкий.



А. Н. Колмогоров, Р. Неванлинна и О. А. Олейник.

К середине двадцатых годов ученики Н. Н. Лузина расширяют тематику исследований: одни занимаются топологией, другие — теорией вероятностей, третьи — дифференциальными уравнениями. Первыми результатами были — пример М. А. Лаврентьева дифференциального уравнения, для которого все точки некоторой области являются точками неединственности, и доказательство П. С. Александровым и В. В. Немыцким принципа неподвижной точки для гильбертова пространства и, следовательно, новых теорем существования для дифференциальных уравнений. Только открытие и опубликование в 1927 г. Шаудером своего принципа не позволили этой работе занять надлежащее место.

В 1929 г. появилась заметка А. А. Андронова «Предельные циклы Пуанкаре и теория автоколебаний», напечатанная в Докладах Парижской академии. В этой заметке закладывались основы математической теории нелинейных колебаний, которая в дальнейшем приобрела очень важное значение.

В 1927 г. вышла книга Г. Биркгофа «Динамические системы». Учеников Лузина в особенности привлекла седьмая глава, где к решению механических проблем прилагался такой рафинированный аппарат теории множеств, как трансфинитные числа да и все остальное по существу было чистойшей теорией множеств. Этой проблематикой заинтересовался живший в то время в Ленинграде А. А. Марков. Он полностью пересмотрел, уточнил и далеко развил материал седьмой главы. Книга Биркгофа о системах с двумя степенями свободы привлекла внимание и членов семинара П. С. Александрова.



В. В. Немыцкий.

В 1930 г. В. В. Степанов собрал молодежь в Физическом институте в одной из лабораторий Мандельштама. На этом заседании присутствовал тогда еще молодой А. А. Андронов. Это и было началом семинара по качественной теории дифференциальных уравнений. Первые доклады читал А. А. Марков.

Первое пятилетие 30-х годов было исключительно благоприятным для развития теории дифференциальных уравнений в нашей стране, и в частности в Москве. И. Г. Петровский (ученик Д. Ф. Егорова) написал свою работу о структуре окрестности особой точки для систем уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ (i = 1, 2, \dots, n),$$

значительно усилив результаты О. Перрона, относящиеся к этому же

времени. А. Н. Тихонов и В. В. Степанов построили топологическую теорию почти периодических движений. В. В. Немыцкий развил метод сечений и ввел понятие седла на бесконечности и вполне неустойчивые системы. А. А. Марков написал целый ряд работ по теории динамических систем, в частности установил связи между почти периодичностью и устойчивостью по Ляпунову.

А. Я. Хинчин доказал новую, самую общую форму эргодической теоремы, уточнил классическую теорему о возвращении Пуанкаре, В. В. Степанов нашел формулировку эргодической теоремы на случай пространства бесконечной меры.

Многие из упомянутых ученых в следующие годы переключились на другие проблемы математики. Так, И. Г. Петровский и А. Н. Тихонов изучали уравнения в частных производных, В. В. Немыцкий занимался главным образом построением общей теории нелинейных интегральных уравнений. Большинство из них опять вернулись к проблемам обыкновенных дифференциальных уравнений.

В период 1936—1941 гг. важные результаты были получены Л. С. Понтрягиным и А. А. Андроновым, в частности, в теории «грубых систем». На примере этих систем были четко поставлены задачи о характеристике поведения интегральных кривых в целом. Уже Пуанкаре рассматривал такие задачи, но Понтрягин и Андронов поставили проблему исследования в целом как изучение топологических инвариантов систем интегральных кривых. Надо сказать, что с тех пор изучение топологических инвариантов системы интегральных кривых стало одной из основных проблем для развития теории обыкновенных дифференциальных уравнений в Москве.

Вокруг В. В. Степанова были объединены не только математики, но и физики и астрономы. Он руководил семинаром в Астрономическом институте. Среди сотрудников института выделялись Г. Н. Дубошин и Н. Д. Моисеев, которые успешно занимались проблемами устойчивости по Ляпунову. Моисеев выдвинул ряд оригинальных идей, например, относительно вероятности устойчивости, недифференцируемости функции Ляпунова; он занимался также развитием идей французского математика Адамара.

В самом университетском семинаре начали участвовать новые люди. Среди участников следует назвать Г. Ф. Хильми, работавшего в Институте геофизики. После 1935 г. он энергично стал разрабатывать теорию динамических систем, занимаясь развитием идей Пуанкаре, Г. Биркгофа о несжимаемости области и центре притяжения динамических систем.

Активным участником семинара был аспирант В. В. Степанова — М. В. Бебутов. Он работал как в области топологических, так и метрических вопросов теории. Его лучшим достижением было, по-видимому, исследование локальной структуры любой динамической системы. В самом начале войны он погиб на фронте.

В период 1935—1941 гг. продолжалась работа и по метрической теории динамических систем. Известно со времени Пуанкаре, что системы с интегральным инвариантом имеют много интересных свойств, в частности в них почти все движения в смысле меры устойчивы по Ляпунову. Уже в работах Г. Биркгофа решался вопрос об условиях существования интегрального инварианта. Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым было показано, что инвариантная мера может быть введена в любых компактных системах. На эту же тему написана работа А. А. Маркова «Абелевы множества». На семинаре В. В. Немыцкого и В. В. Степанова была поставлена обратная задача: нельзя ли задать топологические свойства траекторий, чтобы в систему можно было бы ввести такой интегральный инвариант, при котором любая область имела положительную меру. Эти проблемы были частично разрешены аспирантом В. В. Немыцкого — Б. П. Демидовичем.

В 1940 г. В. В. Немыцкий начал проводить семинар по системам дифференциальных уравнений без единственности, отправляясь от работ французских математиков Монтеля и Шарпантье и польского математика Зарембы. Участниками семинара были аспиранты В. В. Немыцкого — М. И. Минкевич и Е. А. Барбашин. В серии работ этих математиков была создана общая теория динамических систем. В семинаре занимались также чисто аналитическими вопросами качественной теории (М. И. Ельшин, И. С. Куклес).

Во время войны московские математики работали в различных научных центрах, вследствие чего деятельность семинара по качественной теории не могла быть сосредоточена в одном месте. К весне 1944 г. университет возвратился из эвакуации в Москву.

На одном из первых заседаний Математического общества В. В. Немыцкий доложил свою теорию приближенного качественного интегрирования и разыскания периодических решений с помощью сетей ломаных.



В. И. Арнольд.

В послевоенный период до конца 40-х годов подводились некоторые итоги. Вышла монография В. В. Степанова и В. В. Немыцкого «Качественная теория дифференциальных уравнений», сыгравшая большую роль в популяризации качественной теории. Была опубликована работа В. А. Рохлина «Избранные вопросы метрической теории динамических систем». Метрическая теория динамических систем становится теперь отраслью функционального анализа, и основным ее понятием является понятие спектра динамической системы. В семинаре по качественной теории начала разрабатываться теория уравнения нелинейных колебаний (А. В. Драгилев).

В период 1948—1955 гг. в теории обыкновенных дифференциальных уравнений возникло много новых направлений. Два

из них образовались по инициативе А. Н. Колмогорова и И. М. Гельфанда. Первое — изучение возмущений гамильтоновых систем — сразу было широко признано у нас и за рубежом.

В 1954 г. на пленарном заседании Амстердамского конгресса математиков выступил А. Н. Колмогоров. Он говорил о проблемах, которыми занимался еще Пуассон. Было показано, что классические интегрируемые случаи имеют некоторую степень устойчивости, которую можно характеризовать в терминах меры Лебега. Не все было закончено в то время в этой теории, но теперь ученик А. Н. Колмогорова В. И. Арнольд довел ее до логического конца и установил, что методы теории приложимы не только к классической проблеме устойчивости солнечной системы, но и к современной проблеме существования магнитной ловушки. Эти работы публиковались уже в 60-х годах.

Начало второму направлению — изучению систем линейных уравнений с периодическими коэффициентами — было положено в работах И. М. Гельфанда. Речь идет о теории А. М. Ляпунова областей устойчивости и неустойчивости. Эта проблема уже давно была связана с краевыми задачами и, следовательно, с вариационными методами. Труды И. М. Гельфанда, В. Б. Лидского, М. Г. Нейгауз, В. А. Якубовича, а также в работах М. Г. Крейна создана обширная и глубокая теория областей устойчивости и неустойчивости для этих систем. При построении теории привлечен аппарат алгебры и функционального анализа. Основные работы были написаны в 1954—1955 гг., однако разработка теории продолжается как в СССР, так и за рубежом.

В эти же годы А. Д. Мышкис заинтересовался уравнениями с запаздывающим аргументом. Он построил общую теорию этих уравнений, указал на специфические особенности решений линейных уравнений второго порядка. Это направление продолжал разрабатывать, в част-

ности, Л. Э. Эльсгольц. Он объединил вокруг своего семинара многих математиков. Примерно с 1956 г. этим вопросом занимается Н. Н. Красовский. Его исследования придавали этому направлению прикладной характер. Под влиянием московских математиков развернулись работы и в Румынии (Бухарест) под руководством ученика В. В. Немыцкого — А. Халана.

В рассматриваемый период возник еще один семинар под руководством А. Н. Тихонова. Исходя из физических проблем, Тихонов изучил вопрос о зависимости от параметра решений дифференциальных уравнений, если этот параметр находится при старших производных. Его исследования продолжили А. Б. Васильева и В. М. Волосов, и сейчас создана теория асимптотического представления решений. В связи с данной проблемой нужно отметить работы И. С. Градштейна, который пришел примерно к тем же окончательным результатам для случая систем уравнений, что и А. Н. Тихонов.

В семинаре Тихонова занимались также и аналитической теорией дифференциальных уравнений (Д. П. Костомаров). Уравнения с малым параметром исследовались и в семинаре Л. С. Понтрягина в Математическом институте им. В. А. Стеклова, где Е. Ф. Мищенко рассматривал существование периодических решений для таких уравнений.

Все указанные до сих пор новые направления развивались независимо от семинара по качественной теории. В семинаре возникли (1948—1955 гг.) свои направления исследований.

Первое направление — исследование особых точек высшего порядка в многомерном случае. Этим вопросом занялся А. А. Шестаков, который опубликовал целый ряд интересных работ, где изучались множества O -кривых. Независимо от московских математиков исследование проводил Л. Э. Рейзинь в Риге. Наконец, уже в 60-е годы очень интересную работу о приведении уравнений к каноническому виду с особой точкой высшего порядка сделал Брюно. Сейчас эта же проблема изучается и в семинаре И. С. Куклеса в Самарканде. Второе направление — это топологические классы окрестностей особой точки и асимптотического поведения интегральных кривых в многомерном пространстве для уравнений вида Ляпунова — Пуанкаре

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum a_{ik}(t) x_k + f(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Полную классификацию дал Д. М. Гробман для случая постоянной матрицы. При этом он использовал работу Э. М. Вайсборда. Аналогичный,



В. М. Миллиончиков.

но более слабый результат был позже получен в США Гартманом. Системами с переменной матрицей занимались Р. Э. Виноград и Б. Ф. Былов. Все их основные идеи были уже разработаны в период до 1955 г. В настоящее время существенные результаты по этой проблеме получил В. М. Миллионщиков. Наконец, третье направление — исследование уравнений с помощью обобщенных функций Ляпунова, которыми занимался В. В. Немыцкий. В частности, он стремился с помощью вращающихся функций Ляпунова выявить осцилляторный характер решений. В этом направлении работали также М. Б. Кудяев, Эфендиев и П. Н. Папуш. Для развития этой теории важную роль сыграла одна из теорем Н. Н. Красовского, который тоже изучал такие функции.

В докторской диссертации Е. А. Барбашин развил метод сечений для теории устойчивости, метод, рассматриваемый В. В. Немыцким в 1934 г. Дальнейшее приложение этот метод получил также в докторской диссертации Н. Н. Красовского. Большой цикл исследований об ограниченных решениях неавтономных систем провел Б. П. Демидович, в частности им изучены диссипативные системы. Можно назвать еще работы А. Д. Горбунова по оценкам решений линейных систем с переменными коэффициентами. Под влиянием работ ленинградского математика С. М. Лозинского ученик А. Н. Колмогорова В. А. Алексеев тоже получил интересные оценки решений. К концу 1954—1955 гг. относятся работы И. Г. Петровского и Е. М. Ландиса о решении проблем Пуанкаре по оценке числа предельных циклов для полиномиальных дифференциальных уравнений. При решении этой проблемы ими была разработана совершенно новая область качественного исследования — топологические исследования в комплексных многомерных пространствах. До сих пор не все ясно в деталях доказательства, но работы эти сами по себе оригинальны.

В последнем десятилетии (1956—1966 гг.) в Москве ведутся исследования почти во всех направлениях, возникших раньше. Продолжают работу семинары Л. С. Понтрягина, А. Н. Тихонова, семинар по качественной теории. На заседаниях последнего читают доклады не только постоянные участники, но и другие математики, в том числе зарубежные ученые: С. Лефшец, Я. Курцвейль, Т. Важевский, А. Халанай, К. Кордуняну.

Под влиянием московского семинара возникли школы качественной теории в Рязани под руководством И. П. Макарова, в Кишеневе — под руководством К. С. Сибирского, самаркандская школа (руководитель И. С. Куклес); часто докладывают о своих исследованиях участники ижевского семинара (руководитель Н. В. Азбелев); проводит исследование по проблеме предельных циклов и качественной теории на случай разрывных правых частей А. Ф. Филиппов. Последняя из названных проблем в 40-е годы успешно разрабатывалась Ю. К. Солнцевым.

Наши исследователи начали работу в новой для них области — теории оптимальных процессов в системах автоматического управления. Дело в том, что в это время один из ведущих топологов Л. С. Пон-

трягин отошел от своей прежней тематики и начал исследования по теории дифференциальных уравнений автоматического управления. Он привлек к этой работе своих учеников — Р. В. Гамкредидзе, Е. Ф. Мищенко, В. Г. Болтянского. Они создали новую теорию оптимальных процессов на основе принципа максимума Л. С. Понтрягина, которая тесно связана с теорией динамического программирования Р. Э. Беллмана. Интересные работы по этой тематике публикуют также Н. Н. Красовский, Е. А. Барбашин.

В. В. Немыцкий совместно с М. М. Вайнбергом и В. С. Гусаровой вел семинары по операторным дифференциальным уравнениям в банаховом пространстве. Перед участниками семинара поставлена проблема перенесения на случай операторных уравнений основных результатов качественной теории. Это в основном сделано в работах В. М. Миллионщикова, К. В. Валикова, К. Мамия и др. Устанавливается связь между проблемами дифференциальных уравнений обыкновенных и в частных производных.

Глубокие результаты по различным проблемам дифференциальных уравнений и проблемам, близким к ним, получили В. И. Арнольд, Д. В. Аносов, Я. Г. Синай, С. П. Новиков и В. П. Маслов.

Рассмотрим теперь работы ленинградских математиков. Мы уже отмечали выдающиеся достижения И. А. Лаппо-Данилевского: Начиная с 1932 г. в Ленинграде несколько лет работал семинар по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений под руководством Г. М. Мюнтца (приехавшего из Германии). Но работы в этом направлении не получили надлежащего развития.

С 1932 г. под руководством В. И. Смирнова и Н. Е. Кочина работы И. А. Лаппо-Данилевского начал изучать семинар в составе В. И. Крылова, С. А. Янчевского, Г. Р. Лоренца, Б. Д. Вержбицкого, Л. М. Шифнера, Н. П. Еругина и др. Были изданы труды И. А. Лаппо-Данилевского в трех томах на французском языке под редакцией В. И. Смирнова и Н. Е. Кочина.

Ряд исследований был выполнен Б. Д. Вержбицким и Л. М. Шифнером по вопросам сходимости и суммированию рядов от матриц и интегрируемости линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в конечной форме. Н. Е. Кочин изучал проблему Римана (построения регулярной линейной системы дифференциальных уравнений с заданными многозначными особенностями в окрестности фиксированных особых точек). Н. П. Еругин получил ряд результатов, относящихся к проблеме Римана и к проблеме (В) Лаппо-Данилевского (построение интегральной матрицы для иррегулярной линейной системы дифференциальных уравнений в виде произведения двух матриц, одна из которых однозначна во всей плоскости независимого переменного, а вторая — многозначна — есть решение регулярной системы с теми же особыми точками, что и у исходной иррегулярной системы).

Н. П. Еругин впервые разрешил проблему Пуанкаре для иррегулярной системы. Позднее (1937 г.) в этом направлении начал работать Б. Л. Крылов, который провел большое исследование по проблеме Римана для системы Гаусса. В 1940 г. В. С. Иванов рассмотрел вопрос о



Д. В. Аносов.

существовании периодического решения системы $\dot{x} = y - F(x)$, $\dot{y} = -x$.

В конце 30-х годов Н. А. Артемьев занялся качественной теорией и начал изучать работы И. А. Лаппо-Данилевского. В 1939—1941 гг. он исследует гамильтоновы линейные системы с периодическими коэффициентами на основе метода Лаппо-Данилевского. Таким образом, до 1941 г. в Ленинграде велись работы только по аналитической теории линейных систем дифференциальных уравнений. В этом направлении работал и Н. П. Еругин, у которого интерес к аналитической теории дифференциальных уравнений был вызван лекциями Н. М. Гюнтера. Но в 1932 г. Гюнтер перестал работать в Ленинградском университете. Не был привлечен к работе кафедры и Н. П. Еругин.

В 1939 г. Н. М. Гюнтер возвращается в университет в качестве заведующего кафедрой дифференциальных уравнений и зачисляет сотрудником кафедры Н. П. Еругина. С этого года работа по обыкновенным дифференциальным уравнениям в Ленинграде активизируется. Но в 1941 г. кафедра прекратила свою деятельность, так как Н. М. Гюнтер умер, а Н. П. Еругин ушел на фронт.

В сентябре 1942 г. Еругин после тяжелого ранения возвратился в Елабужский филиал Ленинградского университета, где в течение двух месяцев выполнил ряд исследований и в том числе построил теорию приводимых систем⁴¹. Успех в работе был обеспечен соединением метода Лаппо-Данилевского, которым свободно владел Н. П. Еругин, с идеями Ляпунова. Это новое направление исследований Н. П. Еругина, связанное с качественной теорией и теорией устойчивости, было осуществлением общих планов, продиктованных ему Н. М. Гюнтером в 1940 г.

Ленинградский университет вернулся в Ленинград из эвакуации в 1944 г. Заведующим кафедрой дифференциальных уравнений университета стал Н. П. Еругин. С 1945 г. на этой кафедре развернулась научно-исследовательская работа, в которой приняли участие Ю. С. Богданов, В. П. Басов, Н. А. Сахарников, В. В. Хорошилов, П. В. Атрашенко, Л. И. Донская, А. П. Тузов, А. Ф. Андреев, А. К. Гаханов, Н. М. Матвеев, Б. А. Ершов и др. После 1951 г. в научный семинар при кафедре вошли В. И. Зубов, В. А. Плисс, Н. Н. Кушков, Б. Н. Скачков, Н. В. Адамов и др.

На семинаре кафедры велись работы по многим вопросам теории обыкновенных дифференциальных уравнений, по теории линейных си-

⁴¹ Это наряду с другими исследованиями того периода и составило докторскую диссертацию, которая была защищена в июле 1943 г.

стем дифференциальных уравнений, по качественной теории и теории устойчивости. Новое направление началось в аналитической теории нелинейных систем дифференциальных уравнений и по многим другим вопросам. К 1956 г. на кафедре выполнено около 150 работ и напечатано пять монографий: две — Н. П. Еругина, одна — В. И. Зубова, одна — В. А. Плисса, одна — Н. М. Матвеева. После опубликования статей Н. П. Еругина развернулись исследования по качественной теории и устойчивости в целом.

В 1956 г. Н. П. Еругин переехал в Минск. Кафедра дифференциальных уравнений разделилась на две: кафедру уравнений в частных производных и кафедру обыкновенных дифференциальных уравнений. В 1962 г. кафедрой обыкновенных дифференциальных уравнений стал заведовать ученик Еругина В. А. Плисс. К этому времени он провел важные исследования системы трех уравнений типа Айзермана, где топологическими методами Картрайт открыл существование периодических решений иной природы, чем открытые прежде. Его дальнейшие работы относятся ко многим вопросам теории устойчивости, существования периодических решений и диссипативным системам. Они являются характерными для того направления, которое развивается теперь в Ленинграде.

Исследования по линейным уравнениям с квазипериодическими коэффициентами ученика Н. П. Еругина А. Е. Гельмана продолжала Л. Я. Адрианова. В последнее время (1965, 1966 гг.) на эту же тему появился ряд работ И. Н. Блинова. Вообще работы по обыкновенным дифференциальным уравнениям с 1962 г. в Ленинграде снова расширяются. В Политехническом институте работы по линейным системам выполнил (1960, 1963 гг.) К. Г. Валеев, ученик А. И. Лурье. Исследования по обыкновенным дифференциальным уравнениям ведут Б. Г. Питтель, А. Х. Гелиг под руководством В. А. Якубовича. Под руководством В. И. Зубова большой коллектив ведет исследование по широкому кругу задач теории дифференциальных уравнений, механики и теории управления. Он автор четырех монографий. В Ленинградском отделении Математического института им. В. А. Стеклова теорию устойчивости, асимптотику в разных случаях и качественную теорию изучают А. Н. Еругин и Б. Н. Скачков.

Многие исследования объединяются кафедрой дифференциальных уравнений Ленинградского университета, где работают под руководством В. А. Плисса Ю. Н. Бибикив, В. П. Басов, Н. М. Матвеев, Л. Я. Адрианова, Е. С. Анитова и др. Важные исследования ведет А. Ф. Андреев.

Ряд работ по формальным разложениям решений дифференциальных уравнений выполнил В. А. Тартаковский.

Рассмотрим теперь работы по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, выполненные математиками других научных центров страны.

До 1938 г. в Свердловске проводились исследования свойств решений уравнений второго порядка Н. В. Адамовым и М. И. Ельшиным. В 1938 г. в Свердловск приехал представитель казанской школы

И. Г. Малкин, специалист по теории устойчивости движения, впоследствии автор трех известных монографий по теории устойчивости и нелинейным колебаниям.

В 1951 г. в Свердловск возвращается после докторантуры Е. А. Барбашин. Он получил важные результаты в теории динамических систем, например впервые создала скиематику, которая позволила ему построить теорию динамических систем без свойств единственности. Он продолжал и после аспирантуры весьма активную работу по теории динамических систем и некоторым вопросам топологии. В 1950 г. закончил докторантуру в Математическом институте им. В. А. Стеклова. В своей докторской диссертации получил весьма важные результаты по общей теории динамических систем, топологии и, что интересно, связал эти результаты со многими вопросами теории дифференциальных уравнений, и в частности с теорией устойчивости. Так, он доказал существование гладкой функции Ляпунова в области притяжения асимптотически устойчивой точки (одновременно с Массерой).

В Свердловске с 1951 г. начинается интенсивное развитие теории обыкновенных дифференциальных уравнений на семинарах, руководимых сначала Е. А. Барбашиным, а вскоре и его учеником Н. Н. Красовским. Н. Н. Красовский — инженер по образованию — под руководством Е. А. Барбашина в течение нескольких лет стал крупным ученым (академиком АН СССР) и теперь руководит в Свердловске исследованиями по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь ведутся работы по многим вопросам устойчивости, качественной теории, нелинейных колебаний, теории динамических систем, топологии, программного и оптимального регулирования, устойчивости систем с переменной структурой, систем с последействием на основе идей Ляпунова, оптимального регулирования стохастических систем. Особый интерес представляют последние работы Н. Н. Красовского, относящиеся к вопросам управления, наблюдения и стабилизации динамических систем.

Последние направления работ Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского хорошо представлены в работах, публикуемых, например, в журнале «Дифференциальные уравнения». В них приводятся существенные результаты и широко используются все современные методы исследования, а также методы решения многих задач на основе идей Ляпунова.

Участниками свердловского семинара были С. Н. Шиманов, В. А. Табуева, Е. И. Геращенко, З. М. Лушникова, Ю. М. Плишкин, М. А. Скалкина, В. Г. Егоров, Ю. М. Репин, Б. Д. Воронцов, Е. И. Железнов, Г. Я. Карасик, А. М. Панов, Ф. А. Шолохович, В. А. Байдосов, Ю. И. Алимов, Л. П. Бисярина, Л. Х. Либерман, В. Р. Винокуров, Г. Н. Мильштейн, В. Е. Герамидзе, Ф. М. Кириллова, Р. Габасов, И. Я. Кац, А. И. Климушев, А. Б. Куржанский, А. Г. Альбрехт, В. Б. Лидский. В Свердловске опубликована работа Майзеля, которая получила широкую известность и дальнейшее развитие за рубежом (Массера, Шеффер), а также монографии И. Г. Малкина, Н. Н. Красовского и Е. А. Барбашина.

В Алма-Ате, после переезда сюда представителя Казанской школы К. П. Персидского, работы по обыкновенным дифференциальным уравнениям ведутся в широком плане.

К. П. Персидский хорошо известен своими работами по теории устойчивости. Многие его постановки задач, результаты и методы прочно вошли в теорию дифференциальных уравнений. Он первый поставил и при некоторых условиях разрешил вопрос о существовании функции Ляпунова, устойчивости характеристических чисел Ляпунова, при вариациях правых частей уравнений, равномерной устойчивости, о свойствах правильных систем, дал метод сектора и т. д. Ведущим и основным направлением работ в Алма-Ате является теория устойчивости конечных и бесконечных ⁴² систем обыкновенных дифференциальных уравнений, а также ее приложения к уравнениям в частных производных. К. П. Персидский развернул работу по изучению уравнений в общих нормированных пространствах. Еще до войны ученик Персидского В. П. Марачков (погиб на фронте) начал интересные работы по почти периодическим решениям. К настоящему времени здесь подготовлено К. П. Персидским 30 кандидатов. Доктором и академиком АН КазССР стал О. А. Жаутыков. В. Х. Харасахал в последние годы развернул работы по линейным уравнениям с квазипериодическими коэффициентами и почти периодическим решениям нелинейных дифференциальных уравнений. Здесь выросли такие ученые, как С. И. Горшин, Х. И. Ибрашев, О. Т. Матуцина, Ш. М. Еникеев, Ю. Г. Золотарев, Б. Тулегенов, М. Я. Ятаев, С. К. Персидский, Д. Курмашев, Г. Даиров, Е. И. Дыхман, А. К. Бедельбаев, Г. Н. Багаутдинов, М. Р. Ретов, Е. П. Ефремов, О. А. Хаймульдин, У. К. Калижанов, Д. Р. Шариева, Г. П. Узakov, Д. У. Улебежданов, Р. К. Кудаков, К. Д. Шоинбеков, К. П. Канишев, Ж. Баймуканов и др.

Работы по обыкновенным дифференциальным уравнениям начались с 1947 г. и в Самарканде, куда переехал на работу воспитанник Московского семинара И. С. Куклес.

И. С. Куклес до переезда в Самарканд исследовал проблему центра-фокуса, изохронность колебаний, а также развивал метод Фроммера в качественной теории систем двух дифференциальных уравнений (хорошо известны условия центра, полученные Куклесом и используемые другими учеными). В этом направлении продолжались работы и в



И. Г. Малкин.

⁴² Как уже было отмечено, бесконечные системы впервые начал рассматривать А. Н. Тихонов.

Самарканде как самим И. С. Куклесом, так и его учениками. Здесь исследовалась проблема различения центра-фокуса (И. С. Куклес, Х. Р. Рахимов, И. И. Широ, Н. Н. Николаева, Т. Н. Нуров), развивался метод Фроммера для решения задачи о возможных порядках кривизны интегральных кривых, входящих в особую точку (И. С. Куклес, А. Н. Берлинский, Х. Р. Латипов, Ш. Р. Шарипов, М. Хасанова, И. В. Хайрутдинова).

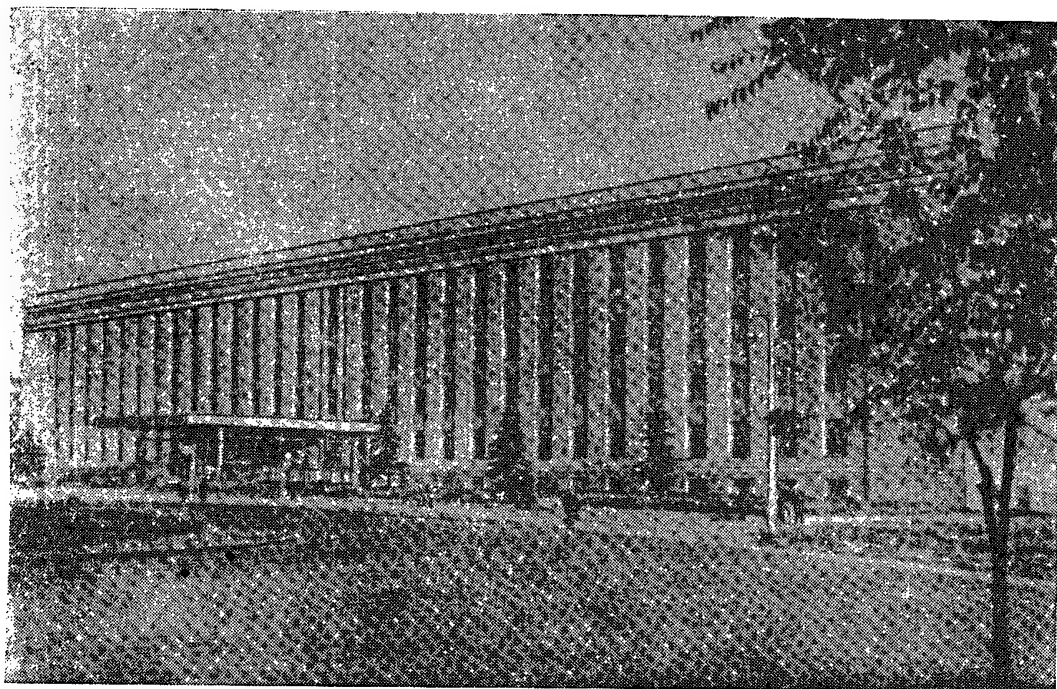
А. Н. Берлинский начал рассматривать вопрос об особых точках, когда правые части системы $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ — полиномы второй степени. Изучались всевозможные топологические картины в целом, когда P и Q — полиномы, качественная теория поверхностей, определяемых уравнениями Пфаффа, поведение интегральных кривых в трехмерном пространстве, проблема изохронности, применение качественной теории к изучению вынужденных колебаний и другие вопросы. Уравнения Пфаффа изучали И. С. Куклес и П. Л. Хаимова.

В Ташкенте с 1936 г. работает И. С. Аржаных. После войны, с 1946 г. он и его ученики весьма интенсивно работают в области механики, а также в области обыкновенных дифференциальных уравнений: по проблемам точных и приближенных методов интегрирования, теории устойчивости, по приложениям к механике и теоретической физике. Здесь построена теория так называемых уравнений ранга, большего нуля

$$\dot{q}_\nu = \frac{\partial H}{\partial p_\nu} + \sum_{\rho=1}^r F_\rho \frac{\partial H_\rho}{\partial p_\nu}, \quad \dot{p}_\nu = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu} - \sum_{\rho=1}^r F_\rho \frac{\partial H_\rho}{\partial q_\nu}, \quad (96)$$

являющихся более общими, чем известные канонические уравнения (ранга, равного нулю при $F_\rho = 0$). Показано, что любая система четного порядка может быть рассматриваема, как и система вида (96). Развита теория функций от некоторой гиперкомплексной независимой переменной и с помощью этого — теория интегрирования уравнений Лагранжа и систем Пфаффа. Для произвольной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с правыми частями, допускающими частные производные первого порядка, построена теория интегральных скобок, обобщающая теорему Пуассона. Для таких же систем обобщена теорема Бендиксона: в области, где $\text{div } \vec{F}$ сохраняет знак, не могут располагаться интегральные поверхности так, чтобы их части составляли замкнутые поверхности.

В Ташкенте разрабатывалась и теория приближенного интегрирования. Велись работы по построению неравенств, обеспечивающих асимптотическую устойчивость, порождаемую первым приближением. Общая теория интегрирования уравнений применялась в механике как в вопросах, выясняющих характер решения и его устойчивость, так и в методах интегрирования голономных, неголономных и неконсервативных систем. Наиболее существенные результаты получены по теории поля импульсов, по приложению теории групповых комплексов к интегрированию уравнений Лагранжа, по интегрированию с помощью рядов Ли уравнений механики, по использованию групп Ли. Теория им-



Воронежский государственный университет.

пульсов применена к задачам о движении элементарных частиц и получены формулы для вычисления сил, создаваемых этими частицами. В Ташкенте работают А. Н. Филатов, О. И. Самуэль, А. Ходжаев, Х. Дурдыев, А. Алимов, А. У. Каримов.

В Воронеже с 1952 г. начинает работать семинар под руководством М. А. Красносельского, а затем, с 1954 г. — и С. Г. Крейна. Характерным для воронежской группы является развитие новых методов исследования в теории дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и в частных производных). Эти новые методы опираются на функциональный анализ, топологию и изучение дифференциальных уравнений в обобщенных пространствах. Здесь рассматриваются вопросы теории периодических решений и их устойчивость, ограниченные и почти периодические решения, общие вопросы качественной теории в банаховых пространствах, зависимость решений от параметра, краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, сингулярная задача Коши, метод малого параметра и асимптотические разложения, теоремы о дифференциальных неравенствах, единственность и продолжимость решений, устойчивость и колеблемость решений линейных систем, многомерные дифференциальные уравнения.

Остановимся на некоторых из этих работ ⁴³. Первые результаты в теории периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений были получены М. А. Красносельским в 1956—1957 гг. Он изучал как автономные, так и неавтономные системы дифференциальных

⁴³ Обзор работ воронежских математиков написал В. В. Стрыгин.

уравнений второго порядка. Задача о периодических решениях сводится им либо к проблеме существования неподвижных точек у некоторых нелинейных вполне непрерывных операторов (в случае неавтономных систем), либо к проблеме существования собственных элементов у нелинейного оператора (в случае автономных систем). После этого применяются общие методы нелинейного функционального анализа. На этом пути получен ряд нелокальных теорем существования периодических решений. Особый интерес, как нам кажется, представляют теоремы, в которых даны признаки существования в $2n$ -мерном фазовом пространстве одной или нескольких двумерных поверхностей, составленных из периодических решений. В частности, описываются условия, при которых такие поверхности существуют в окрестности особой точки.

М. А. Красносельским и А. И. Перовым предложен (1958 г.) метод направляющих функций для доказательства существования периодических решений. Главная идея этого метода заключается в том, что основные топологические характеристики операторов сдвига по траекториям дифференциальных уравнений могут быть вычислены по простым неравенствам, которым удовлетворяют правые части обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод направляющих функций получил дальнейшее развитие в 1958—1964 гг. в работах М. А. Красносельского, А. И. Перова и В. В. Стрыгина. Полное изложение и ряд новых результатов даны в монографии М. А. Красносельского «Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений» (1966 г.).

Следующий цикл теорем о периодических решениях связан с использованием теории банаховых пространств с конусом для изучения операторов сдвига. Эта теория позволила совсем просто получить разнообразные признаки существования положительных периодических решений. В некоторых случаях указаны и оценки числа таких решений. Первые теоремы были получены в монографии М. А. Красносельского «Положительные решения» (1962 г.), где изложены также результаты (1962—1965 гг.) Ю. С. Колесова и М. А. Красносельского.

Для исследования устойчивости периодических решений Красносельским был предложен новый прием. Он формулируется в виде следующего общего принципа: если в окрестности начального значения периодического решения оператор сдвига по траекториям дифференциального уравнения вогнут, то периодическое решение устойчиво по Ляпунову; если оператор сдвига выпуклый, то периодическое решение неустойчиво. Оказалось, что вогнутость или выпуклость оператора сдвига просто проверяется по правым частям дифференциальных уравнений. Поэтому из общего принципа могут быть получены вполне обобщимые признаки существования устойчивых и неустойчивых периодических решений. Интересные применения общий принцип получил в одной работе М. А. Красносельского (1963 г.) при исследовании устойчивости периодических решений, рождающихся из состояния равновесия. Результаты Красносельского развил дальше (1965 г.) Т. Сабилов, который детально изучил более сложные случаи. Им, в частности, был обнаружен эффект влияния кратности мультипликаторов линейри-

зованных систем на устойчивость периодических решений, рождающихся из состояния равновесия.

Методы, основанные на изучении оператора сдвига, применимы и в задачах о периодических решениях уравнений в функциональных пространствах. Ряд результатов получен М. А. Красносельским, П. Е. Соболевским, Ю. С. Колесовым и Ю. Г. Борисовичем.

В 1961 г. М. А. Красносельский и А. И. Перов предложили общие принципы существования ограниченных на всей оси решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В приложениях к анализу конкретных систем принцип Красносельского — Перова в ряде случаев приводит к теоремам, близким к следствиям из известного топологического принципа Важевского. Применение принципа Красносельского — Перова часто более удобно, так как оно требует лишь проверки скалярных неравенств. Красносельский и Перов указали ряд признаков существования положительных ограниченных решений.

А. И. Перов предложил (1960 г.) новый принцип существования и единственности неподвижной точки в связи с теорией ограниченных решений. Он указал также общие условия существования почти периодических решений.

В. Ш. Бурд исследовал (1964—1965 гг.) зависимость почти периодических решений от параметра в критических случаях. Как хорошо известно, задача о почти периодических решениях обыкновенных дифференциальных уравнений может быть сведена к изучению некоторого операторного уравнения в пространстве почти периодических функций. При этом операторы, входящие в соответствующие уравнения, не обладают свойством полной непрерывности. Более того, исследование критических случаев приводит к бифуркационным значениям параметров, принадлежащих непрерывному спектру некоторых нелинейных операторов. В. Ш. Бурд нашел условия, при которых нелинейные операторы теории почти периодических решений имеют такие подпространства, где упоминавшиеся выше линейные операторы обладают дискретным спектром. После этого исследование зависимости почти периодических решений от параметра становится сравнительно простой задачей.

Принципы двойственности по терминологии М. А. Красносельского для различных классов уравнений были установлены в последние пять лет М. А. Красносельским, В. В. Стрыгиным и Е. А. Лифшицем. Эти принципы нашли применения при исследовании задач о периодических решениях общих эволюционных уравнений, в частности уравнений с запаздывающим аргументом. Вопрос о существовании периодических решений уравнений с отклоняющимися аргументами изучался также Ю. Г. Борисовичем, который применял метод Н. Н. Красовского.

Общие вопросы качественной теории исследовались в Воронеже в основном в связи с теорией дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. По существу были получены основополагающие результаты. Интересным является тот факт, что многие общие теоремы оказались новыми уже для случая конечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.



Ю. Г. Борисович.

Первая совместная работа М. А. Красносельского и С. Г. Крейна (1956 г.) была посвящена условиям единственности и нелокальной продолжаемости решений дифференциальных уравнений. Другие теоремы единственности и нелокальной продолжаемости указаны А. И. Перовым, Б. Н. Садовским, М. А. Красносельским, С. Г. Крейном, А. В. Кибенко.

Значительные трудности возникли при построении общей теории нелинейных дифференциальных уравнений с неограниченными операторами в банаховых пространствах. Первые результаты были получены в 1956 г. М. А. Красносельским, С. Г. Крейном и П. Е. Соболевским. Далее эти вопросы изучались в работах П. Е. Соболевского, Я. Д. Мамедова, М. А. Красносельского. Полученные при этом результаты показали, что методы теории обыкновенных дифференциальных

уравнений в сочетании с идеями функционального анализа позволяют совсем просто изучить трудные вопросы некоторых краевых задач математической физики. Так, М. А. Красносельский и П. Е. Соболевский изучили структуру для обыкновенного дифференциального уравнения в банаховом пространстве и в качестве следствия доказали, что смешанная краевая задача для квазилинейного параболического уравнения имеет либо одно, либо бесконечное множество решений.

В работах В. А. Чечика, А. И. Перова, З. И. Гусейнова, Г. А. Бесмертных развита систематическая теория сингулярных дифференциальных уравнений.

Во Фрунзе с 1951 г. начал работать Я. В. Быков (докторант В. В. Немыцкого). До 1965 г. и он и его ученики проводят исследования в области интегро-дифференциальных уравнений. Они решают многие задачи, аналогичные тем, которые рассматривались в теории обыкновенных дифференциальных уравнений: об аналитической структуре решений в окрестности особой точки, теории уравнений с малым параметром при старшей производной, ограниченных периодических и почти периодических решений, теории устойчивости и другие вопросы. В последние годы ведутся исследования и по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Например, Я. В. Быков изучает системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими и почти периодическими коэффициентами.

Исследования в области дифференциальных уравнений во Фрунзе в последние годы значительно расширились и можно отметить целый ряд молодых математиков, занимающихся этими вопросами.

В Кишиневе с 1954 г. работает К. С. Сибирский, с 1963 г. — Б. А. Щербаков, И. У. Бронштейн. Многие исследования Сибирского

посвящены проблеме центра-фокуса и предельным циклам. Особенно интересной является работа (1966 г.), в которой общие алгебраические методы применяются для установления числа предельных циклов двух дифференциальных уравнений в окрестности точки равновесия, когда правые части суть полиномы. С 1960 г. в Кишиневе под руководством К. С. Сибирского начал работать семинар по качественной теории, участники которого получили серьезные результаты по динамическим системам. Здесь проведена классификация возможных видов движений динамических систем, а также рассмотрена взаимосвязь между этими классами.

И. У. Бронштейн построил теорию общих динамических систем, включающую теорию систем без единственности.

В Ижевске в 1954 г. начал работу семинар под руководством Н. В. Азбелева. Работы ижевских математиков посвящены исследованиям интегральных, дифференциальных и разностных неравенств и построению оценок, получаемых с помощью таких неравенств. Полученные оценки позволили решить ряд вопросов о существовании, единственности и асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений. Большинство результатов основано на «принципе вилки», сформулированном Н. В. Азбелевым в 1956 г. применительно к дифференциальным уравнениям и распространенном на другие уравнения Ю. В. Комленко, З. Б. Цалюком и Ю. С. Шаталовым. Этот простой принцип представляет собой условие, при котором данный оператор Kx отображает некоторое множество в себя и может быть сформулирован в виде следующего обобщения теорем о неравенствах. Пусть оператор Kx задан на частично упорядоченном множестве x со значениями в этом же множестве. Если $K = K_1 - K_2$, $K_i(x_1) > K_i(x_2)$ при $x_1 > x_2$, $i = 1, 2$, то неравенства

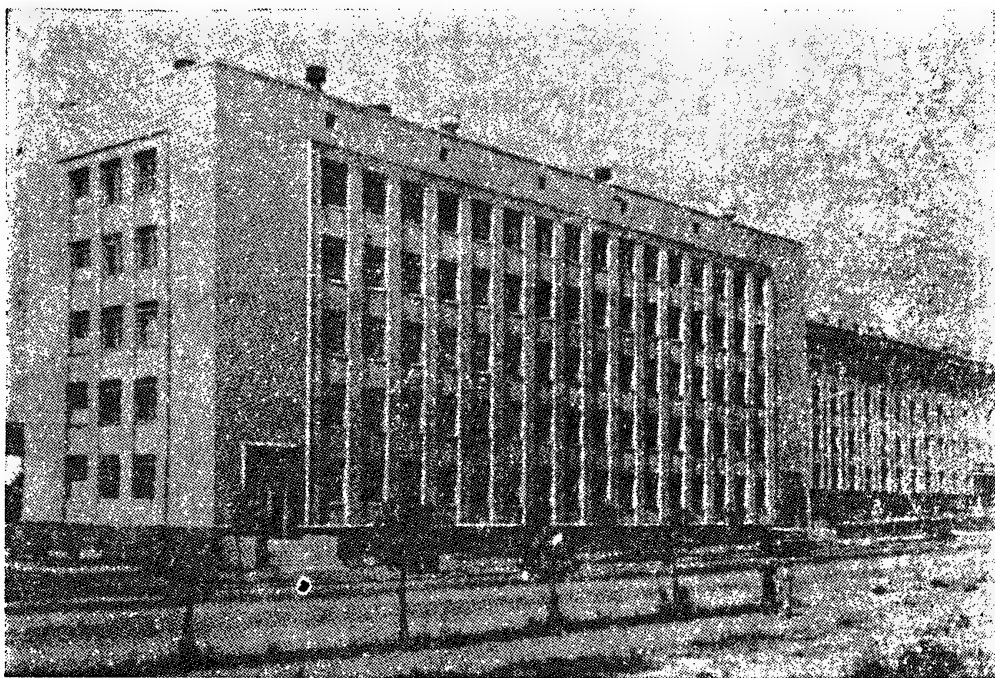
$$z_1 > z_2, \quad z_1 > K_1 z_1 - K_2 z_2, \quad z_2 < K_2 z_1 - K_1 z_2$$

гарантируют неравенства $z_1 > Kx > z_2$ для всех таких $x \in X$, что $z_1 > x > z_2$ (при условии непрерывности Kx последнее утверждение гарантирует в силу теоремы Шаудера о неподвижной точке существование решения уравнения $x = Kx$).

Один из циклов работ, начатых семинаром в 1958 г., посвящен построению эффективных критериев однозначной разрешимости и сохранения знака функции Грина краевых задач для обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений (Н. В. Азбелев, С. А. Пак, А. Л. Тептин, Е. Л. Тонков, А. Я. Хохряков, Е. С. Чичкин).



Н. В. Азбелев.



Институт математики Академии наук Белорусской ССР.

В другом цикле исследований, начатых в 1961 г. (Н. В. Азбелев, А. И. Логунов, Г. К. Рагимханов, Л. Ф. Рахматуллина, А. Б. Самаров, З. Б. Цалюк), рассматриваются задачи общей теории уравнений, описывающих релейные схемы и схемы с обратной связью (уравнения с разрывным оператором и наличием запаздывающего аргумента).

В недавних работах Н. В. Азбелева, Н. В. Касаткиной, Е. Л. Тонкова и З. Б. Цалюка принцип вилки позволил установить новое утверждение о сходимости последовательных приближений. Применительно к урав-

нению $x(t) = \int_0^t K(t, s, x(s)) ds$ это утверждение принимает следующий вид: последовательные приближения сходятся, если $K(t, s, x) = K_1(t, s, x) - K_2(t, s, x)$, K_i не убывают по x и система

$$\begin{aligned} x_1 &= \int_0^t K_1(t, s, x_1(s)) ds - \int_0^t K_2(t, s, x_2(s)) ds, \\ x_2 &= \int_0^t K_2(t, s, x_2(s)) ds - \int_0^t K_1(t, s, x_1(s)) ds \end{aligned}$$

имеет единственное решение.

В Тбилиси исследуются оптимальные процессы, вопросы колеблемости и асимптотического поведения решений. Г. Л. Харатишвили (1961—1964 гг.) разработал метод нахождения функций оптимального управления, нашел необходимое условие оптимальности некоторой системы управления с запаздыванием, для линейной системы управления нашел

структуру оптимального управления с запаздыванием, доказал единственность оптимального управления и соответствующей траектории.

И. Т. Кигурадзе нашел условия колеблемости и неколеблемости решений уравнения

$$\frac{d^m u}{dt^m} + F(t, u)u = 0$$

и его частных случаев, получил асимптотику поведения неколеблющихся решений этого уравнения, асимптотику поведения решений уравнения

$$\frac{d^m u}{dt^m} \sum_{k=1}^m a_k(t) \frac{d^{m-k} u}{dt^{m-k}} = 0.$$

Для уравнения

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

он рассматривал вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши в точке a :

$$x^{(i)}(a) = x_{0i+1} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

если при любом $\delta > 0$ в области

$$a + \delta \leq t \leq b, \quad |x_i - x_{i0+1}| \leq r_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

выполнено условие Каратеодори и некоторые другие условия. Рассмотрен вопрос о существовании и свойствах решений задачи

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x(a) = x_0,$$

где x и x_0 — векторы, а $f(x, t)$ — некоторая сингулярная в окрестности точки $t = a$ вектор-функция. Рассмотрена также система

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu),$$

содержащая параметр μ .

В Ереване опубликована интересная серия работ М. М. Джрбашяна (1960—1961 гг.) и А. Б. Нерсисяна по теории разложений в ряд по собственным функциям краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений с производными дробного порядка и по собственным функциям краевых задач уравнений с запаздывающим аргументом.

И. С. Саргсян изучал (1955—1957 гг.) вопросы дифференцируемости разложений по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля.

В Минске с 1946 г. по 1957 г. работал М. И. Минкевич. Он рассматривал вопросы об интегральных воронках в обобщенных динамических системах без предположения единственности. С 1956 г. здесь работает Н. П. Еругин, с 1959 г. — Ю. С. Богданов, Н. А. Лукашевич, А. И. Яблонский, Э. И. Грудю, А. П. Воробьев, Н. Н. Виноградов, с 1964 г. — В. Н. Лаптинский и Н. А. Изобов, а с 1965 г. — В. Г. Скатецкий. С исследованиями ученых Минска связаны работы П. Б. Голоквочюса (Вильнюс) и Б. П. Богословского (Вологда).



Н. И. Гаврилов.

В Минске исследуются во многих направлениях линейные системы с периодическими, почти периодическими и общего вида непрерывными коэффициентами, линейные системы, содержащие малый параметр. Рассматриваются качественные вопросы нелинейных дифференциальных уравнений с разных точек зрения. Большой цикл работ выполнен и по аналитической теории нелинейных систем дифференциальных уравнений в разных направлениях. Работы А. Я. Хохрякова, Б. М. Архипова (Могилев) и А. М. Колобова связаны с тематикой ижевского семинара.

С января 1965 г. в Минске начал выходить ежемесячный Всесоюзный журнал «Дифференциальные уравнения».

В Харькове работает сейчас А. Д. Мышкис. Его исследования в теории обыкновенных дифференциальных уравнений,

относящиеся к разным вопросам этой теории, были рассмотрены выше. В Одессе в области теории обыкновенных дифференциальных уравнений работают со своими учениками М. Г. Крейн и Н. И. Гаврилов.

М. Г. Крейну принадлежат исследования в теории систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и в теории прямых и обратных спектральных проблем. Результаты его работ о так называемых мультипликаторах имеют значение в решении проблемы устойчивости. Проблеме устойчивости решений различных классов дифференциальных уравнений посвящены и некоторые другие исследования М. Г. Крейна.

Ряд работ Н. И. Гаврилова посвящен новому методу нахождения и исследования одного класса нелинейных дифференциальных уравнений. Этот метод основан на теории моментов и аналитической теории непрерывных дробей. Он дает возможность исследовать решение в целом, и в частности изучать его асимптотические свойства.

Н. И. Гаврилов получил весьма общий критерий устойчивости по Ляпунову решения $(x_i = 0)$ системы n линейных дифференциальных уравнений, позволяющий обнаружить устойчивость при наличии произвольного количества характеристических чисел системы, равных нулю. Он нашел также критерий устойчивости по Ляпунову решения $(x_i = 0)$ одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений. Этот критерий дает возможность обнаружить устойчивость и тогда, когда решения имеют вид $O\left(\frac{1}{t^p}\right)$, $p \geq 0$, т. е. при наличии в соответствующей линейной системе характеристических чисел, равных нулю. В последнее время Н. И. Гаврилов занимается применением качест-

венной теории дифференциальных уравнений к изучению расположения корней ζ -функции Римана.

В Донецке в настоящее время работает Я. Б. Лопатинский. Он является автором нескольких работ по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, в одной из своих первых работ Лопатинский доказал теорему существования решения для обыкновенного дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ при очень общих предположениях относительно функции $f(x, y)$.

Большинство же работ Я. Б. Лопатинского относится к теории дифференциальных уравнений в частных производных и к алгебре.

Во Львове исследования по теории дифференциальных уравнений, в том числе обыкновенных, ведет В. Я. Скоробогатько и участники руководимого им семинара. В частности, в 1962—1964 гг. В. Я. Скоробогатько и Е. И. Бобик нашли необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Валле-Пуссена для линейного дифференциального уравнения n -го порядка в произвольном интервале изменения аргумента и аналогичные достаточные условия для нелинейного дифференциального уравнения также любого порядка. В последнее время во Львове развивается теория «ветвящихся цепных дробей», которая, в частности, применена к интегрированию некоторых дифференциальных уравнений лавинных процессов.

В Черновцах в теории дифференциальных уравнений нелинейной механики и уравнений с отклоняющимся аргументом работает В. П. Рубаник.

В Риге интересные исследования по качественной теории системы n (≥ 3) дифференциальных уравнений ведет Л. Э. Рейзинь.

В Вильнюсе проводит исследования П. Б. Голоквощюс по качественной теории линейных систем с периодическими коэффициентами.



В. Я. Скоробогатько.

19

Итоги и перспективы

Подводя итоги развития теории обыкновенных дифференциальных уравнений в нашей стране за 50 лет, мы можем выделить условно в этом развитии четыре периода.

Первый период — с 1917 г. до 1931—1932 гг. В это время под влиянием работ Биркгофа зарождалась московская школа, под влиянием работ Пуанкаре и Ляпунова — горьковская школа. Начались

исследования киевской школы. Л. И. Мандельштам и А. А. Андронов вызвали интерес к качественной теории дифференциальных уравнений. И. А. Лаппо-Данилевский в 1926—1930 гг. создал свой метод исследования в аналитической теории дифференциальных уравнений.

Второй период — с 1931—1932 гг. до 1941 г. С 1931 г. начался активный творческий этап в работе московской, горьковской и киевской школ. В 1932—1934 гг. были изучены работы И. А. Лаппо-Данилевского, изданы его труды и начаты исследования, развивающие его идеи. С 1931 г. теорией устойчивости движения активно занимается казанская школа. С. А. Чаплыгин установил хорошо известные неравенства для решений дифференциальных уравнений. Московская школа намного расширила содержание теории общих динамических систем. На основании этой теории были решены интересные задачи в теории дифференциальных уравнений. Большое число новых задач качественной теории дифференциальных уравнений было поставлено и решено горьковской школой. Киевская школа разрабатывала асимптотические методы дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр. Представители казанской школы успешно развивали второй метод Ляпунова для локальной устойчивости, рассмотрели ряд сомнительных случаев (в первом приближении линейная система имеет нулевые характеристические числа Ляпунова) и разрешили многие прикладные задачи.

В Ленинграде был решен уже ряд очень трудных задач по аналитической теории линейных дифференциальных уравнений.

Третий период — с 1941 г. по 1957 г. Несмотря на трудности военного времени, исследования в области обыкновенных дифференциальных уравнений продолжались в разных научных центрах страны. В послевоенное время работы возросли с новой силой.

В октябре — ноябре 1942 г. Н. П. Еругиным была построена теория приводимых систем, где соединились идеи Ляпунова и Лаппо-Данилевского. В 1946 г. была опубликована отдельная книга, которая положила начало многим работам в разных направлениях как по постановке задач, так и по методам.

В 1945 г. вышла из печати монография Н. Н. Боголюбова, в которой было по-новому определено на ближайшее двадцатилетие развитие асимптотических методов в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теперь нелегко сделать обзор работ, которые были определены постановкой задач и методами их решения в этой книге. Интересно отметить, что ученым Боголюбов стал в 16 лет. Имея формально образование только за 7 классов, он публикует несколько научных работ по теории дифференциальных уравнений, требующих знания всего университетского математического курса. Через два года (в 1927 г.) он получает степень доктора honoris causa от Болонской академии наук, а вскоре (в 1930 г.) и от Украинской Академии наук.

В 1942 г. получили развитие работы И. З. Штокало по линейным дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами, в которых впервые были построены методы решения вопросов устойчивости и оценок решения линейных систем дифференциальных уравнений с квази-

периодическими и почти периодическими коэффициентами. В 1947 г. была опубликована книга К. П. Персидского «О характеристических числах дифференциальных уравнений», в которой поставлен и разрешен ряд задач, ставших исходными во многих последующих работах (теория правильных систем, устойчивость характеристических чисел Ляпунова линейных систем при вариациях коэффициентов).

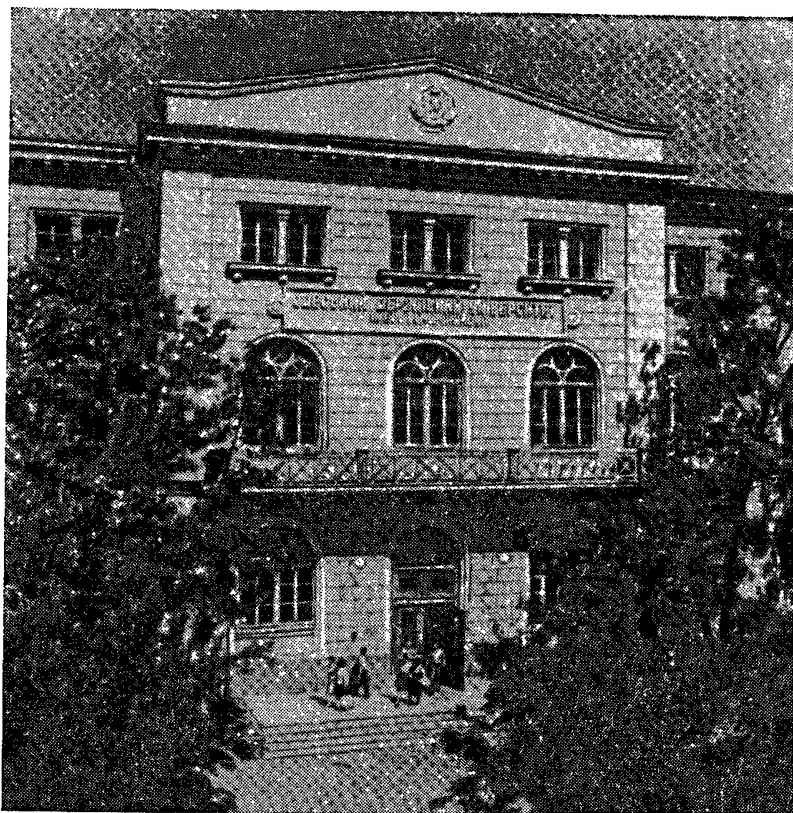
В Ленинграде в 1947—1956 гг. развернулись работы по многим направлениям теории устойчивости, качественной теории, общей теории дифференциальных уравнений, качественной теории и устойчивости в целом, во всей области задания правых частей дифференциальных уравнений. Этой тематикой стали заниматься и ученые Свердловска под руководством Е. А. Барбашина. Здесь в короткий срок стал крупным ученым Н. Н. Красовский — ученик Е. А. Барбашина, а затем — Четаева. Характерной чертой работ свердловчан в теории устойчивости является соединение классической, ляпуновской теории устойчивости движений с тонкой теорией дифференциальных уравнений, с топологическими методами. Появилась серия теорем обращения теорем второго метода Ляпунова как локальных, так и в целом (существование функций Ляпунова, разрешающих задачу устойчивости решения в целом). Широко рассматривались задачи устойчивости при вариации правых частей уравнения, применимости второго метода, вопросы качественной теории локальной и в целом, существование периодических решений и т. д.

Появилась книга В. В. Немыцкого и В. В. Степанова «Качественная теория дифференциальных уравнений», изданная в 1947 г. и 1949 г. и переведенная впоследствии в США. Трудно переоценить роль этой книги в образовании и развитии теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Руководитель киевской школы Н. Н. Боголюбов все больше углубляется в теоретическую физику, но появляется продолжатель асимптотических методов, ученик Н. Н. Боголюбова — Ю. А. Митропольский.

Тематика работ московских математиков расширяется под влиянием исследований ученых Ленинграда, Свердловска, Киева, Казани. Надо отметить и выдающуюся организаторскую роль в этот период Н. Г. Четаева и журнала «Прикладная математика и механика» в развитии теории устойчивости и общей теории дифференциальных уравнений. Нам представляется, что не будь Н. Г. Четаева, мы не имели бы того большого развития теории обыкновенных дифференциальных уравнений, какое наблюдалось в этот период. Невозможно здесь не сказать и о Н. А. Таллицких, большую роль которого в работе часто отмечал Н. Г. Четаев.

После 1951 г. в Ленинграде были разработаны новые методы решения задач аналитической теории нелинейных дифференциальных уравнений, позволяющие намного расширить содержание аналитической теории дифференциальных уравнений. А. Д. Мышкис начиная с 1950 г. развернул теорию дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, и это направление стало привлекать внимание многих математиков. А. Н. Тихонов в 1948 г. начал рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения с малым параметром при старшей



Одесский государственный университет им. И. И. Мечникова.

производной, что в короткий срок выросло в большое направление исследований.

Еще в 1934 г. А. Н. Тихонов начал изучать бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. А с 1948 г. под руководством К. П. Персидского счетные системы стали разрабатываться систематически всей алма-атинской школой, и теперь это также является большим направлением в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта теория совместно с методами Боголюбова и Галеркина в последнее время применяется и к уравнениям математической физики в частных производных.

С 1952 г. в Воронеже начал работать семинар под руководством М. А. Красносельского, где ведется работа по построению новых методов исследования на основе топологии и теории дифференциальных уравнений в обобщенных пространствах.

Наконец, *четвертый период* — с 1957 г. до наших дней. В этот период в Москве и в Свердловске была разработана (наряду с зарубежными учеными) теория оптимальных процессов (Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Н. Н. Красовский, Е. А. Барбашин, А. М. Летов и др.) развернулась теория ограниченных решений гамильтоновых систем (А. Н. Колмогоров, В. И. Арнольд). Изучалась в разных направлениях — качественная теория, аналитиче-

ская теория и асимптотика многомерных систем дифференциальных уравнений в Москве, Горьком, Вильнюсе, Ленинграде (Л. Э. Рейзинь, А. Д. Брюно, Э. М. Вайсборд, Д. М. Гробман, Д. М. Груз, Х. Р. Латилов, Д. В. Маневич, Р. М. Минц, В. В. Немыцкий, П. Н. Папуш, А. А. Шестаков, Л. П. Шильников, В. П. Басов, А. Н. Еругин, Э. И. Грудо).

В Ленинграде (В. А. Плисс) была изучена качественная картина системы Айзермана в целом в трехмерном пространстве и началось применение в теории периодических решений топологических методов Картрайт. Серьезные исследования проведены в диссипативных системах. В этот период намного был усилен метод Фроммера для особых точек первой группы (А. Ф. Андреев, И. С. Куклес). Для особых точек второй группы метод исследования создан А. Н. Еругиным.

В Киеве расширилась тематика исследований киевской школы и вырос большой коллектив молодых ученых.

В Свердловске развернулось изучение уравнений с запаздывающим аргументом (Н. Н. Красовский, Е. А. Барбашин, С. Н. Шиманов), оптимальных процессов (Н. Н. Красовский), теории управления (Н. Н. Красовский, Е. А. Барбашин). Становятся научными центрами в области обыкновенных дифференциальных уравнений Ижевск, Кишинев. Крупные специалисты в этой области появились в Тбилиси.

В Минске раньше не велись работы по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Теперь, начиная с 1957 г. здесь проведены исследования по качественной теории локальной и в целом (Н. Н. Виноградов, А. П. Воробьев, Л. А. Черкас, Н. А. Лукашевич), периодическим решениям (В. С. Виноградов, Л. М. Воробьев, Л. А. Черкас, Н. А. Лукашевич, Ю. С. Богданов, Н. П. Еругин, А. И. Яблонский), линейным системам с периодическими и почти периодическими коэффициентами (Н. П. Еругин), многозначным решениям (Л. А. Черкас), аналитической теории дифференциальных уравнений с неподвижными особыми точками (Э. И. Грудо), аналитической теории нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками, которая приняла здесь новый характер (Н. П. Еругин, А. И. Яблонский, Н. А. Лукашевич, Л. М. Воробьев, Б. П. Богословский (Вологда)), теории предельных циклов (Н. А. Лукашевич, Л. А. Черкас, А. И. Яблонский), дифференциальным и интегро-дифференциальным уравнениям с запаздыванием (Э. И. Грудо), теория характеристических чисел линейных систем. Впервые разработана теория характеристических чисел нелинейных дифференциальных уравнений (Ю. С. Богданов, Н. А. Изобов).

Большим научным центром стал в последний период и Воронеж, где под руководством М. А. Красносельского и С. Г. Крейна ведутся работы по функциональному анализу и приложениям его к теории дифференциальных уравнений. Под руководством В. В. Немыцкого велись серьезные работы и в Рязани.

Таким образом, после войны у нас возникло много научных центров в области обыкновенных дифференциальных уравнений: Свердловск, Минск, Кишинев, Ижевск, Воронеж, Рига, Тбилиси, Алма-Ата, Фрунзе, Ташкент, Рязань, Самарканд. Что же касается Москвы,

Ленинграда и Киева, то большими научными центрами они были и до войны.

За пятьдесят лет развития советской математики в области обыкновенных дифференциальных уравнений были созданы или исследованы:

1) новые методы исследований в аналитической теории линейных, а затем нелинейных систем;

2) глубокая асимптотика как относительно малых и больших параметров, так и больших значений независимой переменной в теории нелинейных колебаний, аналитической теории нелинейных дифференциальных уравнений и линейных систем;

3) общая теория динамических систем;

4) теория устойчивости и качественная теория в большом;

5) теория уравнений с малым параметром при старшей производной;

6) теория счетных дифференциальных уравнений;

7) приложение топологии и функционального анализа к теории дифференциальных уравнений, в частности топологическая классификация особых точек в n -мерном пространстве;

8) теория бифуркаций;

9) новый метод анализа устойчивости гамильтоновых систем;

10) теория дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Часть из этих достижений является новыми направлениями, например асимптотика, теория уравнений с малым параметром при старшей производной, теории счетных систем, приложение функционального анализа к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Теория линейных систем дифференциальных уравнений изучалась со времен Фукса. И казалось, что после работ Пуанкаре, Хорна, Биркгофа здесь делать нечего. Но в работах Лаппо-Данилевского старые задачи получили явное алгоритмическое решение и смысл их стал другим. Например, в работах Пуанкаре ставилась задача определения характеристических чисел показательной постановки W интегральной матрицы $x = (z - a)^W \bar{x}(z - a)$, где $\bar{x}(z - a)$ — однозначная в окрестности $z = a$, характеризующей многозначную особенность в окрестности особой точки $z = a$. В работах же Лаппо-Данилевского ставятся задачи нахождения W как функции дифференциальных подстановок матриц $U_1, \dots, U_m$, $W = W(U_1, \dots, U_m)$ во всей области существования и выяснения природы этой функции. О такой задаче ранее, до развитого Лаппо-Данилевским аппарата, казалось, невозможно было и мечтать.

Мы видели, что эта задача у нас получила полное решение как в случае регулярной системы, так и в случае иррегулярной. Также полнее формулировались Лаппо-Данилевским и остальные задачи. И многие из них решены.

В аналитической теории нелинейных дифференциальных уравнений для решений уравнений Пенлеве найдено общее представление во всей области их существования. Установлена классификация решений этих уравнений, даны признаки вхождения этих решений в тот или иной класс, найдена асимптотика расположения подвижных особых точек, для некоторых из этих уравнений построена качественная картина располо-

жения вещественных решений. Построены методы исследования намного более общих систем, отсеянных ранее Пенлеве и его продолжателями. Для многих из этих систем показано, в каких случаях решения таких систем могут быть выражены через трансцендентные Пенлеве и когда это невозможно. Построена аналитическая теория некоторых интегро-дифференциальных уравнений, дифференциальных весьма общего вида и с функциональным запаздыванием.

В нашей стране отлично представлены теория оптимальных систем, теория управления. Очень важны, конечно, и работы зарубежных ученых, таких, например, как Беллман, Сансоне, Лефшец, Фукухара, Курцвейль, Важевский, Литтлвуд и многие другие. Интересны работы и М. М. Картрайта по ограниченным, периодическим, почти периодическим решениям, основанные на тонких топологических основаниях.

В ближайшие годы будут продолжаться работы по всем направлениям теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Будут рассматриваться вопросы устойчивости, ограниченности и асимптотического поведения решений. Исследователи будут искать критерии существования и способы построения периодических и почти периодических решений. Надо ожидать, что будут развиваться топологические методы в стиле М. Картрайт. Будет расширен класс уравнений, охватываемых методами функционального анализа. Весьма перспективными являются многосторонние задачи теории управления и методы их исследования. Новая классификация решений и уравнений, проводимая в аналитической теории (Минск), также, вероятно, будет развиваться весьма активно.

Асимптотика как по времени, так и по параметру будет, конечно, также привлекать внимание многих ученых. Постоянно будут изучаться поведение решений и качественная картина в целом.

Системы с запаздыванием или измененным аргументом будут рассматриваться с разных точек зрения: поведение решений в целом, их аналитическая структура, свойства и т. д. Появятся и новые задачи (как в последнее время появились задачи теории управления) или видоизмененные старые (как гамильтоновы или новый подход в аналитической теории).

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Цель настоящей главы — изложить в общих чертах историю развития теории уравнений с частными производными за период с 1917 г. и, по возможности, до настоящего времени. Большую помощь при ее составлении оказали автору участники ленинградского семинара по уравнениям с частными производными В. М. Бабич, М. Ш. Бирман, В. С. Булдырев, В. С. Буслаев, О. А. Ладыженская, В. Г. Мазья, Б. С. Павлов, М. М. Смирнов, Х. Л. Смолицкий, М. З. Соломяк, Д. М. Эйдуc. Обширные материалы по теме главы получены от М. С. Аграновича. О. А. Ладыженская предоставила автору главы свою рукопись «Очерк по истории развития теории уравнений с частными производными в Советском Союзе», Г. И. Дринфельд написал раздел, посвященный дифференциальным уравнениям первого порядка. А. Д. Александров прислал материал о геометрических методах в теории уравнений с частными производными. И. Г. Петровский прочитал рукопись и сделал ряд замечаний и ценных предложений.

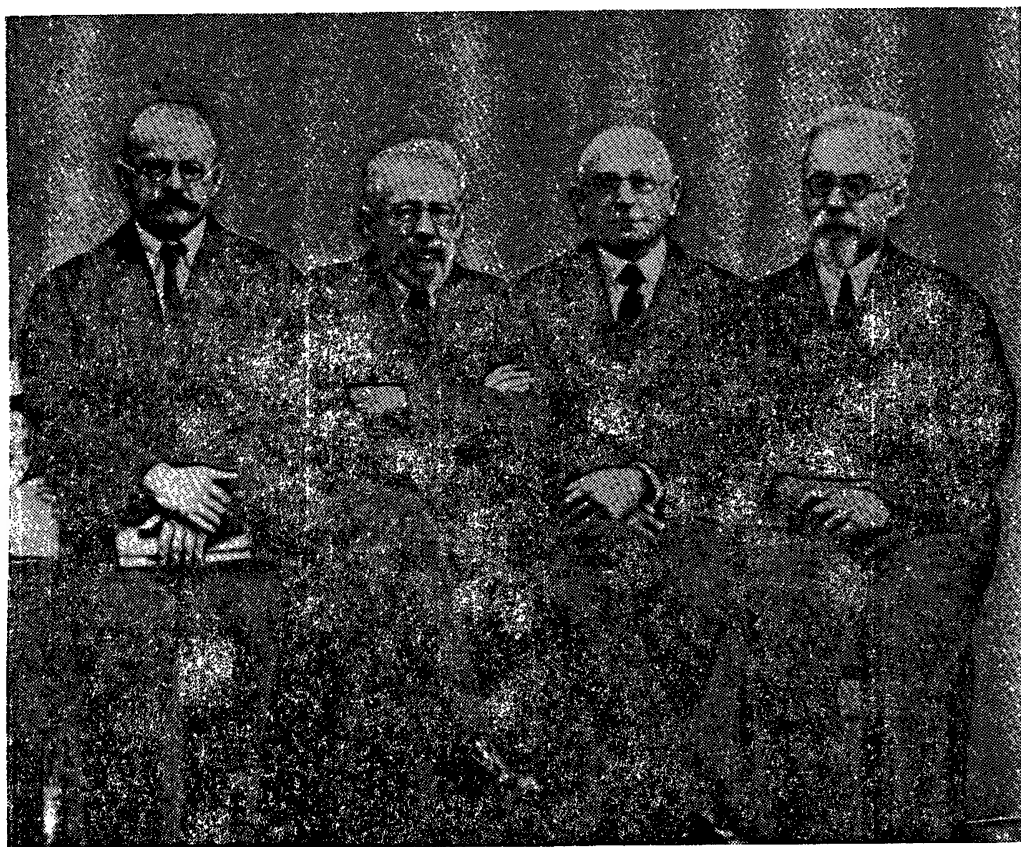
Общие вопросы

1

Введение

Длительное время теория уравнений с частными производными была тесно связана с задачами физики (математическая физика) и касалась лишь уравнений определенных типов. В настоящее время обширные разделы упомянутой теории носят чисто математический характер. В связи с этим нами излагается в основном математическая часть теории; последний раздел посвящен некоторым принципиально важным задачам математической физики.

Первый, вводный, раздел содержит изложение тех новых точек зрения и новых методов, которые характеризуют современную теорию уравнений с частными производными, и в нем будем опираться на работы, характерные в этом отношении. В остальных разделах излагаются проб-



Р. О. Кузьмин, Н. М. Гюнтер, С. Н. Бернштейн, М. Л. Франк.

лемы и результаты, носящие более конкретный характер. Второй, третий и четвертый разделы посвящены соответственно уравнениям эллиптического, параболического и гиперболического типов, которыми в основном и занимались исследователи до последнего времени; в пятый раздел вошел весь остальной материал теории.

Отметим, что в дальнейшем (если не оговорено особо) все величины будут считаться вещественными.

Тип линейного уравнения второго порядка

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu = f \quad (a_{ik} = a_{ki}) \quad (1)$$

определяется, как известно, числом положительных и отрицательных квадратов в законе инерции квадратичной формы

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k. \quad (2)$$

Если в случае постоянных коэффициентов после приведения формы (2) к сумме квадратов все коэффициенты отличны от нуля и имеют одинаковые знаки, то уравнение (1) принадлежит к эллиптическому типу; гиперболический тип характеризуется тем, что все коэффициенты приведенной формы отличны от нуля и, кроме одного, имеют одинаковый знак;

в случае же параболического типа один из коэффициентов равен нулю, а остальные имеют одинаковый знак. Если коэффициенты a_{ik} зависят от $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, то говорят о типе уравнения в данной точке.

В дальнейшем нам часто придется говорить о квазилинейных уравнениях, т. е. об уравнениях, линейных лишь относительно производных высших порядков. В случае уравнений второго порядка они имеют вид¹

$$a_{ik}(x, u, u_x) u_{x_i x_k} + a(x, u, u_x) = 0. \quad (3)$$

Для таких уравнений при определении типа следует закрепить не только точку x , но и ту функцию $u(x_1, \dots, x_n)$, на которой определяется тип. Тип может быть определен и для уравнений общего вида

$$F(x, u, u_x, u_{xx}) = 0,$$

где u_x — всевозможные производные первого порядка, u_{xx} — второго, а также для уравнений высших порядков. Будем говорить о типах и для систем уравнений.

Напомним определение типа для линейного уравнения любого четного порядка $2k$. В таком уравнении совокупность членов высшего порядка имеет вид

$$a_{i_1 i_2 \dots i_n} \frac{\partial^{2k}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}}, \quad (4)$$

причем суммирование распространяется на все целые неотрицательные i_s , сумма которых равна $2k$. Сумме (4) соответствует однородный характеристический полином степени $2k$ переменных ξ_s :

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = a_{i_1 i_2 \dots i_n} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_n^{i_n}.$$

Эллиптический тип определяется следующим требованием: функция $\Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ должна сохранять знак и не обращаться в нуль при $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = 1$.

До начала XX века рассматривались лишь указанные типы уравнений, с ними были связаны изучавшиеся тогда задачи математической физики. В настоящее время опубликована обширная литература по уравнениям, не принадлежащим этим типам.

Кроме деления на типы, возможны и другие принципы классификации. Существенное значение имеет деление на линейные и нелинейные уравнения, на одно уравнение с одной функцией и на системы уравнений со многими функциями. Линейные уравнения, естественно, делятся на уравнения с постоянными и переменными коэффициентами. В XIX веке занимались главным образом простейшими линейными уравнениями с постоянными коэффициентами.

¹ В дальнейшем часто знак суммы при наличии одинаковых индексов будем опускать.

Напишем простейшие уравнения второго порядка трех указанных выше типов для случая трех пространственных переменных:

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} = f(x_1, x_2, x_3), \quad (5)$$

$$u_t = a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) + f(t, x_1, x_2, x_3), \quad (6)$$

$$u_{tt} = a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) + f(t, x_1, x_2, x_3). \quad (7)$$

Сформулируем некоторые основные задачи для этих уравнений. Для уравнений (6) параболического типа и уравнений (7) гиперболического типа ставится задача Коши о нахождении решений этих уравнений при начальном условии для (6)

$$u|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2, x_3) \quad (8)$$

и двух начальных условий для (7)

$$u|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2, x_3), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x_1, x_2, x_3), \quad (9)$$

где $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ и $\psi(x_1, x_2, x_3)$ — заданные во всем пространстве (x_1, x_2, x_3) функции. Решение ищется во всем пространстве x при $t > 0$. Для уравнения эллиптического типа (5) задача Коши до тридцатых годов не ставилась. Об этом пойдет речь во втором разделе. Отметим, что условия (8) и (9) могут быть заданы не на гиперплоскости $t = 0$ четырехмерного пространства (t, x_1, x_2, x_3) , а на некоторой поверхности $t = \omega(x_1, x_2, x_3)$.

Для уравнения (5) рассматриваются главным образом задачи, в которых ищется его решение в некоторой области $\mathfrak{D}$ при задании на границе S этой области некоторых граничных (предельных) условий. Основными (классическими) являются следующие три условия: задание на поверхности S искомой функции u , задание ее производной в направлении $\vec{n}$ внешней нормали к S или линейной комбинации этих двух величин:

$$u|_S = \omega(x), \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = \omega(x), \quad (11)$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial n} - \sigma(x)u|_S = \omega(x), \quad (12)$$

где $\omega(x)$ и $\sigma(x)$ — заданные на S функции.

Для эллиптического уравнения (1) с переменными коэффициентами $a_{ij}(x)$ нормальная производная в предельных условиях заменяется при любом числе n независимых переменных так называемой конормальной производной, которая определяется формулой

$$\frac{\partial u}{\partial N} = a_{ij}(x) \cos(\vec{n}, \vec{x}_j) u_{x_i},$$

где $\vec{n}$ — направление внешней нормали к поверхности S в n -мерном пространстве.

Граничная (предельная) задача с условием (10) называется задачей Дирихле, с условием (11) — задачей Неймана и с условием (12) —

третьей основной граничной задачей. Аналогичная терминология применяется и для уравнения (1) в случае его эллиптичности.

Для уравнений второго порядка (1) или (5) возможны и другие предельные условия. Так, например, можно задать в каждой точке x некоторое направление l , непрерывно меняющееся при движении точки по S , и искать решение уравнения при задании $\frac{\partial y}{\partial l}$ на S (задача с наклонной производной). Для эллиптического уравнения порядка $2k$ задается обычно k граничных условий. Положим, что левые части этих условий линейны относительно функции u и ее производных до порядка $(2k - 1)$. В дальнейшем увидим, что такого рода общие граничные условия не могут задаваться произвольно. Необходимо некоторое согласование коэффициентов уравнения с коэффициентами в граничных условиях при функции и ее производных. Условия трех указанных выше типов для уравнений порядка $2k$ допустимы. Соответствующие граничные задачи называются часто классическими или основными граничными задачами.

Отметим, что левая часть уравнения (5) обычно обозначается так: $\Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3}$. Такое же обозначение применяется и для случая n независимых переменных: $\Delta u = u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n}$. Последний дифференциальный оператор называется оператором Лапласа, уравнение $\Delta u = 0$ — уравнением Лапласа, а уравнение $\Delta u = f(x_1, x_n)$ — уравнением Пуассона.

Для уравнений (6) и (7) ставятся граничные условия, аналогичные условиям для уравнения (5), с той лишь разницей, что кроме условий на S задаются также начальные условия (8) и (9), где $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ и $\psi(x_1, x_2, x_3)$ — заданные в области $\mathfrak{D}$ функции. Такие задачи называются часто не граничными, а смешанными, поскольку условия задаются и на S и в $\mathfrak{D}$ (при $t = 0$).

2

Теория дифференциальных уравнений с частными производными в России в начале XX века.

Работы В. А. Стеклова и С. Н. Бернштейна

В России до 1917 г. теорией дифференциальных уравнений с частными производными занимались только в трех научных центрах: Киеве, Харькове и Петрограде. В Киеве школу возглавлял Г. В. Пфейффер, и основной темой исследования его самого и его учеников была теория уравнений с частными производными первого порядка. Эти исследования тесно связаны с предшествовавшими им исследованиями А. Н. Коркина и В. Г. Имшенецкого. Работа в этом направлении продолжается и в настоящее время.

С Харьковом и Петроградом связана научная деятельность В. А. Стеклова. Основное содержание его работ — это исследование смешанной задачи для линейных уравнений гиперболического типа при двух независимых переменных с коэффициентами, не зависящими от t (колебание



Научный семинар акад. В. И. Смирнова. 1-й ряд (слева направо): А. П. Осколков, О. А. Ладыженская, В. И. Смирнов, С. Г. Михлин; 2-й ряд: М. З. Соломяк, Н. Н. Уральцева, Н. Ф. Морозов, М. Ш. Бирман, М. М. Смирнов, Х. Л. Смолицкий; 3-й ряд: Д. М. Эйдуc, Б. А. Пламеневский. 1968 г.

неоднородной струны), и исследование граничных задач для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$. Центральным пунктом его исследований было оправдание метода Фурье. В связи с этим Стеклов построил теорию замкнутости ортонормированных систем функций, в рамках которой он широко использовал созданный им метод усреднения (сглаживания) функций, т. е. построения функций, в известном смысле близких к заданной функции, но обладающих большей гладкостью. Теория и идеи В. А. Стеклова получили широкое развитие в дальнейшем, прежде всего в работах Н. М. Гюнтера, относящихся к 20-м и 30-м годам.

Совсем другое направление связано с исследованиями С. Н. Бернштейна. В его работах рассматривались в основном краевые задачи для нелинейных эллиптических уравнений, а также задачи вариационного исчисления и геометрии поверхностей, приводящие к таким уравнениям. Первые публикации Бернштейна по этим вопросам относятся к 1904 г. Его результаты на несколько десятилетий опередили развитие теории уравнений с частными производными, и ряд его идей вошло в большинство современных работ, в которых рассматриваются нелинейные эллиптические уравнения.

Большой цикл работ С. Н. Бернштейна посвящен решению двух проблем Гильберта — девятнадцатой и двадцатой. Обе они касаются вариационной задачи для функционалов вида

$$I(u) = \int_{\Omega} F(x, u, u_x) dx \quad (dx = dx_1 dx_2) \quad (13)$$

при условии, что функция $F(x, u, p)$ выпукла по $p = (p_1, p_2)$ или что уравнение Эйлера

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F(x, u, u_x)}{\partial u_{x_i}} \right) - \frac{\partial F(x, u, u_x)}{\partial u} = 0 \quad (14)$$

является эллиптическим. В девятнадцатой проблеме утверждается, что уравнение (14) имеет только аналитические решения, если $F(x, u, p)$ — аналитическая функция своих аргументов, а в двадцатой, что вариационная задача на отыскание минимума функционала (13) при граничном условии

$$u|_S = \varphi(x_1, x_2),$$

где S — граница $\mathfrak{D}$, всегда имеет решение в достаточно широком классе функций. В отношении девятнадцатой проблемы Бернштейн доказал, что любое трижды непрерывно дифференцируемое решение общего эллиптического уравнения

$$F(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}, r, s, t) = 0 \quad (r = u_{x_1 x_1}, s = u_{x_1 x_2}, t = u_{x_2 x_2}), \quad 4F_r F_t - F_s^2 > 0, \quad (15)$$

а значит и уравнения (14), есть аналитическая функция (x_1, x_2) , если F — аналитическая функция своих аргументов. В направлении исследования двадцатой проблемы Гильберта Бернштейном была решена задача Дирихле для линейных и квазилинейных уравнений с частными производными при двух независимых переменных

$$a_{ij}(x_1, x_2, u_{x_1}, u_{x_2}) u_{x_i x_j} + a(x_1, x_2, u_{x_1}, u_{x_2}) = 0, \quad (16)$$

когда a_{ij} и a не зависят явно от u .

О других результатах С. Н. Бернштейна речь пойдет в § 3 второго раздела. Здесь же укажем на те принципиальные положения его работ, которые оказали большое влияние на многие последующие исследования.

Главное его утверждение состояло в том, что разрешимость задачи зависит от наличия априорных оценок максимумов модулей решений и их производных до определенного порядка для какого-либо однопараметрического семейства задач, связывающего данную задачу с заведомо разрешимой. Это положение Бернштейна нашло свое строгое и полное оформление много позже в топологических принципах неподвижной точки, одним из наиболее общих воплощений которого является знаменитая теорема Лерэ — Шаудера. Сам Бернштейн осуществил свой принцип для случая задачи Дирихле для различных классов уравнений вида (16), для которых заведомо имеет место теорема единственности.

В силу этого принципа, С. Н. Бернштейн основное внимание уделял получению априорных оценок для решений уравнений (16). Он указал различные способы получения априорных оценок, среди которых особенно важное место занимает следующий. Известно, что для простейших уравнений эллиптического (и параболического) типа выполняется так называемый принцип максимума. Благодаря этому принципу оказалось возможным получать оценки для весьма широких классов таких урав-

нений, если вместо исследуемых решений u вводить специально подобранные функции от них $v = \varphi(u)$ (или $\varphi(u_x)$, или $\varphi(u_{xx})$ и пр.). Различные классы уравнений и оценки $\max |u|$ или $\max |D'u|$ требуют введения своей функции φ . От удачного выбора функции φ зависит успех получения оценки. Бернштейн указал такие функции для квазилинейных уравнений вида (16), а также для общих линейных уравнений эллиптического и параболического типов (при любом числе независимых переменных) и некоторых нелинейных уравнений геометрии двумерных поверхностей. Однако сама идея рассмотрения наряду с решением задачи специально подобранных функций от него (или каких-либо его производных) оказалась полезной и для других классов квазилинейных и нелинейных уравнений и была использована в дальнейшем многими математиками у нас и за границей.

Отметим еще оценку Бернштейна для интегралов вида

$$\int_{x_1^2 + x_2^2 \leq \rho^2} f(u_x) (u_{x_1 x_1} u_{x_2 x_2} - u_{x_1 x_2}^2) dx_1 dx_2,$$

оказавшуюся весьма полезной для ряда линейных и нелинейных задач и нашедшую обобщение в работах других ученых.

С. Н. Бернштейну принадлежит также ряд важных результатов, касающихся свойств нелинейных эллиптических уравнений. Им получено обобщение теоремы Лиувилля из теории функций комплексного переменного на случай решений уравнений эллиптического и параболического типов. Эти исследования также получили широкое развитие в дальнейших работах.

3

Работы Н. М. Гюнтера и С. Л. Соболева. Привлечение идей и методов функционального анализа

Работы Н. М. Гюнтера и С. Л. Соболева относятся к концу двадцатых и началу тридцатых годов. Они связаны с возникновением совершенно новых точек зрения в теории уравнений с частными производными и в математической физике и с появлением новых областей исследования. Характерным для этих работ, особенно для работ С. Л. Соболева, является их связь с функциональным анализом — главным образом с теорией различного рода функциональных пространств, а значит, и с теорией функций вещественного переменного.

Основная идея Н. М. Гюнтера заключалась в том, что трудности при решении задач математической физики «вызваны не самой физической задачей, а непременным желанием приспособить к ее решению теорию функций от точек, разработка которой доведена до значительного совершенства», и что вместо функций точки надо рассматривать функции областей и строить теорию таких функций.

Такие понятия, как плотность вещества, давление в точке и т. д., являются лишь математическими абстракциями, «опротечивым переходом к пределу», а физический смысл имеют понятия количества вещества в объеме, давление на площадку и т. д.

В связи с переходом к функциям областей большое значение в работах Н. М. Гюнтера имеют интегралы типа интеграла Стильтьеса. Большой его мемуар посвящен применению таких интегралов к классическим граничным задачам математической физики для уравнения Лапласа. Основным в этой работе был тот факт, что выполнение предельных условий требовалось не в каждой точке, но лишь в среднем. Так, например, при решении внутренней задачи Дирихле предельное условие ставилось следующим образом: если S^1 — любой кусок S и S_m^1 — бесконечная последовательность кусков поверхностей, причем S_m^1 стремится при $m \rightarrow \infty$ изнутри определенным образом к S^1 , то интеграл от искомой функции $u(x)$ по S_m^1 должен стремиться при $m \rightarrow \infty$ к интегралу от функции $\omega(x)$, стоящей в предельном условии, по S^1 .

В многочисленных работах Н. М. Гюнтера по выяснению новых точек зрения на постановки задач рассматривались и уравнения гиперболического типа. В четвертом разделе будем говорить о постановке задачи о колебании неоднородной струны. Широкое использование интеграла Стильтьеса в работах Н. М. Гюнтера связано с тем, что он, исходя из физического смысла задач механики, вводил и изучал обобщенные решения из класса линейных функционалов в пространстве непрерывных функций, а эти последние, как известно, представляются с помощью интегралов Стильтьеса.

В дальнейшем развитие функциональных методов в теории уравнений с частными производными пошло по пути, отличному от намеченного в исследованиях Гюнтера, но в истории нашей науки работы Гюнтера, посвященные пропаганде новых идей, сыграли большую роль.

Н. М. Гюнтеру принадлежат также работы по теории потенциала, продолжающие традиции А. М. Ляпунова в этой области. Они связаны с его исследованиями по гидродинамике, о которых будем говорить в шестом разделе, а также с некоторыми задачами для уравнения Лапласа и волнового уравнения.

Переходим теперь к изложению тех основных понятий, которые были введены и использованы С. Л. Соболевым начиная с середины 30-х годов. Эти понятия вошли во многие последующие работы и во многом способствовали созданию функциональных методов в теории уравнений с частными производными. Основная монография Соболева по этим вопросам называется «Некоторые применения функционального анализа в математической физике» (1950 г.). Отметим, что аналогичные понятия и идеи возникали и за рубежом, но мы не имеем здесь возможности уточнять взаимосвязь между ними и работами Соболева.

Начнем с выяснения понятия частной производной. Пусть $\mathfrak{D}$ — некоторая область n -мерного пространства и S — ее граница. Пусть $u(x)$ и $\Phi(x)$ — функции с непрерывными производными в $\mathfrak{D}$, причем $\Phi(x)$ —

финитна в $\mathfrak{D}$, т. е. равна нулю в некоторой полоске вблизи S . Рассмотрим какую-либо производную

$$D^l u = \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}}. \quad (17)$$

Применяя формулу интегрирования по частям и учитывая финитность $\Phi(x)$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{D}} [D^l u(x)] \Phi(x) dx &= \\ &= (-1)^l \int_{\mathfrak{D}} u(x) [D^l \Phi(x)] dx. \end{aligned}$$

Эта формула кладется в основу понятия «обобщенной производной» (17) функции $u(x)$ в $\mathfrak{D}$, а именно: если $u(x)$ и $w(x)$ суммируемы по любой строго внутренней подобласти $\mathfrak{D}'$ области $\mathfrak{D}$ и для любой финитной l раз непрерывно дифференцируемой функции $\Phi(x)$ они удовлетворяют соотношению

$$\int_{\mathfrak{D}'} w(x) \Phi(x) dx = (-1)^l \int_{\mathfrak{D}'} u(x) D^l \Phi(x) dx, \quad (18)$$

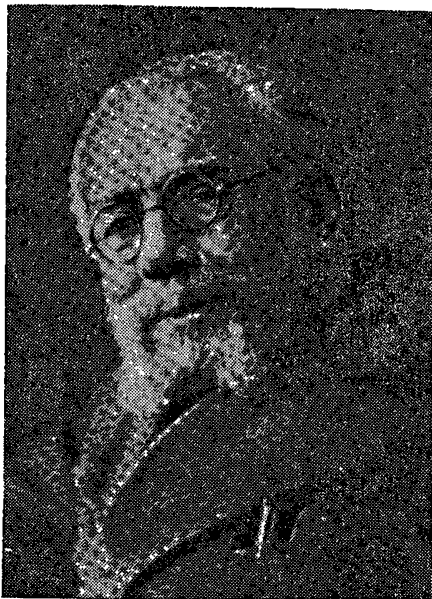
то $w(x)$ называется обобщенной производной вида (17) функции $u(x)$ в $\mathfrak{D}$. Это определение, как доказывается, равносильно следующему требованию: существует последовательность l раз непрерывно дифференцируемых функций $\varphi_m(x)$ ($m = 1, 2, \dots$), таких, что $\varphi_m(x)$ и $D^l \varphi_m(x)$ сходятся к $u(x)$ и $w(x)$ в $L_1(\mathfrak{D}')$, т. е.

$$\int_{\mathfrak{D}'} |u(x) - \varphi_m(x)| dx \text{ и } \int_{\mathfrak{D}'} |w(x) - D^l \varphi_m(x)| dx \rightarrow 0 \quad (19)$$

при $m \rightarrow \infty$ для любой $\mathfrak{D}'$, лежащей строго внутри $\mathfrak{D}$. Таким образом, определение (18) равносильно возможности указанной аппроксимации. Вместо $L_1(\mathfrak{D}')$ можно брать классы $L_p(\mathfrak{D}')$ при $p \geq 1$, в которых первые степени модулей разностей в формулах (19) заменены на степень p , и при некоторых условиях на гладкость границы области $\mathfrak{D}$ можно получить аналогичные результаты о сходимости в $L_p(\mathfrak{D})$, а не в $L_p(\mathfrak{D}')$ ($p \geq 1$).

Выше была определена производная (17) вне зависимости от существования производных порядка ниже l . При некоторых условиях на свойства поверхности S С. Л. Соболевым было доказано, что если $u(x)$ имеет все обобщенные производные порядка l из $L_p(\mathfrak{D})$, то она имеет и все производные порядков ниже l из $L_p(\mathfrak{D})$.

Обобщенные производные раньше рассматривались не в столь общей форме, как у Соболева, зарубежными математиками (Эвансом,



Н. М. Гюнтер.

Беппо Леви, Тоннели). В описанной только что форме они имеются в работах Морри (1930—1931 гг.).

Перейдем теперь к определению обобщенных решений уравнений. Пусть $\mathcal{L}u$ — оператор вида

$$\mathcal{L}u = a_{ih}(x) u_{x_i x_h} + b_i(x) u_{x_i} + c(x) u. \quad (20)$$

Составим новый оператор

$$\mathcal{L}^*u = \frac{\partial^2 (a_{ih}u)}{\partial x_i \partial x_h} - \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i u_{x_i}) + cu. \quad (21)$$

Он называется обычно сопряженным с оператором (20) по Лагранжу. Умножая оператор (20) на любую гладкую финитную в $\mathfrak{D}$ функцию $\Phi(x)$ и интегрируя по $\mathfrak{D}$, после интегрирования по частям, получим тождество, которое кладется в основу определения обобщенного значения w оператора $\mathcal{L}u$ для суммируемой функции u :

$$\int_{\mathfrak{D}} u \mathcal{L}^* \Phi dx = \int_{\mathfrak{D}} w \Phi dx. \quad (22)$$

Если имеется уравнение

$$\mathcal{L}u = f(x), \quad (23)$$

то обобщенным его решением называется всякая суммируемая функция u , удовлетворяющая интегральному соотношению

$$\int_{\mathfrak{D}} u(x) \mathcal{L}^* \Phi dx = \int_{\mathfrak{D}} f(x) \Phi(x) dx \quad (24)$$

для любой гладкой финитной в $\mathfrak{D}$ функции $\Phi(x)$. В работе Соболева такое определение обобщенного решения было приведено для волнового уравнения $u_{tt} - \Delta u = 0$ и доказано, что оно равносильно возможности аппроксимации $u(x)$ в $L_1(\mathfrak{D})$ классическими решениями. С. Л. Соболев доказал также, что обобщенные решения уравнений $\Delta u = 0$, $u_t - \Delta u = 0$ и $\Delta^m u = 0$, где Δ^m — оператор, получаемый применением m раз оператора Δ , суть классические решения, так что для этих уравнений не имеет смысла говорить об их обобщенных решениях. Аналогичные результаты были за рубежом получены Фридрихсом и Вейлем.

Существенное значение для дальнейшего имеют функциональные пространства, введенные и изученные Соболевым. Пространство $W_p^l(\mathfrak{D})$ ($p \geq 1$) есть множество функций $u(x)$, имеющих обобщенные производные до порядка l включительно, суммируемые со степенью p . Норма в этом пространстве определяется формулой

$$\|u\|_{W_p^l(\mathfrak{D})} = \sum_{k=0}^l \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} \|D^k u\|_{L_p(\mathfrak{D})}, \quad (25)$$

где внутреннее суммирование распространяется на все производные порядка k , а норма в $L_p(\mathfrak{D})$ определяется формулой

$$\|\Phi\|_{L_p(\mathfrak{D})} = \left[\int_{\mathfrak{D}} |\Phi(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (26)$$

Возможны и другие, эквивалентные соотношению (25) определения нормы в $W_p^l(\mathfrak{D})$. Каждое из этих функциональных пространств является линейным нормированным пространством (пространством Банаха), а при $p = 2$ — пространством Гильберта.

Для пространств $W_p^l(\mathfrak{D})$ Соболев доказал так называемые «теоремы вложения», очень важные для приложений. Напомним сначала определение норм в пространстве $C(\mathfrak{D})$ непрерывных в замкнутой области $\mathfrak{D}$ функций и в пространстве $C_l(\mathfrak{D})$ функций с непрерывными частными производными до порядка l

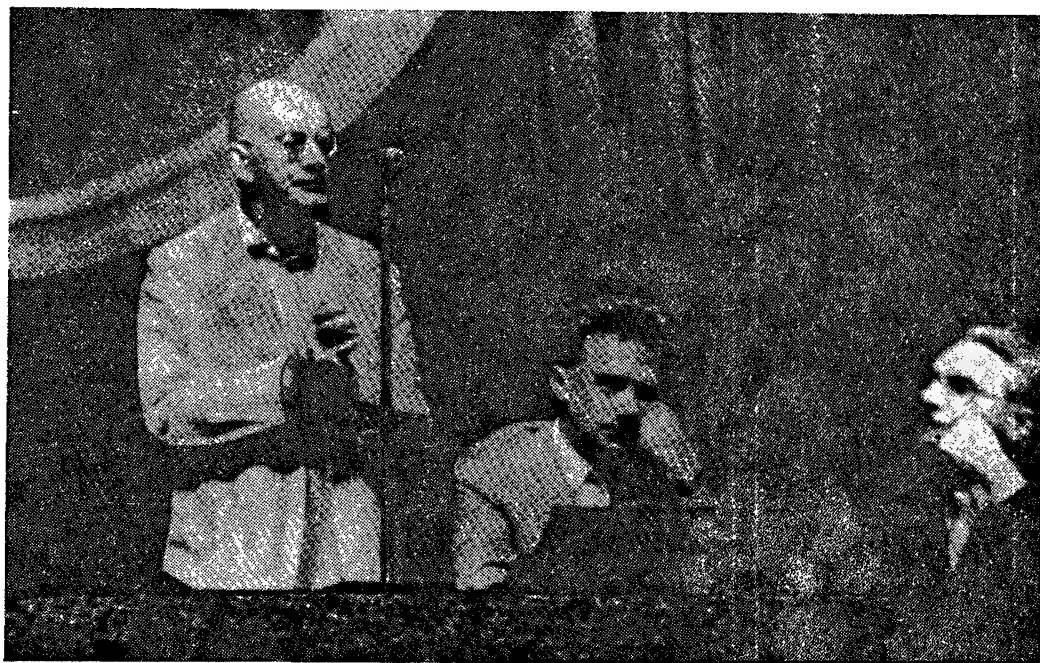
$$\|u\|_C = \max_{x \in \overline{\mathfrak{D}}} |u(x)|; \quad \|u\|_{C_l} = \max_{x \in \overline{\mathfrak{D}}} \sum_{h=0}^l \sum_{k_1 + \dots + k_n = h} |D^h u|. \quad (27)$$

Сформулируем теперь некоторые из теорем вложения. Если $pl > n$, то $W_p^l(\mathfrak{D}) \subset C(\mathfrak{D})$, т. е. всякая функция $u(x)$ из $W_p^l(\mathfrak{D})$ эквивалентна непрерывной в $\mathfrak{D}$ функции и оператор вложения из $W_p^l(\mathfrak{D})$ в $C(\mathfrak{D})$ ограничен:

$$\|u\|_C(\mathfrak{D}) \leq A \|u\|_{W_p^l(\mathfrak{D})} \quad (A = \text{const}).$$

Этот оператор является также и вполне непрерывным, т. е. всякое множество функций, ограниченных в $W_p^l(\mathfrak{D})$, компактно в $C(\mathfrak{D})$. Приведем еще утверждение, из которого следует, что при некотором соотношении между p , l и n можно говорить о значениях $u(x)$ на многообразиях, размерность которых меньше или равна размерности n пространства x -ов. Если $pl \leq n$ и $s > n - pl$, то всякая функция $u(x)$ из $W_p^l(\mathfrak{D})$ на любом достаточно гладком многообразии $\mathfrak{D}_s$ размерности s , входящем в $\mathfrak{D}$, принадлежит $L_q(\mathfrak{D}_s)$, где $q < q^* \equiv \frac{ps}{n-pl}$, и оператор вложения из $W_{lp}(\mathfrak{D})$ в $L_q(\mathfrak{D}_s)$ ограничен. Позднее В. П. Ильин доказал ограниченность оператора вложения из $W_p^l(\mathfrak{D})$ в $L_q(\mathfrak{D}_s)$ ($s < n$) и для предельного показателя $q = q^*$ (в случае $q = n$ это результат С. Л. Соболева). Как отметил В. М. Бабиц, полная непрерывность указанного оператора при $q = q^*$ не имеет места. Соболев указал также специальный прием определения значений $u(x)$ на $\mathfrak{D}_s$.

Сформулированные теоремы вложения дают возможность утверждать, в некоторых случаях, существование предельных значений $u(x)$ на границе $\mathfrak{D}$, что важно для граничных и смешанных задач. Но эти граничные значения надо понимать, вообще говоря, не в обычном смысле непрерывности вплоть до S , а в более общем, как обычно говорят, «в среднем». Это означает, что функция $u(x)$ непрерывна в метрике $L_q(\mathfrak{D}_s)$ по отношению к параллельному сдвигу сечения $\mathfrak{D}_s$, если последний допустим. Указанные выше теоремы вложения справедливы лишь при некотором условии на $\mathfrak{D}$ — «условии конуса». Это условие состоит в следующем: область $\mathfrak{D}$ звездна относительно всех точек P , принадлежащих какому-либо шару, лежащему внутри $\mathfrak{D}$, т. е. полупрямые, выходящие



П. С. Александров, С. Л. Соболев и А. Д. Александров в президиуме IV Всесоюзного математического съезда. 1962 г.

из P , имеют с границей $\mathfrak{D}$ лишь одну общую точку. Теоремы вложения сохраняются также, если $\mathfrak{D}$ можно составить из конечного числа $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \dots, \mathfrak{D}_k$ областей $\mathfrak{D}_j$ указанного типа, причем каждая область пересекается с суммой предыдущих по некоторой области.

Теоремы вложения были доказаны С. Л. Соболевым на основе представления функций из $W_p^l(\mathfrak{D})$ с помощью интегралов типа потенциала. Такое представление и приводит в указанном выше случае к значениям $u(x)$ на $\mathfrak{D}_s$.

Л. В. Канторович дал новое доказательство теорем вложения на основе интегральных операторов более общего вида.

Теоремы вложения явились далеко идущим обобщением теорем и неравенств Пуанкаре, Фридрихса, Реллиха и др. Они оказались весьма полезными при исследованиях дифференциальных уравнений с частными производными. Начиная с 50-х годов появляется большая литература по теоремам вложения в различных функциональных пространствах и с различными подходами к этому вопросу (О. В. Бесов, В. П. Глушко, К. К. Головкин, В. П. Ильин, В. Б. Коротков, С. Г. Крейн, Л. Д. Кудрявцев, П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, Л. Н. Слободецкий, В. А. Солонников, Г. Н. Яковлев и др.). В частности, классы $W_p^l(\mathfrak{D})$ были определены и при дробном l (Ароншайн, Л. Н. Слободецкий, О. В. Бесов и др.). Отметим еще введение классов $W_{p_1 \dots p_n}^{l_1 \dots l_n}$ с различными значками p и l для разных независимых переменных. Такие классы применяются, например, при рассмотрении уравнений параболического типа (В. А. Солонников и др.).

Введем некоторые обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Через $\dot{W}_p^1(\mathfrak{D})$ обозначим множество всех функций из $W_p^1(\mathfrak{D})$, предельные значения которых на S получаются согласно теоремам вложения и эквивалентны нулю. Можно дать и другое определение $\dot{W}_p^1(\mathfrak{D})$, пригодное для областей $\mathfrak{D}$ с произвольной границей: $\dot{W}_p^1(\mathfrak{D})$ — пополнение в норме $W_p^1(\mathfrak{D})$ гладких финитных в $\mathfrak{D}$ функций.

С указанными выше функциональными классами связан важный вопрос о продолжении функций, заданных на поверхности S области $\mathfrak{D}$, на всю область $\mathfrak{D}$. В нашей стране результаты по этой проблеме были получены С. М. Никольским, В. С. Бабиным и Л. Н. Слободецким. Результаты С. М. Никольского относятся к классам, отличным от $W_p^l(\mathfrak{D})$. Сформулируем результаты, относящиеся к $W_2^l(\mathfrak{D})$: если $u(x)$ на S принадлежит $W_2^{l-\frac{1}{2}}$, то при достаточно гладкой S ее можно продолжить на $\mathfrak{D}$ так, что она будет принадлежать $W_2^l(\mathfrak{D})$.

Как было сказано выше, теоремы вложения С. Л. Соболева, имеющие вид интегральных неравенств, доказаны при условии, что область $\mathfrak{D}$ удовлетворяет «условию конуса». Однако, как было выяснено еще в 20—30-х годах, отдельные интегральные неравенства, например неравенство Пуанкаре

$$\int_{\mathfrak{D}} u^2(x) dx \leq C \left[\int_{\mathfrak{D}} (\text{grad } u(x))^2 dx + \left(\int_{\mathfrak{D}} u(x) dx \right)^2 \right],$$

о котором мы упоминали выше, справедливы при менее жестких требованиях на S . Возникает задача более полного выяснения тех свойств S , при которых выполняются те или иные интегральные неравенства. Сюда относится также вопрос об интегральных неравенствах при наличии под знаком интеграла весовых функций. Рассмотрению этого круга вопросов посвящены работы В. П. Ильина и В. Г. Мазы. Последним разработан метод, позволяющий для данного утверждения типа теорем вложения полностью охарактеризовать класс областей, для которых это утверждение справедливо. То же относится и к характеристике весовых функций. В ряде случаев критерии формулируются в терминах «изопериметрических неравенств», связывающих различные меры или емкости.

4

Обобщенные решения задач для уравнений с частными производными

Еще в тридцатых годах пространства $W_p^l(\mathfrak{D})$ и теоремы вложения были использованы С. Л. Соболевым для построения обобщенных решений задачи Коши для линейных гиперболических уравнений. Поскольку эти решения определялись им в классе обобщенных функций, то подробнее рассмотрим их в следующем разделе, посвящен-

ном таким функциям. Здесь же будет идти речь об обобщенных решениях различных задач, которые являются функциями точки.

С. Л. Соболев предложил два способа определения обобщенных решений смешанных задач (и в частности, задачи Коши). Первый способ: обобщенными решениями задачи следует считать пределы классических решений этой же задачи в нормах $C(Q_T)$ или даже $L_1(Q_T)$. Предельные переходы разрешается делать по всем данным задачи (свободным членам, начальным условиям, коэффициентам). Второй способ изложен в работах 40-х годов по почти периодическим решениям гиперболических уравнений и в книге «Некоторые приложения функционального анализа в математической физике» (1950 г.). В них введены обобщенные решения $u(x, t)$ смешанной задачи для уравнения

$$\mathcal{L}u = u_{tt} - (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + a(x) u = f$$

как траекторий в некотором функциональном пространстве. Именно, функция $u(x, t)$ есть элемент $W_2^1(x)$, непрерывно зависящий от t , $u_t(x, t)$ — элемент $L_2(x)$, также непрерывно зависящий от t . Начальным условиям они удовлетворяют в смысле только что указанной непрерывности, а уравнению — в смысле тождества (24) (в котором $x = (t, x_1, \dots, x_n)$) с любой гладкой финитной в $\mathfrak{D}$ функцией Φ . Получаются эти решения так же, как и решения в функционалах для задачи Коши, с помощью замыкания в соответствующих нормах классических решений той же задачи. Теоремы единственности таких обобщенных решений доказываются методом Адамара, требующим умения решать сопряженную задачу в классе классических решений.

Дальнейшее развитие теории обобщенных решений связано с выработкой таких форм, которые не зависели бы от предварительного решения вопроса о классической разрешимости задачи и, напротив, сами давали бы ответ на этот вопрос, как на один из частных вопросов теории. Такие формы были даны в работах конца 40-х — начала 50-х годов. Они существенно облегчили исследование предельных и смешанных задач и позволили решить много давно стоявших и вновь возникших проблем, не поддававшихся решению на прежнем, классическом, пути изучения. После этих весьма общих высказываний об обобщенных решениях задач перейдем к краткому описанию выработанных при этом постановок задач и методов решения.

Нам придется пользоваться при этом общими понятиями функционального анализа. Исследования в указанном направлении начались с предельных задач для эллиптических уравнений второго порядка. Приведем результат Фридрихса. Рассматривалась предельная задача для уравнения эллиптического типа второго порядка

$$\mathcal{L}_0 u = - \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) u_{x_j}) + a(x) u = f(x), \quad u|_S = 0 \quad (28)$$

в n -мерной конечной области $\mathfrak{D}$, ограниченной поверхностью S . Дифференциальное уравнение (28) есть уравнение Эйлера для функ-

ционала

$$I(u) \equiv \mathcal{L}_0(u, u) - 2(u, f) \equiv \int_{\mathfrak{D}} (a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + a(x) u^2 - 2uf) dx.$$

Фридрихс изучал вопрос о самосопряженном расширении в гильбертовом пространстве $L_2(\mathfrak{D})$ оператора $\mathcal{L}_0 u$, первоначально заданного на множестве $\mathfrak{D}(\mathcal{L}_0)$ дважды непрерывно дифференцируемых функций, равных нулю на S , при этом (без ограничения общности) он считал $a(x) \geq 0$. Он доказывает, что если к $\mathfrak{D}(\mathcal{L}_0)$ присоединить все решения вариационных задач на минимум $I(u)$ в классе $\dot{W}_2^1(\mathfrak{D})$ при всех $f(x)$ из $L_2(\mathfrak{D})$, то $\mathcal{L}_0 u$ расширится до самосопряженного оператора $\hat{\mathcal{L}}_0$, причем $\mathfrak{D}(\hat{\mathcal{L}}_0) \subset \dot{W}_2^1(\mathfrak{D})$, и этот оператор устанавливает биоднозначное соответствие между элементами $\mathfrak{D}(\hat{\mathcal{L}}_0)$ и $L_2(\mathfrak{D})$. Исследуются спектральные свойства $\hat{\mathcal{L}}_0$ и доказывается, что оператор $\hat{\mathcal{L}}_0^{-1}$ вполне непрерывен в $L_2(\mathfrak{D})$. Работа Фридрихса (1934 г.) послужила отправным пунктом для дальнейших исследований самого Фридрихса, С. Г. Михлина, М. И. Вишика, О. А. Ладыженской и других.

С. Г. Михлин исследует задачу для несамосопряженного по Лагранжу уравнения

$$\mathcal{L}u = -\frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) u_{x_j}) + a_i(x) u_{x_i} + a(x) u = f(x), \quad u|_S = 0 \quad (29)$$

следующим образом. Он вводит оператор $Ku = b_i u_{x_i}$ для $u \in \dot{W}_2^1$ и задачу (29) трактует как задачу

$$(\hat{\mathcal{L}}_0 + K)u = f, \quad u \in \mathfrak{D}(\hat{\mathcal{L}}_0),$$

где $\hat{\mathcal{L}}_0$ — указанное выше расширение по Фридрихсу оператора $\mathcal{L}_0$ из задачи (28). При $a \geq 0$ последнее уравнение можно записать так:

$$u + \hat{\mathcal{L}}_0^{-1} Ku = \mathcal{L}_0^{-1} f.$$

Доказывается, что при ограниченных коэффициентах уравнения (29) оператор $\hat{\mathcal{L}}_0^{-1} K$, определенный на $\mathfrak{D}(\hat{\mathcal{L}}_0)$, вполне непрерывен в $\mathfrak{D}(\hat{\mathcal{L}}_0)$ и что $\mathfrak{D}(\mathcal{L}_0)$ плотно в $\dot{W}_2^1(\mathfrak{D})$. Тем самым оператор $\hat{\mathcal{L}}_0^{-1} K$ может быть расширен на все $\dot{W}_2^1(\mathfrak{D})$ до вполне непрерывного оператора. Таким образом, задача свелась к задаче о решении уравнения

$$u + Tu = w, \quad (30)$$

где T — вполне непрерывный в $\dot{W}_2^1(\mathfrak{D})$ оператор, а w — заданный в $\dot{W}_2^1(\mathfrak{D})$ элемент, к уравнению (30) применимы теоремы Фредгольма. Решения этого уравнения и называются обобщенными решениями задачи (29).

Перейдем теперь к работе М. И. Вишика, примыкающей к методу ортогональных проекций Г. Вейля, и кратко опишем ее для частного случая задачи

$$\mathcal{L}u = -\Delta u + a_i(x) u_{x_i} = f, \quad u|_S = 0. \quad (31)$$

Оператор Δ представляется в виде произведения двух сопряженных друг другу операторов G и G^* , где G — оператор, сопоставляющий каждой функции $u(x)$ из $\dot{W}_2^1(\mathfrak{D})$ как элементу из $L_2(\mathfrak{D})$ ее градиент как элемент векторного пространства $\vec{L}_2(\mathfrak{D})$. Операторы G и G^* имеют обратные операторы, и задача (31) приводится к операторному уравнению

$$v + G^{*-1}KG^{-1}v = G^{*-1}f,$$

где u связано с v равенством $u = G^{-1}v$. Доказывается, что G^*KG^{-1} — вполне непрерывный оператор, и последнее уравнение приводится к виду (30), где T — также вполне непрерывный оператор. Функция $u = G^{-1}v$ и называется обобщенным решением задачи. Эта схема, которую мы описали применительно к частному случаю, была проведена М. И. Вишиком как для задачи (31), так и для так называемых сильно эллиптических систем, о которых будем говорить ниже. При этом вместо уравнения (30) Вишик получает уравнение вида

$$v + Av + Tv = w,$$

где T — вполне непрерывный, а A — кососимметрический ограниченный оператор. Последнее уравнение преобразуется к виду

$$v + (I + A)^{-1}Tv = (I + A)^{-1}w,$$

где $(I + A)^{-1}T$ — вполне непрерывный оператор.

В работах О. А. Ладыженской введены понятия обобщенных решений различных задач, принадлежащих тому или иному функциональному пространству. Решения эти определяются через интегральные тождества, вид которых зависит от выбора функционального пространства. Начнем с задачи (29). Умножим обе части уравнения на любую функцию $\eta(x)$ из $\dot{W}_2^1(\mathfrak{D})$. Полученное равенство проинтегрируем по всей области $\mathfrak{D}$ и преобразуем с помощью интегрирования по частям к виду

$$\int_{\mathfrak{D}} (a_{ij}u_{x_j}\eta_{x_i} + a_i u_{x_i}\eta + a u \eta) dx = \int_{\mathfrak{D}} f \eta dx. \quad (32)$$

Определим обобщенное решение задачи (29) из пространства $W_2^1(\mathfrak{D})$ как элемент $u(x)$ из $\dot{W}_2^1(\mathfrak{D})$, который удовлетворяет интегральному тождеству (32) при любой функции $\eta(x)$ из $\dot{W}_2^1(\mathfrak{D})$. Приведем схему доказательства существования такого решения. В пространстве $\dot{W}_2^1(\mathfrak{D})$ вводится новое скалярное произведение с помощью равенства

$$[u, \eta] = \int_{\mathfrak{D}} a_{ij}u_{x_i}\eta_{x_j} dx \quad (33)$$

и тождество (32) переписывается в виде

$$[u, \eta] + [Tu, \eta] = [w, \eta],$$

где элементы Tu и w пространства $\dot{W}_2^1(\mathfrak{D})$ определяются соответственно тождествами

$$\int_{\mathfrak{D}} (a_i u_{x_i} + au) \eta dx = [Tu, \eta], \quad \int_{\mathfrak{D}} f \eta dx = [w, \eta]. \quad (34)$$

Эти представления возможны на основании теоремы Рисса об общей форме функционала в гильбертовом пространстве, если относительно a_i , a и f сделаны такие предположения, при которых левые части (34) суть линейные функционалы в $\dot{W}_2^1$ над η . Это будет, например, если a_i и a — ограниченные функции, а f из класса $L_2(\mathfrak{D})$. При этом T будет вполне непрерывным, и задача приведет к операторному уравнению (30). Такой подход применим и ко многим другим задачам, причем не только к линейным.

Приведем теперь определение обобщенного решения той же задачи (29) в более широком классе $L_2(\mathfrak{D})$. Это требует больших предположений относительно коэффициентов уравнения. Умножая по-прежнему обе части уравнения на функцию $\eta(x)$, которая предполагается гладкой и равной нулю на S ($\eta(x)$, принадлежит одновременно $W_2^2(\mathfrak{D})$ и $\dot{W}_2^1(\mathfrak{D})$), интегрируя по $\mathfrak{D}$ и затем интегрируя по частям и учитывая предельные условия для $u(x)$ и $\eta(x)$, приходим к следующему определению обобщенного решения из $L_2(\mathfrak{D})$: это есть функция из $L_2(\mathfrak{D})$, удовлетворяющая тождеству

$$\int_{\mathfrak{D}} u \mathcal{L}^* \eta dx = \int_{\mathfrak{D}} f \eta dx \quad (35)$$

для любых $\eta(x)$ с указанными выше свойствами. Сопряженный по Лагранжу оператор определен нами выше. Нулевое предельное условие на S включено в интегральное тождество (35). При определении решения тождеством (32) это условие заключалось в указании на то, что $u(x)$ принадлежит $\dot{W}_2^1(\mathfrak{D})$.

В работах О. А. Ладыженской, а также несколько позже в работах других ученых определение решений через интегральные тождества было дано и для уравнений параболического и гиперболического типов. В качестве примера возьмем смешанную задачу для уравнения гиперболического типа:

$$Mu \equiv u_{tt} + \mathcal{L}u = f, \quad (36)$$

$$u|_S = 0, \quad (37)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad (38)$$

где $\mathcal{L}u$ определено формулой (29).



О. А. Ладыженская.

Введем ограниченную область $Q_T = (x \in \mathfrak{D}; 0 \leq t \leq T)$ и дадим определение обобщенного решения задачи из $W_2^1(Q_T)$. Умножая обе части (36) на гладкую функцию $\Phi(x, t)$ и интегрируя по частям, чтобы исключить вторые производные от $u(x, t)$, получим интегралы от первых производных функций $u(x, t)$ по поверхности цилиндра Q_T , которые могут не иметь смысла для $u(x, t)$ из $W_2^1(Q_T)$. На нижнем основании цилиндра, в силу условий (38), можем заменить u_i на $\psi(x)$, а на боковой поверхности Q_T и верхнем основании ($t = T$) должны считать $\Phi(x, t)$ равной нулю. Для самой функции $u(x, t)$ из $W_2^1(Q_T)$ имеет смысл, согласно теореме вложения, говорить о ее значении на грани

нице Q_T . Все это приводит к следующему определению: решением из $W_2^1(Q_T)$ является функция $u(x, t)$ из $W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющая условиям (37), первому из условий (38) и интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} [u_t \Phi_t - a_{ij} u_{x_i} \Phi_{x_j} - a_i u_{x_i} \Phi - au \Phi] dx dt + \\ + \int_{\mathfrak{D}} \Psi(x) \Phi(x, 0) dx = - \int_{Q_T} f \Phi dx dt$$

для всех гладких $\Phi(x, t)$, равных нулю на боковой поверхности и верхнем основании Q_T .

С помощью аналогичных соображений Ладыженская определяет и обобщенное решение указанной выше задачи из $L_2(Q_T)$: оно должно быть элементом $L_2(Q_T)$ и удовлетворять тождеству

$$\int_{Q_T} u [\Phi_{tt} + \mathcal{L}^* \Phi] dx dt + \int_{\mathfrak{D}} [\varphi(x) \Phi_t(x, 0) - \\ - \psi(x) \Phi(x, 0)] dx = \int_{Q_T} f \Phi dx dt \quad (39)$$

для всех гладких функций $\Phi(x, t)$, равных нулю на боковой поверхности и равных нулю вместе с производной по t на верхнем основании. Как видно из равенства (39), определение решения в $L_2(Q_T)$ требует большей гладкости коэффициентов уравнения, чем решения из $W_2^1(Q_T)$. В следующем параграфе приведем дальнейшее обобщение понятия решения, которое определяется уже не функциями точки, а функционалами над некоторыми пространствами гладких функций.

Существование таких обобщенных решений доказывается сравнительно просто (с помощью различных приближенных методов или с по-

мощью общих теорем функционального анализа). Сложнее обстоит дело с теоремами единственности. Для нестационарных уравнений их доказательство занимает центральное место. Для классических решений и для решений, удовлетворяющих уравнению почти везде и всем дополнительным условиям «в среднем» (для уравнений второго порядка — это решения из W_2^2), они являются следствиями так называемого энергетического неравенства. Для обобщенных решений из более широких классов, например из W_2^1 или L_2 , они следствия неравенств другого типа. Отметим специально, что из теоремы единственности решения из L_2 теорема существования выводится особенно просто из самых общих соображений. Указанные вопросы для нестационарных уравнений рассмотрены в книге О. А. Ладыженской «Смешанная задача для гиперболического уравнения» (1953 г.) и ее последующих работах. Такая обобщенная трактовка смешанных задач и доказательства теорем существования и единственности, основанные на общих свойствах дифференциальных операторов, а не на их конкретном виде, позволили перейти к более общему объекту, а именно к задаче Коши для уравнений вида

$$A_1(t) \frac{du}{dt} + A_2(t) u = f(t), \quad u(0) = u_0, \quad (40)$$

$$A_1(t) \frac{d^2u}{dt^2} + A_2(t) \frac{du}{dt} + A_3(t) u = f(t), \quad (41)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'_i(0) = u_1,$$

где $A_i(t)$ — неограниченные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, зависящие от параметра t , а $u(t_0)$ и $f(t_0) \in H$, $t_0 \gg 0$. Были выяснены условия на $A_i(t)$, при которых указанные задачи однозначно разрешимы в том или ином обобщенном смысле. Все это привело к решению большого числа типов нестационарных линейных задач математической физики. Первые исследования задач (40) и (41) и применение их к задачам для уравнений с частными производными появились в работах М. И. Вишика и О. А. Ладыженской (см. их обзор в УМН за 1956 г.) и были продолжены М. А. Красносельским, С. Г. Крейном и П. Е. Соболевским, а в рамках банаховых пространств — М. З. Соломяком и П. Е. Соболевским.

В заключение отметим, что при нахождении обобщенных решений широко использовались так называемые прямые методы: метод Ритца, метод наименьших квадратов, метод Галеркина, метод конечных разностей и функциональные методы, связанные с понятиями и результатами функционального анализа. При исследовании гладкости обобщенных решений применялись конечные разности, теоремы единственности обобщенных решений, основные сингулярные решения уравнений с замороженными коэффициентами, срезающие функции и усредняющие ядра.

Обобщенные функции

Выше мы говорили об обобщенных решениях уравнений или задач для них, причем эти обобщенные решения были функциями точки. В настоящее время широкое применение в теории уравнений с частными производными получили так называемые «обобщенные функции». Впервые некоторый их класс был введен С. Л. Соболевым и использован им при решении задачи Коши для линейного гиперболического уравнения второго порядка (1935 г.). Развернутую теорию обобщенных функций построил французский математик Лоран Шварц (1950 г.). В 50-х годах И. М. Гельфандом в соавторстве с другими математиками опубликована серия монографий «Обобщенные функции», посвященная дальнейшему развитию этой теории и ее приложениям. Самый термин «обобщенная функция» был введен не сразу. В работе С. Л. Соболева говорится об «идеальных функциях» и «обобщенных решениях задачи Коши», а монография Лорана Шварца носит название «теория распределений» (*théorie des distributions*). Установившейся терминологии нет и сейчас.

Приведем кратко некоторые основные определения и факты, связанные с теорией обобщенных функций. Пусть K — некоторое линейное пространство гладких вещественных функций и в нем определено понятие предельного перехода (основное пространство). Обобщенной функцией f называется линейный непрерывный функционал на K , т. е. функция, которая всякому элементу φ из K сопоставляет определенное вещественное число (f, φ) , причем для любых вещественных чисел a_1 и a_2 $(f, a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1(f, \varphi_1) + a_2(f, \varphi_2)$ (линейность функционала) и $(f, \varphi_n) \rightarrow (f, \varphi)$, если $\varphi_n \rightarrow \varphi$ в K (непрерывность функционала).

Дальнейшее изложение приведем для частного случая, когда K есть пространство всех бесконечно дифференцируемых финитных во всем пространстве R_n функций $(x_1, \dots, x_n)$. Финитность функции $\varphi(x)$ означает, что $\varphi(x)$ равна нулю вне некоторой ограниченной области в R_n , причем эта область может быть различной для различных $\varphi(x)$. Предельный переход $\varphi_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равносильен следующему: все функции $\varphi_n(x)$ равны нулю вне некоторой определенной (не зависящей от n) области и сами функции $\varphi_n(x)$ и все их производные сходятся к нулю равномерно в R_n . Предельный переход $\varphi'_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ равносильен соотношению: $\varphi(x) - \varphi_n(x) \rightarrow 0$. Если $f(x)$ — интегрируема (суммируема) в любой конечной области R_n (локально суммируемая функция), то формула

$$(f, \varphi) = \int_{R_n} f(x) \varphi_n(x) dx \quad (42)$$

определяет линейный непрерывный функционал. В этом случае обобщенная функция f представляется обычной локально интегрируемой функцией $f(x)$. Легко показать, что если локально интегрируемые функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не эквивалентны, то соответствующие им функционалы различ-

ны, т. е. они не могут совпадать на всех функциях $\varphi(x)$ из K . Примером обобщенной функции, не представимой в виде (42), является обобщенная функция Дирака $\delta(x - x^0)$, которая сопоставляет всякой функции $\varphi(x)$ из K ее значение в точке x^0 ($x_1^0, \dots, x_n^0$), т. е. $(\delta(x - x^0), \varphi) = \varphi(x^0)$. Таким образом, локально интегрируемые функции $f(x)$ образуют лишь часть множества всех обобщенных функций. Обобщенные функции, представленные локально интегрируемыми функциями, обычно называются регулярными, а остальные — сингулярными.

Можно показать, что пространство обобщенных функций есть полное пространство, т. е. если последовательность $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) обобщенных функций такова, что числовая последовательность (f_n, φ) имеет предел при любом $\varphi(x)$ из K , то этот предел определяет линейный непрерывный функционал на K , т. е. обобщенную функцию. Можно показать, что всякая сингулярная обобщенная функция может быть получена, как предел регулярных обобщенных функций или даже функций из основного класса K .

Умножение обобщенной функции f на любую функцию $a(x)$ из K и производная любого порядка от f определяются формулами

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi), \quad (f^{(l)}, \varphi) = (-1)^l (f, \varphi^{(l)}). \quad (43)$$

Функции $a\varphi$ и $\varphi^{(l)}$, очевидно, принадлежат K . Если f есть регулярная обобщенная функция, то можно утверждать то же и относительно af , но $f^{(l)}$ может быть при этом и сингулярной обобщенной функцией. Из формул (43) непосредственно следует возможность применения к любой обобщенной функции линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}$ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами:

$$(\mathcal{L}f, \varphi) = (f, \mathcal{L}^*\varphi), \quad (44)$$

где $\mathcal{L}^*$ — оператор, сопряженный с $\mathcal{L}$ по Лагранжу. Мы определили его выше для операторов второго порядка. Аналогичным образом он определяется и для уравнений высших порядков.

Все сказанное выше может быть повторено и для того случая, когда K состоит из комплекснозначных функций. При применении обобщенных функций к теории уравнений выбор основного пространства бывает различным. Важные для приложений основные пространства введены И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым.

Отметим связь с обобщенными функциями функции Грина $G(x, x_0)$ в случае предельной задачи для эллиптического уравнения $\mathcal{L}u = f$ при однородных предельных условиях. Функция Грина является решением уравнения $\mathcal{L}G = \delta(x - x_0)$, причем, хотя правая часть есть сингулярная обобщенная функция, но само решение является регулярной функцией, удовлетворяющей предельным условиям, и решение предельной задачи получается по принципу суперпозиции:

$$u(x) = \oint_{\mathfrak{D}} G(x, x_0) f(x_0) dx_0.$$

Вернемся к работе С. Л. Соболева (1935 г.), о которой мы упоминали выше. В ней он дает решение задачи Коши для линейного гиперболиче-

ского уравнения, свободный член которого предполагается обобщенной функцией, а коэффициенты уравнения — достаточно гладкими. Решение ищется в классе обобщенных функций. Оно получается как предел классических решений задачи Коши для уравнений с гладкими свободными членами и начальными данными, аппроксимирующими соответствующие обобщенные функции исходной задачи.

В третьем выпуске серии монографий «Обобщенные функции» приведен обширный материал, содержащий работы как отечественных, так и зарубежных авторов по применению теории обобщенных функций к различным задачам теории уравнений с частными производными. Эти результаты относятся как к задаче Коши для систем уравнений, так и к задаче о полноте собственных функций для дифференциальных операторов.

В приложениях часто бывает полезно в качестве пространства основных функций выбирать пространства $W_p^l(\mathfrak{D})$ или их подпространства, содержащие функции, удовлетворяющие тем или иным краевым условиям. Проиллюстрируем такую конструкцию на примере пространства $W_2^l(\mathfrak{D})$ со скалярным произведением

$$[u, v]_l = \int_{\mathfrak{D}} \left(uv + \sum_{\alpha \leq l} D^\alpha u \cdot D^\alpha v \right) dx, \quad (45)$$

где D^α — всевозможные производные порядка α . Произвольный линейный непрерывный функционал в $W_2^l(\mathfrak{D})$ можно представить в виде (45). Однако иногда удобно воспользоваться для этой цели скалярным произведением в $L_2(\mathfrak{D})$

$$(u, v) = \int_{\mathfrak{D}} uv dx.$$

Так как, очевидно, норма в $W_2^l(\mathfrak{D})$ мажорирует норму в $L_2(\mathfrak{D})$, то всякая функция $u \in L_2(\mathfrak{D})$ порождает линейный непрерывный функционал $l_u(v) = (u, v)$ в пространстве $W_2^l(\mathfrak{D})$. Норма этого функционала имеет вид

$$\|l_u\| = \sup \{ (u, v); \|v\|_{W_2^l(\mathfrak{D})} \leq 1 \}.$$

Пополнение $L_2(\mathfrak{D})$ по этой норме естественно назвать пространством $W_2^{(-l)}(\mathfrak{D})$. Элементами этого пространства являются обобщенные функции (не обязательно локально-суммируемые). Например, δ -функция Дирака, сосредоточенная в точке O из $\mathfrak{D}$, принадлежит $W_2^l(\mathfrak{D})$, если $2l > n$ (это следует непосредственно из теоремы вложения W_2^l в C).

Пространства типа W_2^l с отрицательными l вводились французским математиком Лерэ и американским математиком Лаксом. У нас они изучались в работах Ю. М. Березанского, Г. И. Каца, Я. А. Ройтберга, где указанная выше конкретная схема была обобщена на абстрактные гильбертовы пространства (так называемые оснащенные гильбертовы пространства) и нашла применения в теории эллиптических краевых задач и спектральном анализе дифференциальных операторов.

Аналогичная схема позволяет рассмотреть пространства $W_{\frac{p}{p-1}}^{(-l)}(\mathfrak{D})$, где $l > 0$, сопряженные к пространствам С. Л. Соболева $W_p^l(\mathfrak{D})$. В пятом разделе мы вернемся к теории обобщенных функций и их применениям к уравнениям с частными производными.

6

Системы уравнений. Работы И. Г. Петровского

До сих пор мы говорили главным образом об одном уравнении. Переходим к системам уравнений. Большое число конкретных систем дает нам математическая физика — теория упругости, гидродинамика, электродинамика и т. д.

В тридцатых годах появились фундаментальные работы И. Г. Петровского по теории систем уравнений с частными производными, где выделены основные классы систем — эллиптические, параболические и гиперболические (по Петровскому) — и проведено их исследование.

Приведем определение систем, эллиптических по Петровскому, для случая линейных систем N уравнений с N неизвестными функциями $u^{(1)}, \dots, u^{(N)}$ от n независимых переменных $x (x_1, \dots, x_n)$. Пусть m_k — порядок старших производных функции $u^{(k)}$. Систему можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^N \sum_{l_1, \dots, l_m} a_{l_1 \dots l_m}^{jk} \frac{\partial^{m_k} u^{(k)}}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_m}} = f_j(x) \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (46)$$

Внутреннее суммирование производится по значениям индексов от единицы до n , причем $m \leq m_k$ при данном k . Индексы отсутствуют, если $u^{(k)}$ не дифференцируется. Система называется эллиптической по Петровскому, если определитель квадратной матрицы

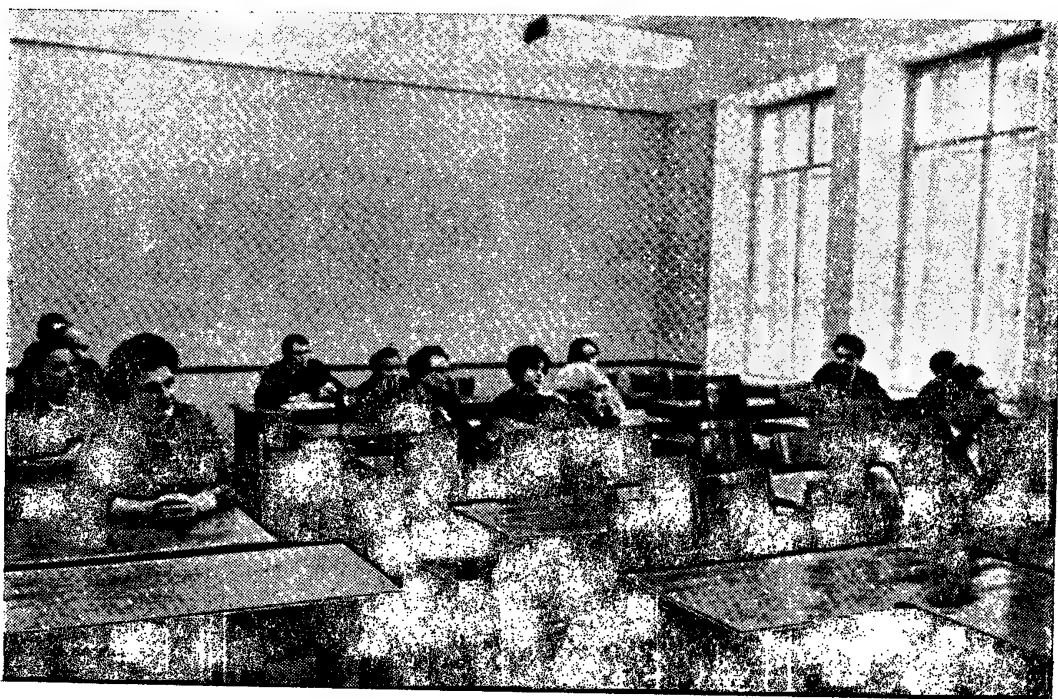
$$\|A_{jk}(\xi)\| = \left\| \sum_{l_1, \dots, l_{m_k}} a_{l_1 \dots l_{m_k}}^{jk} \xi_{l_1} \dots \xi_{l_{m_k}} \right\| \quad (47)$$

при всех вещественных $\xi_1, \dots, \xi_n$, сумма квадратов которых равна единице, отличен от нуля в соответствующей области изменения x .

Для таких систем И. Г. Петровский доказал, что любое их достаточно гладкое решение есть аналитическая функция от x , если коэффициенты и свободные члены системы — аналитические функции от x . Это им доказано и для нелинейных систем эллиптического типа

$$F_j(x, u^{(1)}, \dots, u^{(N)}, p_{l_1 \dots l_{m_k}}^{(k)}) = 0,$$

где $p_{l_1 \dots l_{m_k}}^{(k)} = u_{x_{l_1} \dots x_{l_{m_k}}}^{(k)}$, если левые части — аналитические функции своих аргументов. Эллиптичность определяется аналогично случаю линейной системы, причем $a_{l_1 \dots l_{m_k}}^{jk}$ надо заменить на частную производную от F_j по



Научный семинар акад. И. Г. Петровского. 1967 г.

$p_{l_1 \dots l_m}^{(k)}$. И. Г. Петровским доказана, при естественных условиях, и аналитичность гладких решений по некоторым независимым переменным. Им доказано также, что если существует такая система вещественных чисел ξ_k , не состоящая из одних нулей, которая обращает определитель матрицы (47) в нуль, и этот определитель не меняет знака и не равен нулю тождественно, то системы (46) с постоянными коэффициентами и аналитическими правыми частями могут иметь сколь угодно гладкие решения, которые не являются аналитическими функциями.

Не останавливаясь на общем определении параболических систем, приведем его для систем вида

$$\frac{\partial u^f}{\partial t} = \sum_{k=1}^N P_{jk} \left(t, \frac{\partial}{\partial x} \right) u^{(k)}(x, t), \quad (48)$$

где P_{jk} — многочлены по второму аргументу с коэффициентами, зависящими от t . Пусть $P \left(t, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ — матрица $\|P_{jk}\|$ и $P \left(t, \frac{\partial}{\partial x} \right) = P_0 + P_1$, где P_0 — матрица из дифференциальных операторов наивысшего порядка, входящих в систему (48). Система (48) называется параболической по Петровскому, если матрица $P(t, i\xi)$, где $\xi (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — вектор, соответствующий вектору $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$, имеет при $\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 = 1$ собственные значения с отрицательными вещественными частями.

На определении гиперболических по Петровскому систем мы не останавливаемся. Свойства решений таких систем сходны со свойствами решений одного гиперболического уравнения.

В дальнейшем будем применять термин «равномерная корректность задачи Коши». Для системы (48) в этой задаче к системе присоединяются начальные условия

$$u_j|_{t=t_0} = \varphi_j(x) \quad (0 \leq t_0 < T < \infty). \quad (49)$$

Задача Коши называется поставленной равномерно корректно на промежутке $t_0 \leq t \leq T$, если при любых достаточно гладких $\varphi_j(x)$ и любом выборе t из указанного промежутка она имеет единственное достаточно гладкое решение, которое меняется мало при малом изменении $\varphi_j(x)$ (в метриках соответствующих пространств C_l). И. Г. Петровским дано необходимое и достаточное условие («условие А») равномерной корректности задачи Коши. Отметим связь условия А для систем (48) с их преобразованием Фурье по переменным $x(x_1, \dots, x_n)$. Применение к системам (48) этого преобразования приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих параметр $s(s_1, \dots, s_n)$:

$$\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} = \sum_{k=1}^N P_{jk}(t, is) \tilde{u}_k(t, s). \quad (50)$$

Условие А сводится при этом к тому, чтобы у последней системы существовала так называемая фундаментальная система решений с ростом по s не выше степенного. Система решений уравнений (50) называется фундаментальной, если для одной из функций $\tilde{u}_j$ начальное значение при $t = 0$ считается равным единице, а для остальных — нулю.

И. Г. Петровский доказал, что условие А равномерной корректности выполняется для систем параболического и гиперболического типов в классе ограниченных функций $\varphi_j(x)$ с ограниченными производными до некоторого порядка. Для линейных систем гиперболического типа с переменными коэффициентами он решил задачу Коши «в большом» по t , а для квазилинейных систем того же типа (линейных относительно производных высших порядков) — ту же задачу «в малом». Центральное место при решении последней задачи занимает вывод «основного энергетического неравенства», которое получается путем применения преобразования Фурье по переменным x . Задача решается при предположении большой гладкости данных и локально по малым областям.

Большая работа (1946 г.) И. Г. Петровского посвящена исследованию лакун для уравнений высоких порядков и систем гиперболического типа. Об этом более подробно будет сказано в четвертом разделе.

Исследования И. Г. Петровского были продолжены в разных направлениях. В пятидесятых годах И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов и их ученики начали исследования задачи Коши для общих линейных систем с постоянными коэффициентами или коэффициентами, зависящими от t , на основе развитой ими теории различных пространств

обобщенных функций. В частности, ими широко применялось преобразование Фурье быстро растущих функций. При этом значительно расширилось определение параболических и гиперболических систем, а корректность решения задачи Коши и его единственность были установлены в классах быстро растущих на бесконечности функций. Подробнее весь этот материал будет освещен в пятом разделе главы.

Л. Н. Слободецкий и С. Д. Эйдельман изучали линейные параболические системы с гладкими коэффициентами, зависящими от t и x . Эйдельман доказал для них классическую разрешимость задачи Коши при максимально возможном росте начальных данных, а Слободецкий подробно исследовал случай неоднородных систем. Разрешимость смешанных задач при общих предельных условиях как для систем параболических по Петровскому, так и для более общих систем исследовал В. А. Солонников.

7

Граничные задачи. Проблема индекса

Здесь опишем постановку общих граничных задач для эллиптических уравнений, а также определим некоторые важные понятия, существенно используемые при исследовании таких задач. Эти понятия будут систематически применяться во втором разделе главы.

Общая краевая задача для одного уравнения порядка $2k$ в области $\mathfrak{D} \subset R_n$ с границей S заключается в отыскании функции u , удовлетворяющей уравнению эллиптического типа

$$\mathcal{L}u = \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x) D^\alpha u + \dots = f(x) \quad (51)$$

в области $\mathfrak{D}$ и граничным условиям

$$B_j u|_S \equiv \left[\sum_{|\alpha|=m_j} b_{j\alpha}(x) D^\alpha u + \dots \right]_S = h_j(x), \quad j = 1, \dots, k. \quad (52)$$

В уравнении и граничных условиях выписаны только старшие члены. При точной постановке задачи требуется указать, в каком классе функций ищется решение; этим обстоятельством определяется также и то, в каком смысле должны удовлетворяться уравнение и граничные условия.

Если, например, $B_j u = \frac{\partial^{j-1} u}{\partial \nu^{j-1}}$ ($j = 1, \dots, k$), то говорят о первой краевой задаче. В случае, когда $k = 1$, это классическая задача Дирихле. Аналогично ставятся краевые задачи и для эллиптических систем уравнений; точные формулировки требуют здесь более громоздкой записи и мы их рассмотрим во втором разделе.

Оказывается, что многие важные свойства задачи (51) — (52) определяются некоторыми алгебраическими соотношениями, связывающими коэффициенты уравнения (51) и граничные условия (52). Эти соотношения означают, что граничные условия и уравнение являются в определенном смысле независимыми. Для ряда частных случаев (например,

для уравнения Лапласа при общих граничных условиях) такое соотношение было получено И. Н. Векуа. Для случая систем граничное условие дано в работах (1953 г.) И. Б. Лопатинского и З. Я. Шапиро и в нашей литературе его часто называют условием Шапиро — Лопатинского или условием дополнительности. Позже для этого условия американские математики Агмон, Дуглис и Ниренберг нашли другую, более удобную и общую форму. Сейчас его называют также условием коэрцитивности.

Сформулируем указанное условие для задачи (51) — (52). Рассмотрим характеристические полиномы, отвечающие главным членам уравнения и граничных условий:

$$\mathcal{L}^0(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

$$B_j^0(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m_j} b_{j\alpha}(x) \xi^\alpha.$$

Пусть x_0 — какая-либо точка границы S ; ν — направление внутренней нормали к S в этой точке; ξ — какой-либо касательный вектор к S в точке x_0 , так что $(\xi, \nu) = 0$. Условие коэрцитивности формулируется так: никакая ненулевая линейная комбинация полиномов $B_j^0(x_0, \xi + \tau\nu)$ от τ не должна делиться на полином

$$\prod_{s=1}^k (\tau - \tau_s^+(\xi)),$$

где $\tau_s^+(\xi)$ — корни «характеристического уравнения» $\mathcal{L}^0(x_0, \xi + \tau\nu) = 0$, имеющие положительные мнимые числа. При достаточно общих условиях (исключения могут быть лишь для уравнений с комплексными коэффициентами на плоскости), число таких корней равно k . Уравнения (а также системы), у которых корни характеристического уравнения поровну распределены между верхней и нижней полуплоскостями комплексной плоскости, называют правильно эллиптическими.

Сформулированное условие должно выполняться при любом выборе точки $x_0 \in S$ и вектора $\xi \neq 0$. Иначе его можно записать в виде неравенства нулю определителя с элементами

$$B_j^0(x_0, \xi + \tau_s^+(\xi)\nu) \quad (j, s = 1, \dots, k).$$

Аналогичный, но более громоздкий вид имеет условие коэрцитивности для эллиптической системы. Его происхождение станет ясным, если предположить, что задача рассматривается в полупространстве, уравнение и предельные условия содержат лишь члены со старшими производными, а коэффициенты постоянны. При этих условиях применение преобразования Фурье сводит задачу к исследованию линейной алгебраической системы, коэффициенты которой зависят от вектора ξ , лежащего в граничной плоскости, как от параметра. Смысл условия коэрцитивности (условия Шапиро — Лопатинского) заключается в том, что определитель упомянутой системы не должен обращаться в нуль ни при

одном значении $\xi \neq 0$. Отметим, что после решения задачи для полупространства задача в произвольной области решается с помощью интегральной суперпозиции решений для полупространств, границы которых — касательные плоскости к границе области.

Большое значение при исследовании предельных задач имеют априорные оценки их решений, о которых мы упоминали при изложении работ С. Н. Бернштейна, и особенно так называемые точные априорные оценки. Поясним, в чем состоит смысл понятия точной априорной оценки. При этом ограничимся рассмотрением задачи (51) — (52) при однородных предельных условиях.

Предположим, что достаточно гладкая функция u удовлетворяет в классическом смысле уравнению (51) и однородным граничным условиям (52). Оказывается, что при определенных предположениях справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^{2k}(\mathfrak{D})} \leq C \|f\|_{L_r(\mathfrak{D})} + C_1 \|u\|_{L_r(\mathfrak{D})}, \quad (53)$$

где положительные постоянные C и C_1 определяются коэффициентами уравнения и предельных условий, а также свойствами границы S . Оценка (53) является предельно точной в том смысле, что правая часть этого неравенства, очевидно, также оценивается через левую. Оценки вида (53) называются априорными, поскольку они выводятся в предположении, что функция u удовлетворяет условиям рассматриваемой задачи; вопрос о существовании такой функции при этом не рассматривается.

В случае первой краевой задачи для уравнения второго порядка в плоской выпуклой области $\mathfrak{D}$ такого рода оценка при $k = 1$ следует из результатов С. Н. Бернштейна. Для общих линейных уравнений второго порядка при классических предельных условиях 1, 2, и 3-го рода такие априорные оценки были установлены О. А. Ладыженской. С. Г. Михлин дал иное доказательство неравенства (53) для оператора Лапласа в шаре при первом краевом условии.

В работах О. В. Гусевой, А. И. Кошелева, Л. Н. Слободецкого, М. З. Соломяка и В. А. Солонникова для уравнений и систем найдены оценки вида (53), а также аналогичные оценки в L_p и в пространствах Гельдера, при различных предельных условиях. Более подробно об этом будет сказано в дальнейшем.

Отметим, что современные методы получения априорных оценок в значительной степени исходят из идей Ю. Шаудера (работы 30-х годов). Шаудер получил оценки для уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в нормах Гельдера, сводя вопрос к оценкам для уравнений с постоянными коэффициентами во всем пространстве и полупространстве. Это производилось с помощью разбиения области на малые подобласти и «замораживания» коэффициентов для отдельных подобластей. Для внутренних подобластей задача приводится к задаче во всем пространстве, для граничных подобластей — к задаче в полупространстве.

Определим теперь понятия регулярной разрешимости и нормальной разрешимости граничной задачи. Эти понятия заимствованы из теории операторов; в соответствующих случаях оператор граничной за-

дачи называют фредгольмовым или же нетеровым. Ограничимся снова случаем однородных предельных условий (52), откладывая более громоздкие формулировки, относящиеся к общему случаю, для второго раздела главы.

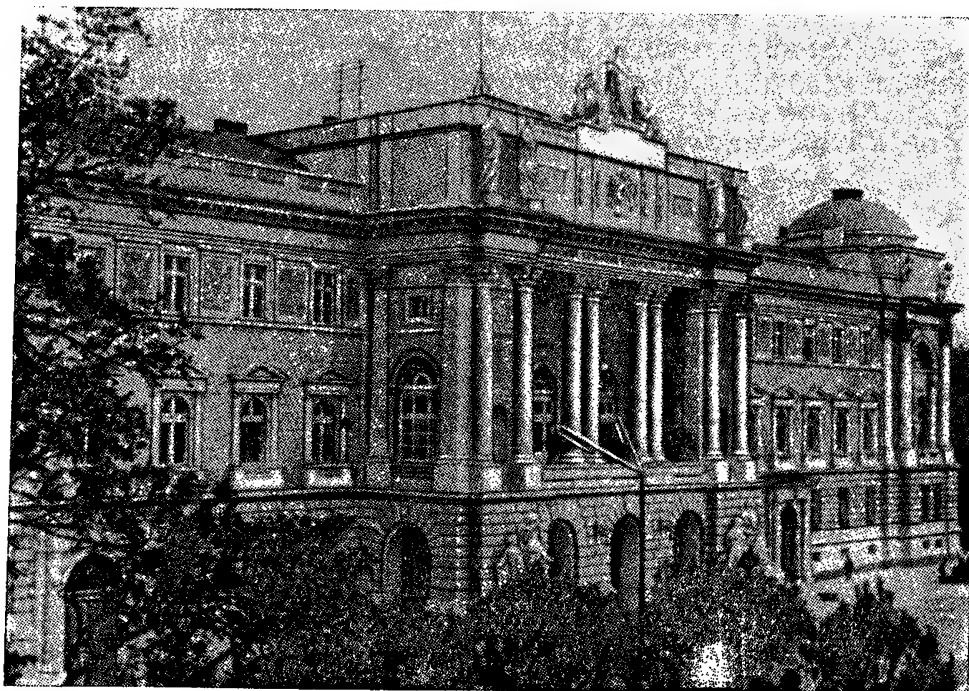
Пусть для определенности уравнение (51) при однородных предельных условиях (52) решается в пространстве $L_2(\mathfrak{D})$. Рассмотрим оператор, определяемый левой частью дифференциального уравнения (51) на множестве гладких функций, удовлетворяющих однородным граничным условиям. Замыкание этого оператора обозначим через A , сопряженный оператор — через A^* . Пусть $N(A)$ и $N(A^*)$ соответственно подпространства нулей операторов A и A^* , $R(A)$ — область значений оператора A . Оператор A (или, что то же, рассматриваемая предельная задача) называется нормально разрешимым (нетеровым), если подпространства $N(A)$ и $N(A^*)$ имеют конечную размерность, а линейное множество $R(A)$ замкнуто. Пусть α и β — размерности подпространств $N(A)$ и $N(A^*)$. Разность $k = \alpha - \beta$ называется индексом оператора A и соответствующей краевой задачи. Если $\alpha = \beta$, то задача называется регулярно разрешимой или фредгольмовой.

Отметим, наконец, понятие регуляризатора оператора A . Оператор B называется (двусторонним) регуляризатором оператора A , если справедливы соотношения $AB = I + T_1$, $BA = I + T_2$, где I — единичный, а T_1, T_2 — вполне непрерывные операторы.

Оказывается, что все перечисленные выше свойства предельных задач (выполнение условия коэрцитивности, наличие априорных оценок, нормальная разрешимость, существование регуляризатора) тесно связаны между собой. Именно, все эти свойства равносильны: выполнение одного из них влечет выполнение и всех остальных. Это следует из работ американских и советских математиков (Агмона, Дуглиса, Ниренберга, Браудера, Шехтера, Слободецкого, Солонникова и др.), выполненных в период с 1956 г. по 1963 г. Описанные здесь факты верны, конечно, лишь при определенных ограничениях на гладкость границы области и коэффицентом уравнения. Мы не останавливаемся на формулировке этих ограничений.

Легко проверить, что, например, первая краевая задача для одного эллиптического уравнения порядка $2k$ всегда нормально разрешима, так как для нее условие коэрцитивности, очевидно, выполняется. Следует лишь исключить те случаи, когда число корней характеристического уравнения в верхней полуплоскости не равно k . На самом деле, упомянутая задача даже регулярно разрешима. Этот факт был ранее доказан М. И. Вишиком. Большое стимулирующее влияние на развитие теории общих граничных задач оказал простой пример, построенный А. В. Бицадзе (1948 г.): было обнаружено, что существуют такие эллиптические по Петровскому системы 2-го порядка, для которых задача, аналогичная классической задаче Дирихле, имеет бесчисленное множество линейно независимых решений в круге сколь угодно малого радиуса. Тем самым такая задача не является нетеровой.

Вскоре М. И. Вишик (1951 г.) выделил более узкий класс системы (так называемые сильно эллиптические системы), для которых основ-



Львовский государственный университет им. Ивана Франко.

ные классические задачи регулярно разрешимы в произвольных областях. Впоследствии оказалось, что на сильно эллиптические системы распространяются почти все основные факты, верные для одного уравнения.

С другой стороны, анализ алгебраических закономерностей, управляющих свойствами предельных задач для общих систем, привел (1953 г.) З. Я. Шапиро и Я. Б. Лопатинского к формулировке их условия. Разумеется, для систем, построенных А. В. Бицадзе, это условие не выполняется.

Работы по индексу первоначально относились к двумерному случаю. И. Н. Векуа вычислил индекс краевых задач для уравнения

$$\Delta u + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = f(x, y)$$

и для системы, являющейся обобщением системы Коши — Римана. А. И. Вольперт, продолжая исследования И. Н. Векуа, нашел формулу для индекса общей краевой задачи для произвольной эллиптической системы на плоскости. Подробнее об этих работах, оказавших большое влияние на последующие исследования, посвященные вычислению индекса, будет сказано в § 2 второго раздела.

В 1960 г. И. М. Гельфанд поставил вопрос о вычислении индекса любой нормально разрешимой предельной задачи и связанный с этим вопрос о гомотопической природе множества всех эллиптических предельных задач. Иначе говоря, речь идет о разбиении множества всех таких задач на классы таким образом, что в каждом из них две задачи можно связать параметром, при непрерывном изменении которого ус-

ловия эллиптичности и коэрцитивности не нарушаются. Из результатов Аткинсона и И. Ц. Гохберга, относящихся к общей теории операторов, следует, что все задачи, принадлежащие одному классу, имеют одинаковый индекс.

А. С. Дынин показал (1961 г.), что при продолжении по параметру полезно обобщить класс допустимых предельных условий типа (52), включая в них коэффициенты, являющиеся сингулярными интегральными операторами. Такие предельные задачи получили название интегро-дифференциальных граничных задач. Это пополнение класса задач сыграло важную роль в дальнейшем в известных работах Атьи и Зингера, в которых была решена проблема индекса, использовалась идея Дынина.

Сформулированные в этом параграфе понятия переносятся на системы, более общие, чем эллиптические в смысле И. Г. Петровского, — так называемые системы, эллиптические по Дугласу — Ниренбергу. Большинство результатов, о которых здесь говорилось, также переносятся на эти системы. Исследованию таких систем и краевых задач для них посвящены работы Л. Р. Волевича и В. А. Солонникова.

Отметим, что понятие индекса впервые в отчетливой форме появилось в работе Ф. Нетера (1921 г.) по одномерным сингулярным уравнениям. Уравнения такого типа встречались и в работах Пуанкаре и Гильберта.

Теория одномерных сингулярных уравнений и связанная с нею теория предельных задач для аналитических функций были широко развиты в работах Н. М. Мусхелишвили, И. Н. Векуа, Ф. Д. Гахова и их учеников. Эти проблемы тесно связаны с теорией эллиптических систем на плоскости.

Многомерные сингулярные интегральные уравнения получили широкое развитие в работах С. Г. Михлина и ряда других отечественных и зарубежных ученых.

В заключение параграфа опишем постановку одной конкретной предельной задачи, которая служила и продолжает служить предметом многих исследований и моделью для ряда общих построений. Речь идет о так называемой задаче с косой производной, впервые в плоском случае рассмотренной Пуанкаре. В этой задаче $\mathcal{L}u$ — эллиптический оператор второго порядка, а единственный граничный оператор имеет вид $Bu = \frac{\partial u}{\partial l}$, где $l = l(x)$ — направление, зависящее от точки $x \in S$.

Эта задача на плоскости является, как теперь доказано, нормально разрешимой. Но уже при $n = 3$, если направление l в некоторых точках касается граничной поверхности, это нельзя утверждать: в точках, где происходит касание, условие коэрцитивности нарушается.

Во втором разделе главы будем подробно говорить об исследовании этой и подобных задач.

Метод сеток

Рассмотрим работы по применению метода конечных разностей (метода сеток) к задачам для уравнений с частными производными различных типов. Этот метод в применении к обыкновенным дифференциальным уравнениям ведет свое начало от метода ломаных Эйлера для решения задачи Коши. Он широко применялся в различных аспектах в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В теории уравнений с частными производными его стали применять лишь в XX веке. Он играет большую роль как в численном решении задач, так и в их теоретическом анализе. Большой вклад в проблему применения разностных методов к уравнениям с частными производными внесли работы отечественных ученых.

Наметим в общих чертах схему метода конечных разностей. Пусть в области ищется решение дифференциального уравнения

$$\mathcal{L}u = f \quad (54)$$

при дополнительных (предельных, начальных) условиях

$$l_i u = 0 \quad (i = 1, \dots, N). \quad (55)$$

В пространстве независимых переменных выбирается система точек (решетка) $\mathfrak{D}_h$, причем беспредельное измельчение решетки обозначим символом $h \rightarrow 0$. На $\mathfrak{D}_h$ определяется функция u_h как решение некоторого разностного уравнения

$$\mathcal{L}_h u_h = f_h, \quad (56)$$

подчиняющееся условиям

$$l_{ih} u_h = 0 \quad (i = 1, \dots, N). \quad (57)$$

Соотношения (56), (57) являются системой алгебраических уравнений, из которой определяются u_h в точках решетки. Разностные операторы $\mathcal{L}_h$ и l_h выбираются так, чтобы они аппроксимировали $\mathcal{L}$ и l , т. е. чтобы на любых достаточно гладких функциях v операторы $\mathcal{L}_h v$ и $l_h v$ стремились при $h \rightarrow 0$ к $\mathcal{L}v$ и lv в каких-либо нормах. Кроме того, $\mathcal{L}_h$ и l_h стараются выбрать так, чтобы u_h , определяемые из соотношений (56) и (57), сходились при $h \rightarrow 0$ к решению задачи (54) — (55). При этом существенным является выбор как решеток $\mathfrak{D}_h$, так и операторов $\mathcal{L}_h$ и l_h .

Сходимость u_h к u , чаще всего, устанавливается так: сначала доказывается равномерная по h ограниченность каких-либо норм u_h (что означает устойчивость разностной схемы), после чего применяются «теоремы вложения в разностях», позволяющие заключить на основании ограниченности $\{u_h\}$ о ее компактности в некоторых, вообще говоря, подчиненных нормах. Второй этап не связан с видом операторов $\mathcal{L}_h$ и l_h .

Первой работой, содержащей полный теоретический анализ задачи, была работа Л. А. Люстерника (1926 г.). В ней рассмотрена задача Ди-

рихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, в ограниченной области $\mathfrak{D}$ плоскости. Уравнение заменено разностным

$$\Delta_h u = u_{x_1 \bar{x}_1} + u_{x_2 \bar{x}_2} = 0, \quad (58)$$

выражающим в разностях присущее гармоническим функциям свойство: значения u_h во внутренних точках решетки равны среднему арифметическому значений u_h в четырех ближайших точках решетки. Обозначение $u_{x_i}(x)$ соответствует разности $\frac{1}{\Delta x_i} [u(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - u(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)]$, а обозначение $u_{\bar{x}_i}(x)$ — разности $\frac{1}{\Delta x_i} [u(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) - u(x_1, \dots, x_i - \Delta x_i, \dots, x_n)]$.

Задача решается при весьма общих предположениях о контуре и подробно исследуется поведение полученной гармонической внутри области функции при приближении к контуру (непрерывность при приближении к «точкам плотности» контура). Необходимо отметить работу Р. Куранта, К. Фридрихса и Г. Леви (1928 г.), в которой были даны сходящиеся разностные схемы для задачи Дирихле и задачи о собственных функциях для многомерного уравнения Лапласа и задачи Коши для одномерных гиперболического уравнения и уравнения теплопроводности, причем для гиперболических уравнений была выявлена необходимость согласования шагов решетки по x и t . В работе И. Г. Петровского (1938 г.) методом конечных разностей решена задача Дирихле для уравнения Лапласа в многомерном случае, причем основное внимание уделено вопросу о принятии граничных значений в классическом смысле. Сходимость внутри области доказана с помощью оценок типа точечных оценок С. Н. Бернштейна. Отметим еще работу И. Г. Петровского и Н. Н. Смирнова, а также работу С. Л. Соболева, где устанавливаются новые условия компактности для семейств функций, заданных на сгущающихся решетках. В работах О. А. Ладыженской устанавливаются теоремы вложения в разностях, аналогичные теоремам вложения Соболева — Кондрашова. Теоремы Ладыженской позволили свести доказательства сходимости разностных схем к доказательству их устойчивости.

Переходим к применению разностного метода для нестационарных уравнений. В конце 40-х годов был построен общий способ анализа разностных схем для таких уравнений, соответствующий в дифференциальных уравнениях методу разложения в ряды или интегралу Фурье. Согласно этому методу, берутся функции, составляющие полный набор собственных функций на решетке простейшего разностного оператора $\frac{\Delta}{\Delta x}$, а тем самым и любого другого линейного оператора с постоянными коэффициентами, при условии периодичности и с их помощью строится конечномерный аналог разложения произвольной функции в ряд Фурье. Если рассмотрения ведутся во всем пространстве, то берется разностный аналог интеграла Фурье. Упомянутые выше собственные функции имеют вид $e^{i(k, x)}$ с определенными векторами k ($k_1, \dots, k_n$). Разложения по ним произвольных функций на решетке являются ортогональными. Искомое решение u_h представляется суммой слагаемых вида $a_h(m\Delta t) e^{i(k, x)}$ ($m =$

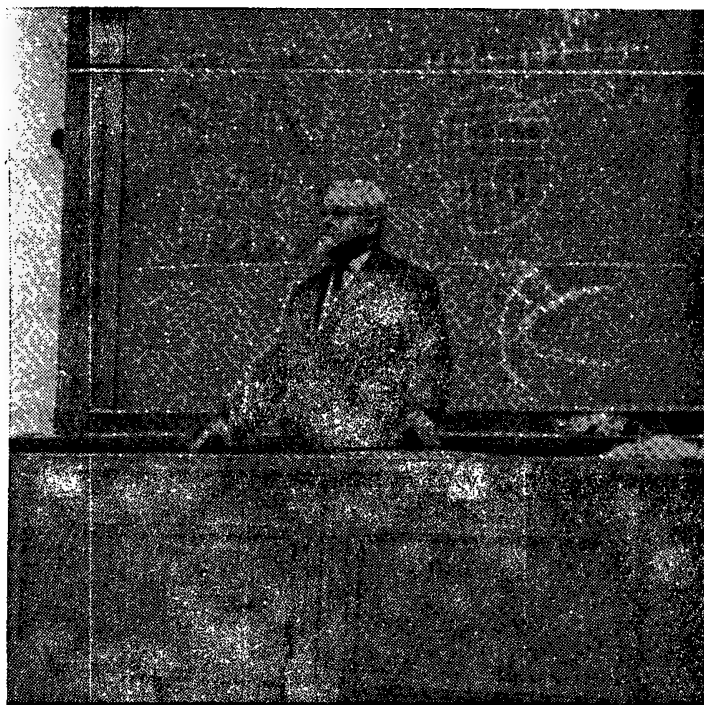
$= 0, 1, \dots$) и для каждого слагаемого исходные разностные уравнения порождают разностные уравнения для $a_k(m\Delta t)$ ($m = 0, 1, \dots$), которые при постоянных коэффициентах решаются в конечном виде. Указанная схема применима и в случае коэффициентов, зависящих от t . Она дает возможность проанализировать разностную схему и выяснить условия, которым надо подчинить Δx и Δt , чтобы схема оказалась сходящейся.

Указанный метод был предложен независимо фон Нейманом и О. А. Ладыженской. С помощью этого метода Ладыженская доказала сходимость двух разностных схем для общих линейных и нелинейных гиперболических систем Петровского. Одна из них (явная) сходится лишь при определенных соотношениях величин Δx и Δt , а другая (неявная), требующая решения алгебраических систем, сходится без такого ограничения. Эти исследования были продолжены В. С. Рябенским, который рассмотрел многослойные разностные схемы в задаче Коши для линейных гиперболических систем с постоянными или зависящими от t коэффициентами. В последующих работах В. С. Рябенского и А. Ф. Филиппова вместо применяемых в предыдущих работах разложений в суммы Фурье по $e^{i(k,x)}$ берется разложение по собственным функциям оператора $\mathcal{L}_h$ в ограниченной области изменения x ($x_1, \dots, x_n$).

В пятидесятые годы метод конечных разностей применялся ко многим уравнениям и системам с переменными коэффициентами. О. А. Ладыженская и Д. М. Эйдуз построили сходящиеся разностные схемы для граничных задач и задач на определение собственных чисел и собственных функций эллиптических операторов. В большинстве работ этого периода метод конечных разностей проводится без предположения о существовании решения задачи, а приводит сам к этому результату.

О. А. Ладыженская построила сходящиеся разностные схемы для смешанных задач для уравнений гиперболического и параболического типа, в том числе и при разрывных коэффициентах, а также для абстрактных уравнений. Исследование этих предельных задач проведено ею без использования разложений по $e^{i(k,x)}$. В основу положена идея получения первоначально не классического, а обобщенного решения задачи, причем широко применяются теоремы функционального анализа, «формулы суммирования по частям» и «теоремы вложения» в разностях. В 1931 г. Роте был предложен иной метод решения линейных параболических уравнений, при котором разностным отношением заменяется только $\frac{\partial}{\partial t}$. О. А. Ладыженская и Т. Д. Вентцель исследовали этот метод в задаче Коши и смешанной задаче для квазилинейных уравнений параболического типа.

В ряде работ (Н. Н. Мейман, В. С. Рябенский, А. Ф. Филиппов и др.) исследовалась устойчивость разностных схем и ее связь со сходимостью схем. Устойчивость разностной схемы означает, что малые изменения известных величин, входящих в схему, вызывают и малые изменения u_h , причем эта малость равномерна для всей последовательности размельчающихся сеток. Точные формулировки требуют указания тех



Акад. А. Н. Тихонов читает лекцию в Московском университете. 1967 г.

пространств, в нормах которых рассматривается устойчивость и сходимость. В большом цикле работ А. Н. Тихонова и А. А. Самарского (совместных и отдельных) изучаются вопросы аппроксимации и сходимости предложенных ими разностных схем, пригодных для приближенного решения линейных одномерных параболических уравнений, коэффициенты которых могут быть разрывными функциями. Они исследовали также возможности применения сеток с переменным шагом (неравномерные сетки) и изучали экономные способы решения линейных алгебраических систем, возникающих при применении метода сеток. В работах Н. Н. Яненко, А. А. Самарского, Е. Г. Дьяконова и др. исследуется так называемый метод дробных шагов для уравнений параболического типа.

С. К. Годунов и В. С. Рябенский исследовали устойчивость разностных схем на основе спектральных свойств соответствующих разностных операторов. Приведем соответствующее определение, принятое ими. Точка λ называется точкой спектра семейства операторов $\{R_h\}$, если при любых $\varepsilon > 0$ и $h_0 > 0$ существует такое h , $h < h_0$, что неравенство $\|R_h u - \lambda u\| < \varepsilon \|u\|$ имеет решение. Для устойчивости задачи вида $u^{m+1} = R_h u^m$ ($m = 0, 1, \dots$) необходимо, чтобы спектр $\{R_h\}$ лежал в единичном круге. Несколько работ Л. И. Камынина посвящено исследованию метода прямых, являющегося обобщением известного метода Рунге для параболического уравнения.

Уравнения эллиптического типа

1

Классические уравнения эллиптического типа

Решению краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона методами теории потенциала в России в XIX в. были посвящены исследования А. М. Ляпунова и В. А. Стеклова. Это направление продолжено Н. М. Гюнтером и подытожено в его монографии «Теория потенциала», которая была опубликована сначала в Париже в серии монографий, издававшейся Борелем. В этой книге уточняются и подробно изучаются свойства непрерывности и гладкости потенциалов простого и двойного слоя, а также объемного потенциала. В последующем издании на русском языке Х. Л. Смолицкий упростил ряд доказательств и добавил новый материал.

Д. М. Эйдуc получил оценки функции Грина и ее производных для уравнения Лапласа в случае задачи Дирихле, аналогичные соответствующим оценкам для фундаментального решения $\frac{1}{r}$. Эти результаты были перенесены Х. Л. Смолицким на вторую и третью краевые задачи. Им же получены оценки производных собственных функций задачи Дирихле для оператора Лапласа через степени соответствующих собственных чисел.

В тридцатых годах появился ряд работ В. Д. Купрадзе, посвященных исследованиям методами теории потенциала краевых задач для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + \lambda u = 0,$$

где $\lambda > 0$ — заданное число, а также для систем уравнений, соответствующих установившимся режимам при упругих и электромагнитных колебаниях как для изотропных, так и для анизотропных тел. Эти исследования В. Д. Купрадзе и его ученики развивают и в настоящее время. Представление о них может дать недавно вышедшая его монография «Методы потенциала в теории упругости». Здесь с помощью различных типов потенциалов краевые задачи сводятся к интегральным уравнениям, фредгольмовым и сингулярным, что позволяет изучить разрешимость и дифференциальные свойства решений.

В трехмерном случае А. В. Бицадзе подробно изучил и применил к решению граничных задач для уравнения Лапласа трехмерный интеграл типа Коши.

В недавних работах Ю. Д. Бураго, В. Г. Мазы и В. Д. Сапожниковой найдены необходимые и достаточные условия относительно границы двумерной области, обеспечивающей разрешимость основных краевых задач для уравнения Лапласа методами теории потенциала.

Другое направление в теории потенциала, уходящее своими истоками в исследования Пуанкаре и Винера, получило дальнейшее разви-

тие в совместной работе М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева (1937 г.) и в работе М. В. Келдыша (1941 г.). В последней работе различные вопросы, связанные с задачей Дирихле для уравнения Лапласа в области с произвольной границей, решаются с широким использованием понятий емкости (по Винеру) и гармонической меры точечных множеств. Подробно исследуется поведение обобщенного решения задачи Дирихле (по Перрону — Винеру) при приближении к границе. В частности, исследуется множество предельных значений обобщенного решения в иррегулярных точках и устанавливаются необходимые и достаточные условия на границу области, гарантирующие разрешимость задачи Дирихле (в смысле непрерывности решения вплоть до границы). В работе М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева впервые обнаружено явление неустойчивости решения при вариации границы, введены и изучены понятия устойчивости внутри замкнутой области, а также понятие точки устойчивости границы. Это направление было продолжено в работах Н. С. Ландкофа, который исследовал, в частности, множества иррегулярных граничных точек.



Х. Л. Смолицкий.

Решение задачи Дирихле вариационным методом для полигармонического уравнения $\Delta^m u \equiv 0$ в том случае, когда граница области состоит из кусков различных размерностей, рассматривалось в работе С. Л. Соболева. Если n — число независимых переменных, то оказывается, что на куске границы размерности $(n - r)$ можно задавать производные до порядка $m - \left[\frac{r}{2} \right] - 1$, где $\left[\frac{r}{2} \right]$ — целая часть числа $\frac{r}{2}$. Эти результаты в последнее время получили обобщения на общие эллиптические системы.

Ряд результатов, которые мы могли бы отнести к теме настоящего параграфа, здесь не упомянуты, так как они в равной мере связаны с другими методами изучения общих эллиптических операторов и будут отмечены в соответствующих разделах.

2

Эллиптические уравнения на плоскости

Много работ по теории эллиптических уравнений и систем на плоскости тесно связано с теорией аналитических функций и различными её приложениями: к газовой динамике, теории волн, теории поверхностей, безмоментной теории оболочек. Основопола-

гающими работами в этом направлении являются работы М. А. Лаврентьева и И. Н. Векуа.

В большом цикле работ М. А. Лаврентьева рассматриваются (1935—1948 гг.) системы (линейные и нелинейные) двух уравнений первого порядка для функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$. С одной стороны, построенная им теория является широким обобщением теории конформных отображений и приводит к теории так называемых квазиконформных отображений, а с другой стороны рассматриваемые М. А. Лаврентьевым системы связаны с уравнениями газовой динамики. В первом случае условия, налагаемые на систему, касаются эллиптичности по Петровскому и некоторого дополнительного условия геометрического характера, а во втором случае обобщают условие того, что скорость потока не превосходит скорости звука. Работы Лаврентьева по квазиконформным отображениям тесно связаны с теорией функций комплексного переменного. В работах Лаврентьева доказаны соответствующие теоремы существования и исследованы свойства решений систем. Б. В. Шабат, Г. Н. Положий и ряд других отечественных математиков продолжали работы М. А. Лаврентьева.

Переходим к работам И. Н. Векуа. Большая часть их собрана в двух монографиях. В первой из них «Новые методы решения эллиптических уравнений» (1948 г.) рассматриваются уравнения вида

$$u_{xx} + u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y), \quad (59)$$

где a, b, c, f — функции, аналитические в некоторой области $\mathfrak{D}_0$. Эти функции продолжаются в область комплексных значений независимых переменных, и уравнение (59) записывается в виде

$$u_{z\bar{z}} + A(z, \bar{z})u_{\bar{z}} + B(z, \bar{z})u_z + C(z, \bar{z})u \equiv F(z, \bar{z}), \quad (60)$$

где

$$z = x + yi; \quad \bar{z} = x - yi; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right);$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Функции A, B, C, F аналитичны в некотором бигеоландре $(\mathfrak{D}_z, \mathfrak{D}_{\bar{z}})$, где $\mathfrak{D}_z$ — односвязная область, принадлежащая $\mathfrak{D}_0$, а область $\mathfrak{D}_{\bar{z}}$ симметрична $\mathfrak{D}_z$ по отношению к вещественной оси.

Устанавливается, что уравнения (59) и (60) в известном смысле эквивалентны. Уравнение (60) формально есть уравнение гиперболического типа. И. Н. Векуа вводит комплексную функцию Римана $G(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z})$ и выражает с ее помощью все решения уравнения (59) через аналитические функции одной комплексной переменной. Для частных типов уравнения (59), встречающихся в математической физике, функция Римана выражается через специальные функции, а в общем случае определяется как решение интегрального уравнения типа Вольтерра. Возможность общего представления решений уравнения (59) через аналитические функции (такие представления могут быть записаны в различной форме) приводит ко многим важным следствиям.

Отметим два типа следствий. Во-первых, обнаруживается тесная аналогия между свойствами решений уравнения (59) и свойствами аналитических функций одного комплексного переменного. Во-вторых, возникает возможность исследования широкого класса граничных задач для уравнения (59) путем их приведения к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению по контуру Γ , ограничивающему область, в которой решается задача. В связи с предельными условиями задачи используются некоторые интегральные представления функций, голоморфных в области, причем интегралы по Γ содержат неизвестную плотность. Рассматриваемые предельные задачи, естественно, не всегда имеют фредгольмовский характер. Приведение их к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению дает возможность определить индекс граничной задачи.

И. Н. Векуа исследовал в указанном выше плане и уравнения вида

$$\Delta^m u + \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_k (\Delta^{m-k} u) = 0,$$

где $\mathcal{L}_k$ — линейные операторы порядка k . Весь этот круг идей был применен им к ряду задач теории упругости. С этими исследованиями Векуа связаны некоторые работы других ученых, к ним примыкают также работы по краевым задачам теории аналитических функций.

В монографии И. Н. Векуа «Обобщенные аналитические функции» (1959 г.) в основном изучается эллиптическая система первого порядка

$$\begin{aligned} u_x - v_y + a(x, y)u + b(x, y)v &= f_1(x, y), \\ u_y + v_x + c(x, y)u + d(x, y)v &= f_2(x, y) \end{aligned} \quad (61)$$

при общих предположениях о коэффициентах. Векуа доказывает, что для решений однородной системы, обладающих обобщенными производными, сохраняется ряд функциональных свойств аналитических функций: теорема единственности, интегральная формула Коши, ряды Тейлора и Лорана и др.

В работах Лихтенштейна и А. М. Лаврентьева (1935 г.) при некоторых предположениях о коэффициентах решалась задача о приведении общей однородной линейной аналитической системы к виду (61). Векуа принадлежит оригинальный, чисто аналитический подход к этой проблеме, позволивший решить ее не в малом, а в целом.

Систему (61) можно записать в виде

$$w_{\bar{\zeta}} + Aw + B\bar{w} = F \quad (w = u + v_i). \quad (62)$$

Вводятся и исследуются обобщенные решения уравнения (62) и, тем самым, системы (61). С помощью некоторого интегрального оператора, восстанавливающего функцию по ее «производной» $\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}$ с точностью до произвольной аналитической функции, уравнение (62) приводится к эквивалентному линейному интегральному уравнению (интегрирование

по области $\mathfrak{D}$). Свободный член этого уравнения содержит в виде слагаемого произвольную аналитическую функцию $\Phi(z)$. Доказывается, что если A и B принадлежат $L_p(\mathfrak{D})$, $p > 2$, то неоднородное интегральное уравнение разрешимо при любой правой части и его решение приводит к общему представлению всех решений уравнения (62) через $\Phi(z)$. Наряду с этим И. Н. Векуа получил и широко использовал различные представления решений уравнения (62). В частности, получено представление вида

$$w(z) = \Psi(z) e^{\omega(z)},$$

где $\Psi(z)$ — аналитическая функция и $\omega(z)$ — функция, непрерывная в $\mathfrak{D}$ и явно выражающаяся через $w(z)$. Кроме распространения ряда основных теорем классической теории функций комплексного переменного упомянутые выше представления решений дают возможность полностью исследовать граничную задачу для системы (61) — так называемую задачу Римана — Гильберта. Эта задача состоит в отыскании обобщенной аналитической функции $w(z)$, удовлетворяющей на Γ предельному условию

$$\operatorname{Re} [\lambda(z) w(z)] = f(z),$$

где $\lambda(z)$ — заданная комплексная и $f(z)$ — вещественная функции. При ее решении обнаруживаются те же закономерности, что и в той же задаче для классических аналитических функций. В частности, удастся выразить индекс граничной задачи через поведение функции $\lambda(z)$ на Γ .

Эти же основные результаты, относящиеся к свойствам обобщенных аналитических функций, аналогичным свойствам классических аналитических функций, получил независимо от И. Н. Векуа американский математик Л. Берс. В его работах теория обобщенных аналитических функций строится на основе обобщения понятия комплексного дифференцирования и интегрирования.

Формулы для индекса общей краевой задачи для произвольной эллиптической системы на плоскости были найдены (1960 г.) А. И. Вольпертом. При этом оказалось, что индекс можно представить в виде суммы двух слагаемых; первое из них отражает поведение коэффициентов на контуре области, второе же связано с их поведением внутри области и вычисляется через некоторый топологический инвариант, найденный Вольпертом.

Некоторые результаты для систем (61) были получены Н. К. Усмановым. Линейные системы более сложного вида и сведение граничных задач для них к системе сингулярных интегральных уравнений рассматривал А. И. Вольперт. Он указал прием, позволяющий сводить граничные задачи для эллиптических систем произвольного порядка к задачам для систем первого порядка. Это, в частности, было использовано им в работах по вычислению индекса.

3

Линейные и нелинейные уравнения второго порядка

Граничные задачи для линейных эллиптических уравнений исследовались самыми разнообразными методами. Мы упоминали о них в первом разделе в связи с применением методов функционального анализа и в предыдущем параграфе настоящего раздела. Прежде чем переходить к работам отечественных ученых по этой проблеме, укажем, что в 30-х годах Шаудер доказал разрешимость в пространстве Гельдера $C_{2,\alpha}(\bar{\mathfrak{D}})$ задачи Дирихле

$$\mathcal{L}u = a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x), \quad (63)$$

$$u|_s = \varphi$$

при условии, что коэффициенты принадлежат $C_{0,\tilde{\alpha}}(\bar{\mathfrak{D}})$, $f(x) \in C_{0,\tilde{\alpha}}(\bar{\mathfrak{D}})$, граничные значения $\varphi(x) \in C_{2,\alpha}(\bar{S})$, поверхность $S \in C_{2,\alpha}$, где α — любое число, такое, что $\alpha < \tilde{\alpha} \leq 1$. Доказательство существования решения проводится путем продолжения по параметру с помощью предельно точной априорной оценки

$$\|u\|_{C_{2,\alpha}(\bar{\mathfrak{D}})} \leq C[\|f\|_{C_{0,\alpha}(\bar{\mathfrak{D}})} + \|\varphi\|_{C_{2,\alpha}(\bar{\mathfrak{D}})}] + C_1 \max_{(\bar{\mathfrak{D}})} |u|, \quad (64)$$

где постоянные C, C_1 определяются коэффициентами (63) и границей $\mathfrak{D}$. Доказательство неравенства (64) проводилось методом покрытия области $\bar{\mathfrak{D}}$ малыми областями и замораживанием коэффициентов, о чем мы говорили в первом разделе.

Это исследование Шаудера оказало влияние на работы отечественных математиков по эллиптическим уравнениям и системам лишь в последние 10—15 лет. До этого основные усилия в исследовании уравнений (63) были направлены на создание простых методов доказательства разрешимости классических краевых задач для них, на обоснование различных приближенных методов их решения, а также на выяснение положения этих задач в теории линейных неограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Описание основных методов и результатов по этим вопросам дано в обзорной статье М. И. Вишика и О. А. Ладыженской «Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений» (1956 г.) и М. И. Вишика, А. Д. Мышкиса и О. А. Олейник «Дифференциальные уравнения с частными производными» (1959 г.).

Вишик исследовал граничные задачи с точки зрения общей теории расширений операторов. Положим, что для операторов $\mathcal{L}u$ и $\mathcal{L}^*u$, где $\mathcal{L}^*$ — сопряженный по Лагранжу оператор, заданный на гладких финитных в $\mathcal{L}$ функциях, справедливы неравенства

$$\|\mathcal{L}u\|_{L_2(\mathfrak{D})} \geq C\|u\|_{L_2(\mathfrak{D})}, \quad \|\mathcal{L}^*u\|_{L_2(\mathfrak{D})} \geq C\|u\|_{L_2(\mathfrak{D})}, \quad (65)$$

$$C > 0.$$



М. И. Вишик.

Первоначальным (минимальным) оператором $\mathcal{L}_0$ при расширении является оператор, получаемый замыканием в $L_2(\mathfrak{D})$ оператора $\mathcal{L}u$ на гладких финитных функциях. М. И. Вишик при условиях (65) исследовал расширения оператора $\mathcal{L}_0$, которые имеют ограниченные обратные в $L_2(\mathfrak{D})$. Эти расширения, с другой стороны, являются сужениями оператора, сопряженного с $\mathcal{L}_0^*$ в $L_2(\mathfrak{D})$, причем оператор $\mathcal{L}_0^*$ получается аналогично $\mathcal{L}_0$. Сначала Вишик дает абстрактное описание области определения такого «расширенного» оператора, а затем этому оператору ставит в соответствие «однородное граничное условие». Исходным при этом является неоднородное эллиптическое уравнение $\mathcal{L}u = f$ любого порядка.

На выяснении вида граничных условий мы не останавливаемся, а вернемся

к этому вопросу в разделе V.

М. Ш. Бирман, используя теорию М. Г. Крейна полуограниченных самосопряженных расширений оператора $\mathcal{L}$, исследовал общий вид граничных условий, при которых расширение является и самосопряженным и полуограниченным, т. е. имеет спектр, ограниченный снизу некоторым числом.

С. Г. Михлин доказал сходимость в пространстве $W_2^1(\mathfrak{D})$ метода Ритца, методов наименьших квадратов и Галеркина для задачи (63) (первые два метода рассматриваются для самосопряженного оператора $\mathcal{L}$). О. А. Ладыженская и Д. М. Эйдус построили разностные схемы для классических граничных задач в случае уравнения (63) и доказали их сходимость в пространствах $W_2^l(\mathfrak{D})$: Ладыженская — при $l \geq 1$, Эйдус — при $l = \left[\frac{n}{2} \right] + 3$. Это приводит к классическим решениям в $C_2(\overline{\mathfrak{D}})$, но при сравнительно жестких условиях на данные задачи.

Перейдем к вопросу о замыкании оператора (63) в пространстве $L_2(\mathfrak{D})$, поставленному И. М. Гельфандом в 1944 г., когда им намечались пути применения функционального анализа к теории уравнений с частными производными. Этот вопрос был решен О. А. Ладыженской для оператора L из уравнения (63) при классических однородных предельных условиях и условиях вида

$$\frac{\partial u}{\partial l} + \sigma u = 0,$$

где l — направление, не касающееся нигде границы S . В этих случаях замыкание оператора $\mathcal{L}$, заданного на множестве $\mathfrak{D}(\mathcal{L})$ функций, дваж-

ды непрерывно дифференцируемых в $\overline{\mathfrak{D}}$ и удовлетворяющих одному из указанных предельных условий, приводит к пополнению указанного множества всеми функциями из $W_2^2(\mathfrak{D})$, которые удовлетворяют тому же предельному условию. Это следует из доказанного Ладыженской неравенства

$$\|u\|_{W_2^2(\mathfrak{D})} \leq C \|\mathcal{L}u\|_{L_2(\mathfrak{D})} + C_1 \|u\|_{L_2(\mathfrak{D})} \quad (66)$$

справедливого для функций из $W_2^2(\mathfrak{D})$, удовлетворяющих одному из указанных граничных условий. Постоянные C и C_1 определяются коэффициентами оператора $\mathcal{L}$, границей S и граничным условием. Неравенство (66) для случая первого краевого условия было одновременно доказано Каччиополи. Это неравенство позволило О. А. Ладыженской исследовать разрешимость классических граничных задач для $\mathcal{L}u + \lambda u = f$ в $W_2^2(\mathfrak{D})$.

О. В. Гусева построила простой пример, показывающий, что в случае плоской области, имеющей внутренние углы больше π , оператор Δ , определенный на множестве функций из $W_2^2(\mathfrak{D})$, равных нулю на границе, не является в отличие от случая хороших контуров самосопряженным.

В совместной работе М. Ш. Бирмана и Г. Е. Скворцова доказано, что индекс дефекта равен числу упомянутых углов.

Близкие друг к другу достаточные и необходимые условия разрешимости в $W_2^2(\mathfrak{D})$ задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка, а также необходимое и достаточное условие самосопряженности замыкания оператора Лапласа в $L_2(\mathfrak{D})$ для плоской области с границей из класса C_1 указаны В. Г. Мазьей. Из его результатов следует, что для таких областей разрешимость задачи Дирихле в $W_2^2(\mathfrak{D})$ может оказаться неустойчивой относительно изменения коэффициентов. Более того, один из операторов вида $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}$ (a, b , и c — постоянные) может иметь непрерывный обратный оператор из $L_2(\mathfrak{D})$ в $W_2^2(\mathfrak{D})$, в то время как замыкание другого даже не будет самосопряженным оператором.

А. И. Кошелев доказал априорную оценку вида (66) в пространстве L_p .

В дальнейших работах по линейным эллиптическим уравнениям второго порядка существенное место занимает изучение точных зависимостей гладкости обобщенных решений от свойств коэффициентов и свободного члена уравнения (63).

Для $n = 2$ такие исследования проведены И. Н. Векуа и зарубежными математиками Берсом и Ниренбергом. Для случая $n \geq 2$ Де-Джорджи и Нэш доказали возможность оценки нормы Гельдера $\|u\|_{\alpha, \mathfrak{D}'}$ по любой внутренней подобласти $\mathfrak{D}'$ области $\mathfrak{D}$ для классических решений уравнения

$$\mathcal{L}_0 u = \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} u_{x_j}) = 0$$

только через положительные постоянные ν и μ , которые входят в оценку

$$\nu(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) \leq a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) \quad (67)$$

и через расстояние от $\mathfrak{D}'$ до границы $\mathfrak{D}$.

О. А. Ладыженская и Н. Н. Уралцева исследовали полное уравнение, записанное в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) u_{x_j} + a_i(x) u) + b_i(x) u_{x_i} + cu = f(x) + \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(x), \quad (68)$$

и установили оценки различных норм обобщенных решений из $W_2^1(\mathfrak{D})$ уравнения (68) и обобщенных решений граничных задач для него в зависимости от норм его коэффициентов и свободных членов, выраженных в терминах их принадлежности к пространствам $L_p(\mathfrak{D})$ с различными p . В частности, они нашли условия принадлежности решений из $W_2^1(\mathfrak{D})$ к $W_2^l(\mathfrak{D})$, $l \geq 2$, и к $C_{l,\alpha}(\mathfrak{D})$, $l \geq 0$. Построенные ими примеры свидетельствуют о точности полученных результатов. Другие точные результаты по исследованию решений общих эллиптических уравнений получены геометрическими методами. О них мы скажем в конце данного параграфа.

Вопросом зависимости разрешимости и свойств решения от свойств границы области в последние годы занимался В. Г. Мазья. В его работах найдены в ряде случаев необходимые и достаточные условия относительно границы, обеспечивающие разрешимость, различные дифференциальные свойства решений или ту или иную картину спектра задач Дирихле и Неймана в обобщенных постановках. Необходимые и достаточные условия обычно даются в терминах емкости, а затем из них выводятся достаточные или необходимые условия в более наглядных геометрических терминах. В частности, полностью решается вопрос о характеристике открытых множеств, для которых указанные выше задачи с правой частью из $L_p(\mathfrak{D})$ разрешимы в энергетическом пространстве, даны оценки модуля непрерывности и производных решения задачи Дирихле вблизи нерегулярной границы.

В заключение изложения результатов по линейным задачам приведем еще кратко результаты, касающиеся условий на бесконечности в случае неограниченных областей.

Давно известно, что при постановке граничной задачи для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad \lambda > 0,$$

в бесконечной области нужно требовать, чтобы решение удовлетворяло на бесконечности некоторым условиям (так называемым условиям излучения). Вид этих условий существенно зависит от характера области. Для области с конечной границей в трехмерном пространстве условия излучения получены Зоммерфельдом и имеют вид

$$u = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad (69)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - i\sqrt{\lambda} u = o\left(\frac{1}{r}\right). \quad (70)$$

Физически эти условия означают отсутствие источника колебаний на бесконечности. В. Д. Купрадзе в 1932 г. доказал, что краевые задачи для уравнения Гельмгольца, рассматриваемые во внешности ограниченной области, имеют одно и только одно решение, удовлетворяющее условиям (69) и (70). И. Н. Векуа показал, что в теореме единственности достаточно одного условия (70).

Важной проблемой является выделение физически интересных решений для областей с бесконечными границами, а также для более общих, чем (69), дифференциальных уравнений. А. Н. Тихонов и А. А. Самарский в 1948 г. обратили внимание на следующий общий подход к этой проблеме, вполне естественный с точки зрения теории операторов в гильбертовом пространстве. Пусть дано уравнение

$$\mathcal{L}u = \lambda u + f(x), \quad (71)$$

где $\mathcal{L}$ — положительный самосопряженный эллиптический оператор, $\lambda > 0$, $f(x) \in \dot{C}$. Тогда решением краевой задачи для этого уравнения при однородных краевых условиях называется предел принадлежащего пространству L_2 решения граничной задачи для уравнения

$$\mathcal{L}u = (\lambda + \varepsilon i)u + f(x)$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$. Такой принцип выделения решения называется принципом предельного поглощения. Этот принцип требует обоснования: нужно доказать существование предела. А. Г. Свешников доказал это в случае $\mathcal{L} = \Delta$ для некоторых областей, допускающих разделение переменных, и получил соответствующие условия излучения. А. Я. Повзнер в 1953 г. обосновал принцип предельного поглощения для оператора $\mathcal{L} = \Delta + q(x)$ во всем пространстве, где функция $q(x)$ достаточно быстро убывает на бесконечности. Д. М. Эйбус обобщил результат А. Я. Повзнера, рассмотрев случай эллиптического самосопряженного оператора второго порядка с переменными коэффициентами, имеющими пределы на бесконечности. Кроме того, Эйбус рассмотрел некоторые области с бесконечными границами. Условиям излучения и обоснованию принципа предельного поглощения для уравнений высших порядков и для некоторых систем посвящены работы И. Н. Векуа, В. Д. Купрадзе, Б. П. Панеяха, В. И. Чарного, Б. Р. Вайнберга, В. В. Грушина.

А. Н. Тихонов и А. А. Самарский указали еще на один принцип выделения решения уравнения (71) — принцип предельной амплитуды. Этот принцип состоит в том, что решением краевой задачи для уравнения (71) называется следующий предел:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{i\sqrt{\lambda}t} w(x, t), \quad (72)$$



Д. М. Эйбус.



Н. Н. Уральцева.

где $w(x, t)$ — решение соответствующей смешанной задачи с нулевыми начальными данными для уравнения

$$w_n + \mathcal{L}w = e^{-i\sqrt{\lambda}t} f(x).$$

О. А. Ладыженская в 1957 г. доказала, что в случае оператора, рассмотренного А. Я. Повзнером, принцип предельной амплитуды выделяет то же решение, что и принцип предельного поглощения. При этом приходится предполагать, что оператор $\mathcal{L}$ не имеет собственных значений, ибо в противном случае предел (72) может не существовать. Аналогичные результаты для других операторов получены в работах Г. И. Басса и А. Г. Костюченко, М. М. Гехтмана, Д. М. Эйдуса.

Исследования по квазилинейным эллиптическим уравнениям второго порядка, т. е. уравнениям, линейным относительно старших производных, с начала XX века были связаны с двумя проблемами Гильберта, из которых одна (20-я проблема) относится к вариационному исчислению, а согласно другой (19-я проблема) всякое достаточно гладкое решение аналитического дифференциального уравнения эллиптического типа есть аналитическая функция (см. раздел I). Обе эти проблемы исследовались С. Н. Бернштейном при $n = 2$. О его результатах по 19-й проблеме сказано в разделе I. 20-я же проблема была решена им при $n = 2$ в случае, когда искомая функция u не входит явно под знак интеграла. Более того, Бернштейн доказал однозначную разрешимость «в целом» задачи Дирихле для квазилинейного уравнения

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, u_x) u_{x_i x_j} + a(x, u, u_x) = 0 \quad (73)$$

при $n = 2$ и при условии гладкости a_{ij} и a и их независимости от u . Более общие случаи (когда входит явно u) при $n = 2$ были предметом исследований А. Г. Сигалова и В. П. Плотникова. Отметим, здесь же, что А. Г. Сигаловым было доказано весьма сильное предложение о существовании, по крайней мере, одного непрерывного обобщенного решения вариационной задачи в параметрической форме.

Общий многомерный случай всесторонне исследован в работах О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой, подытоженных в монографии «Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа». Укажем основные их результаты.

Сначала рассматриваются при любом n квазилинейные уравнения с дивергентной главной частью

$$\frac{d}{dx_i} a_i(x, u, u_x) + a(x, u, u_x) = 0. \quad (74)$$

Предполагается, что измеримые функции $a_i(x, u, u_x)$, $a(x, u, u_x)$ определены в $\mathfrak{D}$ при произвольных u, u_x и подчиняются условиям, касающимся их роста по $u_x = p$ ($u_{x_i} = p_i$) при $|p| \rightarrow \infty$:

$$\left. \begin{aligned} a_i p_i &\geq v(|u|)|p|^m - \mu(|u|), \\ \sum_{i=1}^n a_i(1 + |p|) + |a| &\leq \mu(|u|)(1 + |p|)^m, \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

где $p = \sqrt{p_1^2 + \dots + p_n^2}$, $v(t)$ и $\mu(t)$ какие-либо непрерывные положительные функции ($v(t)$ — невозрастающая и $\mu(t)$ — неубывающая), $m > 1$ — постоянная. Ограниченные обобщенные решения уравнения (74) из $w_m^1(\mathfrak{D})$ определяются интегральным тождеством кото-

$$\int_{\mathfrak{D}} [a_i(x, u, p) \eta_{x_i} - a(x, u, p) \eta] dx = 0,$$

рое должно иметь место при любой ограниченной функции $\eta(x)$ из $\dot{W}_m^1(\mathfrak{D})$. Доказывается, что при выполнении условий (75) любое такое решение принадлежит $C_{0,\alpha}(\mathfrak{D})$ с показателем α , зависящим от $M = \text{vrai max } |u(x)|$ и постоянных $m, v(M)$ и $\mu(M)$. Далее исследуется, когда обобщенное решение задачи Дирихле будет единственно в малой области, когда оно принадлежит $W_2^2(\mathfrak{D})$, классу Гельдера $C_{1,\alpha}(\mathfrak{D})$ и другим пространствам. Рассматриваются и неограниченные решения из пересечения классов $W_m^1(\mathfrak{D})$ и $L_q(\mathfrak{D})$, где $q > \frac{mn}{n-m}$. Доказываются априорные оценки норм Гельдера для решений уравнения (74) и классических краевых задач для него, что дает возможность на основании теорем о неподвижных точках вполне непрерывных преобразований доказывать разрешимость «в целом» классических граничных задач.

Подробно исследовано и общее квазилинейное уравнение (73). Для его решения установлены априорные оценки различных норм, позволившие, в частности, доказать классическую разрешимость «в целом» задачи Дирихле. Отметим еще один результат, дающий точную границу справедливости 19-й проблемы Гильберта для уравнений (73). Пусть обобщенное решение уравнения (73) имеет квадратично суммируемые производные второго порядка и ограниченные производные первого порядка и пусть на этом решении уравнение (73) эллиплично. Гладкость такого решения $u(x)$ определяется лишь гладкостью функций $a_{ij}(x, u, p)$ и $a(x, u, p)$. Точнее, $u(x)$ будет принадлежать $C_{l,\alpha}(\mathfrak{D})$, $l \geq 2$, если $a_{ij}(x, u, p)$ суть элементы $C_{l-2,\alpha}$, $\hat{l} = \max\{l, 3\}$ и $a(x, u, p)$ из $C_{l-2,\alpha}$. Показывается, что утверждение перестает быть верным, если отбросить предположение об ограниченности производных u_x .

Рассмотрим кратко результаты по 20-й проблеме Гильберта, касающейся вариационного исчисления. Отметим прежде всего, что

к уравнениям типа (74) приводит задача отыскания экстремума функционала

$$I(u) = \int_{\mathfrak{D}} F(x, u, p) dx \quad (76)$$

при каком-либо граничном условии. Считаем, что это — условие Дирихле (63). В 20-й проблеме Гильберта утверждалось, что задача на отыскание минимума функционала (76) при условии (63) имеет, по крайней мере, одно решение, если искать его в достаточно широком классе функций. Первый результат по этой проблеме получил С. Н. Бернштейн. Он доказал при $n = 2$ классическую разрешимость указанной задачи в предположении, что $F(x, p)$ не зависит от u , является достаточно гладкой функцией своих аргументов и удовлетворяет некоторым естественным требованиям на порядок роста по p . В конце 30-х годов Морри доказал существование, по крайней мере, одной функции $u(x)$, дающей функционалу (76) наименьшее значение в классе функций $\mathfrak{M}$, состоящем из элементов пространства $W_m^1(\mathfrak{D})$ ($m > 1$), удовлетворяющих условию (63). Число m входит в условие

$$v|p|^m \leq F(x, u, p) \leq \mu(|p|^m + |u|^q + 1),$$

где v и μ — положительные постоянные, $q = \frac{nm}{n-m}$ при $m < n$, q — произвольное конечное число при $m \geq n$. Кроме того, функция $F(x, u, p)$ предполагается непрерывной, дифференцируемой один раз по u , p и выпуклой по p . После этого все усилия были направлены на выяснение единственности «в малом» и исследование гладкости упомянутых решений $u(x)$ экстремальной задачи в зависимости от гладкости $F(x, u, p)$. При $n = 2$ и $m \geq 2$ этот вопрос исследовался в работах Морри, А. Г. Сигалова и В. И. Плотникова, а при любых $n \geq 2$ и $m > 1$ — О. А. Ладыженской и Н. Н. Уралцевой.

Ладыженская и Уралцева доказали, что гладкость решения $u(x)$ из $W_m^1(\mathfrak{D})$ зависит лишь от гладкости $F(x, u, p)$. В частности, если $F(x, u, p)$ принадлежит пространству Гельдера $C_{2,\alpha}(\mathfrak{D})$, то и $u(x)$ принадлежит этому пространству, и для таких решений справедлива теорема единственности в малом. Это установлено при естественных ограничениях на $F(x, u, p)$.

Исследования Ладыженской и Уралцевой были продолжены в разных направлениях. Т. Б. Соломяк исследовала разрешимость краевых задач для некоторых классов равномерно эллиптических квазилинейных уравнений с нелинейностями, имеющими при $|u_x| \rightarrow \infty$ нестепенной характер роста. А. П. Осолков, Т. Б. Соломяк, Н. М. Ивочкина, О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, И. Я. Бакельман, Ю. А. Дубинский и другие рассмотрели различные классы неравномерно эллиптических квазилинейных уравнений и для них получили оценки $\max |u_x|$ (оценка более сильных норм решений $u(x)$ следует из оценки $\max |u_x|$ и полученных ранее оценок для равномерно эллиптических уравнений). Уралцева установила оценку нормы Гельдера $|u_x|_\alpha$ для

решений вариационной задачи для функционала

$$I|u| = \int_{\Omega} |u_x|^p dx, \quad p > 1,$$

уравнение Эйлера которого имеет вырождение там, где $u_x = 0$.

Рассмотрим некоторые нелинейные уравнения. Из этого класса наиболее изучено уравнение Монжа — Ампера

$$u_{x_1 x_1} u_{x_2 x_2} - u_{x_1 x_2}^2 = 0$$

и его обобщение

$$u_{x_1 x_1} u_{x_2 x_2} - u_{x_1 x_2}^2 = f(x, u, u_x).$$

С. Н. Бернштейн дал для них и для общих нелинейных эллиптических уравнений при $n = 2$ способы оценок модулей производных любого порядка от решений u через максимумы модулей u , u_x , u_{xx} . Большая часть изучавшихся нелинейных уравнений связана с задачами геометрии.

Перейдем к геометрическим методам в теории уравнений эллиптического типа. Эти методы исходят из понятий и задач теории выпуклых поверхностей. Если ограничиваться рассмотрением дважды дифференцируемых поверхностей, то исследование свойств таких поверхностей (существование, единственность, регулярность и т. д.) в зависимости от тех или иных данных, касающихся их кривизны, естественно приводит к исследованию решений соответствующих дифференциальных уравнений второго порядка. Однако, во-первых, в самой геометрической постановке таких задач это ограничение обычно не содержится, а во-вторых, теория уравнений не включала результатов, дающих их решение. Все это и привело к необходимости создания новых методов исследования, которые называют геометрическими методами. Получаемые результаты, переведенные на язык дифференциальных уравнений, оказываются утверждениями относительно обобщенных решений уравнений и даже приводят к обобщению решений в терминах функций множеств.

Это направление заложено А. Д. Александровым в работе «К теории смешанных объемов выпуклых тел» (1937 г.), в которой, в частности, введены указанные выше обобщенные решения. Начиная с 50-х годов это направление продолжил А. В. Погорелов, а затем И. Я. Бакельман. Опишем основные идеи и результаты А. Д. Александрова, относящиеся к этому кругу вопросов.

В этих исследованиях плодотворным оказалось понятие «опорного», нормального отображения, по существу эквивалентное сферическому отображению. Оно может быть определено следующим образом. Пусть $u(x)$ — функция точки в n -мерном пространстве E_n , заданная в некото-



И. Я. Бакельман.

рой области $\mathfrak{D}$, S — ее график в $(n+1)$ -мерном пространстве, P — опорная плоскость к S снизу: $\sum_{k=1}^n p_k(x_k - x_k^0) = x_{n+1} - u(x^0)$ (если P — касательная, то $p = \nabla u$). Опорным изображением (снизу) $\psi_u(M)$ множества $M \subset E_n$ (посредством функции u) называется множество всех точек p , сопоставляемых всем опорным плоскостям, проходящим через точки на S , проектирующиеся в M . Связь со сферическим изображением очевидна из того, что нормаль к S задается вектором $(p_1, \dots, p_n, 1)$. Мера множества $\psi_u(M)$ есть вполне аддитивная неотрицательная функция M , определенная для всех борелевских множеств M . Обозначим ее $\omega_1(M, u)$.

Рассматривается уравнение

$$\det(u_{x_i x_j}) = \varphi(\nabla u, u, x) \quad (77)$$

при предположении $\varphi \geq 0$ и ищется его решение в классе выпуклых функций в какой-либо выпуклой области $\mathfrak{D}$, например, при условии $u|_{\Gamma} = 0$, где Γ — граница $\mathfrak{D}$. Уравнение (77) удобно переписать в форме

$$f(\nabla u, u, x) \det(u_{x_i x_j}) = h(x). \quad (78)$$

Предполагается, что: 1) функция f определяется для всех p, u и $x \in \mathfrak{D}$ и непрерывна по u, x при почти всех p , допускаются $f = \infty$; 2) для всякой замкнутой ограниченной области R существует суммируемая функция $f_0(p)$ такая, что $f(p, u, x) \leq f_0(p)$ в R ($x \in \mathfrak{D}$).

Если u задана, то можно принять $p = \nabla u$ за независимую переменную и считать u и x функциями p . Заметим еще, что $\det(u_{x_i x_j})$ есть якобиан преобразования $x \rightarrow p = \nabla u(x)$. Интегрируя уравнение (78) по какому-либо множеству $M \subset \mathfrak{D}$, получим

$$\int_M f \det(u_{x_i x_j}) dx = \int_{\psi_u(M)} f(p, u(p), x(p)) dp = \int_M h(x) dx, \quad (79)$$

где $\psi_u(M)$ — опорное изображение M . Обозначая средний и правый интегралы через $\omega_f(M; u)$ и $v(M)$, получаем уравнение

$$\omega_f(M; u) = v(M). \quad (80)$$

Функция множества $\omega_f(M; u)$ (т. е. соответствующий интеграл в уравнении (79)) определена для всякой выпуклой функции u , что гарантируется условиями, наложенными на f . Если $\bar{M} \subset \mathfrak{D}$, то p ограничено на M и $\omega_f(M; u)$ имеет конечное значение; иначе не исключено, что $\omega_f(M; u) = \infty$.

Таким образом, задача о решении уравнения (79) заменяется более общей: при данной f и, следовательно, ω_f найти выпуклую функцию u , удовлетворяющую уравнению (80), при заданной функции множества $v(M)$, не являющейся обязательно интегралом функции точки. Помимо условий полной аддитивности и неотрицательности, функция $v(M)$ подчиняется необходимому ограничению: $v(\mathfrak{D}) \leq B = \sup_u \omega_f(\mathfrak{D}; u)$ (супремум по всем выпуклым u).

Наложим на f дополнительное условие: существует такое число u_0 , и функция $f_1(p) \geq 0$, что $f(p, u, x) \geq f_1(p)$ при $u \leq u_0$ и всех $x \in \mathfrak{D}$. Положим

$$A(f) = \sup \int f_1(p) dp,$$

где интеграл берется по всему пространству, а супремум — по всем u_0, f_1 , которые удовлетворяют только что указанным свойствам. Оказывается, что если $v(\mathfrak{D}) < A(f)$, то уравнение (80) разрешимо (чего при $v(\mathfrak{D}) \geq A(f)$ может и не быть). Это устанавливаем сначала для дискретных v , т. е. состоящих из точечных нагрузок, когда график u оказывается выпуклым многогранником. Потом, аппроксимируя данную v дискретными и переходя к пределу, получаем решение в общем случае.

Однако u может не принимать всюду на Γ данные значения, даже в простейшем случае условия $u|_{\Gamma} = 0$. График u над $\mathfrak{D} + \Gamma$ может представлять выпуклую поверхность с вертикальными стенками над Γ . Поэтому краевая задача решается в следующей постановке: найти среди всех выпуклых решений уравнения (80), такое, которое подходит к заданным значениям на Γ ближе всего. Далее исследуется вопрос, при каких условиях на v, Γ и $u|_{\Gamma}$ заведомо существует решение с данными $u|_{\Gamma}$. Этому вопросу посвящены также и исследования И. Я. Бакельмана.

Вопрос о единственности решается при дополнительных условиях. В частности, решение обобщенной краевой задачи заведомо единственно, если $f = f_1(u, x) f_2(\nabla u)$, где $f(u, x)$ — функция, не возрастающая по u .

Если v есть интеграл от $h(x)$, то функция u , являющаяся решением уравнения (80), оказывается обобщенным решением уравнения (78), поскольку выпуклая функция почти везде дважды дифференцируема. Однако, таким же образом, обобщенным решением (78) будет всякая выпуклая функция u , удовлетворяющая (80) с такой v , производная которой почти везде равна $h(x)$. Поэтому для возможности теорем единственности обобщенных решений (78) нужно, как минимум, ограничиваться такими u , для которых ω_i абсолютно непрерывна; это обеспечено, если абсолютно непрерывна ω_1 , т. е. площадь опорного изображения.

Вопрос о регулярности решения при регулярности f, h для случая $n > 2$ остается открытым.

Детальное исследование разрешимости краевой задачи, единственности и регулярности проведено для $n = 2$ и притом для уравнений

$$rt - s^2 = ar + 2bs + ct + d,$$

если $a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 > c(\xi^2 + \eta^2)$ ($c > 0$) и $d \geq 0$. При этом геометрические соображения сочетались с методами С. Н. Бернштейна и Шаудера (А. В. Погорелов, И. Я. Бакельман). Рассматривались также обобщения таких уравнений Монжа — Ампера на случай $n > 2$ (А. Д. Александров, И. Я. Бакельман).

Особый интерес представляет исследование устойчивости решения уравнения (80), иначе говоря, — нахождение оценки возможного изменения u в зависимости от допускаемого изменения функций v и f (если,

конечно, выполнены условия единственности). Такая явная оценка в зависимости от изменения ν получена Ю. А. Волковым.

«Метод опорного изображения» позволил А. Д. Александрову получить оценки решений, теоремы единственности, теоремы типа принципа максимума модуля и некоторые другие результаты для линейных уравнений второго порядка эллиптического типа (с допущением вырождения) при весьма общих условиях. При этом естественным классом обобщенных решений является класс ограниченных непрерывных функций, у которых площадь опорного изображения $\omega_1(M, u)$ является абсолютно непрерывной функцией множества M . Далее неизменно имеются в виду функции u этого класса в некоторой ограниченной n -мерной области $\mathfrak{D}$. В частности, если для всякой подобласти $\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}$ с $\overline{\mathfrak{D}_1} \subset \mathfrak{D}$ функция $u \in W_n^2(\mathfrak{D})$, то u принадлежит указанному классу. Отметим, что для линейных уравнений, в отличие от результатов, обычно получаемых другими методами, не предполагается ни дивергентная форма уравнения, ни его строгая эллиптичность.

В отношении получаемых априорных оценок решений задач Дирихле нужно отметить, что выводятся оценки не просто для $\sup |u(x)|$, а для возможного значения $u(x)$ в любой заданной точке x той области $\mathfrak{D}$, где решается задача. Другими словами, для данного класса уравнений строится «универсальная мажоранта» $\Phi(x)$ решений, например, с $u|_\Gamma = 0$, т. е. $|u(x)| \leq \Phi(x)$, причем Φ зависит от некоторых интегральных характеристик уравнения, например некоторых норм коэффициентов и, может быть, самого решения u , что, в частности, неизбежно, когда не выполнены условия, обеспечивающие его единственность. Получаемые, в частности, для линейных уравнений мажоранты $\Phi(x)$ оказываются точными для выпуклых областей в том смысле, что $\Phi(x) = \sup_u |u(x)|$, где супремум берется по всем решениям уравнений фиксированного класса (с фиксированными нормами коэффициентов).

Приведем основные результаты, полученные для уравнений

$$\mathcal{L}(u) = a_{ij}u_{x_i x_j} + b_i u_{x_i} + cu = f, \quad a_{ij}\xi_i \xi_j \geq 0. \quad (81)$$

Положим $a = \det(a_{ij})$. Если $c \leq 0$ и $a^{-1}|\vec{b}|$ суммируемо во всякой области $\mathfrak{D}_1 \subset \overline{\mathfrak{D}_1} \subset \mathfrak{D}$, то $\inf u$ достигается на Γ , так что при $f = 0$ уравнение (81) не имеет нулевых решений с $u|_\Gamma = 0$. Этот результат оказывается неулучшаемым в следующем смысле. Пусть функция $\varphi(\xi)$ на полуоси $\xi > 0$ такова, что $\xi^{-1}\varphi(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ в шаре $\mathfrak{D}$ можно задать такое уравнение вида $a_{ij}u_{x_i x_j} + b_i u_{x_i} = 0$, что оно имеет ненулевое решение с $u|_\Gamma = 0$, хотя

$$\int_{\overline{\mathfrak{D}}} \varphi(a^{-1}|\vec{b}|^n) dx < \varepsilon.$$

Кроме того, можно задать так же уравнение вида $a_{ij}u_{x_i x_j} = 0$, которое имеет ненулевое решение $u \in W_{n-\varepsilon}^2(\mathfrak{D})$, $u|_\Gamma = 0$.

Приведем явное выражение мажоранты $\Phi(x)$ для уравнения (81).

В нее входят нормы $\|q\| = \|a^{-\frac{1}{n}} q\|_{L_n(\mathfrak{D})}$. Именно оказывается

$$|u(x)| < Hh(x), \quad (82)$$

где $h(x)$ — среднее геометрическое опорной функции области относительно точки x (т. е. среднее геометрическое расстояний $h(x, v)$ от x до опорной плоскости с нормалью v по всем v , т. е. по единичной сфере), а

$$H = n^{-1} \tau_n^{-\frac{1}{n}} \|f - cu\| e^{\frac{\|\vec{b}\|^n}{n^n \omega_n} + \Phi_n(\|\vec{b}\|)},$$

где τ_n , ω_n — объем и поверхность n -мерного единичного шара, Φ_n — ограниченная функция (точно определяемая). Вместе с тем доказыва-
ется, что для выпуклых областей мажоранта (82) точная, т. е. для вся-
кой выпуклой $\mathfrak{D}$:

$$\sup |u(x)| = Hh(x),$$

где супремум берется по всем решениям u с $u|_{\Gamma} = 0$ всех уравнений (81) с данным значением величины H .

При более сильном условии на $\vec{b}$, чем конечность $\|\vec{b}\|$, справедлива такая оценка:

$$|u(x)| < Cv^{\frac{1}{n}}(x),$$

где $v(x)$ — наименьший из объемов, отсекаемых от выпуклой оболочки области $\mathfrak{D}$ плоскостями, проходящими через x , а C зависит от n и не-
которых норм $f - cu$ и $\vec{b}$. Вместе с тем порядок оценки u через $v(x)$
не может быть улучшен и при $C = b_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$), если требовать
только $\|\vec{f}\| < \infty$.

4

Общие граничные задачи для уравнений высших порядков и систем

В настоящем параграфе дополняются и уточняются ре-
зультаты соответствующего параграфа первого раздела,
где рассматривалась постановка общих граничных задач для одного
эллиптического уравнения.

Начнем с постановки общей граничной задачи для эллиптической
(по Петровскому) системы.

Пусть в области $\mathfrak{D}$ задана система m линейных дифференциальных
операторов порядка p относительно m функций $u_1(x), \dots, u_m(x)$. Их
можно записать в матричной форме

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \mathfrak{D}) = \sum_{|\alpha| \leq p} \mathcal{L}_\alpha(x) D^\alpha, \quad (83)$$

где $\mathcal{L}_\alpha(x)$ — квадратные матрицы порядка m . Пусть далее на границе S имеется r граничных операторов, задающих предельные условия; запишем их в виде:

$$B_j(x, \mathfrak{D}) = \sum_{|\alpha| \leq q_j} B_{j\alpha}(x) D^\alpha \quad (j = 1, 2, \dots, r). \quad (84)$$

Здесь $B_{j\alpha}(x)$ — векторы с m компонентами, $r = \frac{mp}{2}$; система предполагается правильно эллиптической; числа $q_j \geq 0$ произвольны, в частности не обязательно $q_j < p$.

Через $\mathcal{H}_l(\mathfrak{D})$ условимся обозначать пространство $W_2^l(\mathfrak{D})$ вектор-функций $u(x) = (u_1(x), \dots, u_m(x))$ и считаем число l достаточно большим. Обозначим через $\mathcal{H}$ пространство $\{\mathcal{H}_{l-p}(\mathfrak{D}) \times \mathcal{H}_{l-q_j-\frac{1}{2}}(S) \quad (j = 1, \dots,$

$\dots, r)\}$ и пусть Λ — оператор, переводящий любую вектор-функцию $u \in \mathcal{H}_l(\mathfrak{D})$ в элемент пространства $\mathcal{H}$, именно в $\{\mathcal{L}(x, \mathfrak{D})u(x), B_j(x, \mathfrak{D}) \times u(x)|_S \quad (j = 1, \dots, r)\}$. Оператор Λ соответствует граничной задаче

$$\mathcal{L}(x, \mathfrak{D})u = f(x), \quad B_j(x, \mathfrak{D})u|_S = h_j(x) \quad (j = 1, \dots, r). \quad (85)$$

Здесь $f(x)$ — заданный m -мерный вектор, $h_j(x)$ — данные функции. Если $m = 1$, то задача (85) переходит в задачу (51) — (52) § 7 гл. I для случая одного уравнения.

Оператор Λ нормально разрешим, если множество его значений $R(\Lambda)$ замкнуто и имеет конечный дефект $\beta = \dim [H \ominus R(\Lambda)]$, а множество его нулей $N(\Lambda)$ имеет конечную размерность α . Число $k = \beta - \alpha$ называется индексом оператора Λ и задачи (85). Такой подход позволяет формально избежать обращения к сопряженному оператору, построение которого здесь затруднительно.

«Дифференциальной» матрице (83) сопоставляют характеристическую (или, как ее стали называть в последнее время, символическую) матрицу

$$\mathcal{L}^0(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = p} \mathcal{L}_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

где, как и выше, ξ^α имеет составляющие $\xi_1^{\alpha_1}, \dots, \xi_n^{\alpha_n}$ ($\alpha_1 + \dots + \alpha_n = p$), а граничным операторам (84) — матрицу $B^0(x, \xi)$, строки которой являются векторами

$$B_j^0(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = q_j} B_{j\alpha}(x) \xi^\alpha \quad (j = 1, \dots, r).$$

Таким образом, B^0 — матрица из r строк и m столбцов. Мы не приводим формулировки условия коэрцитивности для систем; оно связывает элементы матриц $\mathcal{L}^0$ и B^0 . «Предельно точные априорные оценки» для задачи (85) имеют вид

$$\|u\|_{H_l(\mathfrak{D})} \leq C [\|\mathcal{L}u\|_{H_{l-p}(\mathfrak{D})} + \sum \|B_j u\|_{H_{l-q_j-\frac{1}{2}}(S)}] + C_1 \|u\|_{H_0(\mathfrak{D})}. \quad (86)$$

Аналогично выглядят априорные оценки и в других нормах, например в нормах L_p .

Как уже указывалось, изучение граничных задач для эллиптических систем общего вида в многомерном случае началось с так называемых сильно эллиптических систем. Эти системы были введены М. И. Вишиком следующим условием: для них должно выполняться неравенство

$$\int (\mathcal{L}u + \lambda u, u) dx \geq \gamma \|u\|_{H_m(\mathfrak{D})}^2, \quad \gamma = \text{const} > 0,$$

где λ — достаточно большое положительное число. Неравенство должно выполняться на всех вектор-функциях $u \in \mathcal{H}_m(\mathfrak{D})$, удовлетворяющих предельным условиям 1-го рода

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \dots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}} \Big|_S = 0.$$

Здесь $2m$ — порядок уравнений, входящих в систему. Вишик дал также для случая постоянных коэффициентов алгебраическое описание такого класса систем; Гординг распространил это описание на системы с переменными коэффициентами (см. раздел I, § 4). Вишик, развивая метод ортогональных проекций Г. Вейля, доказал, что для таких систем классические граничные задачи регулярно разрешимы (т. е. фредгольмовы). О. В. Гусева исследовала дифференциальные свойства решений сильно эллиптических систем. Оказалось, что для решения первой однородной граничной задачи справедлива априорная оценка вида

$$\|u\|_{H_{2m}(\mathfrak{D})} \leq C \|\mathcal{L}u\|_{L_2(\mathfrak{D})}, \quad (87)$$

которая относится к классу предельно точных оценок. Для получения этой оценки были построены явные формулы для решения задачи с постоянными коэффициентами в полупространстве. Такие построения оказались полезными и при доказательстве оценки (87) в пространстве $L_p(\mathfrak{D})$, полученной О. В. Гусевой, А. И. Кошелевым, М. З. Соломяком и Л. Н. Слободецким. Соломяк исследовал также поведение резольвенты оператора первой краевой задачи также в метрике L_p .

Изучение эллиптических систем более общего вида, чем сильно эллиптические системы, начинается в работах Я. Б. Лопатинского и З. Я. Шапиро (1953 г.), где были построены матрицы Грина. При этом и появилось впервые условие, получившее впоследствии название условия дополнителности (условие коэрцитивности). Задача вида (85) (впрочем, еще не самого общего вида) сводилась к системе интегральных уравнений на поверхности, имеющей фредгольмовский вид. Как выяснилось впоследствии, это сведение, вообще говоря, не эквивалентно, так как задача (85) в общем случае не фредгольмова.

Априорные оценки вида (86) для задач с неоднородными граничными условиями в $L_2(\mathfrak{D})$ были получены Л. Н. Слободецким, использовавшим доказанные им теоремы вложения и продолжения для пространств дробного порядка. Кроме условия коэрцитивности Слободецкий накладывал на матрицы $\mathcal{L}^0$ и B^0 некоторые другие, дополнительные, условия.

В наиболее общей форме априорные оценки в нормах L_p ($p > 1$) и $C_{l,\alpha}$ при выполнении лишь условия коэрцитивности установлены



Л. Н. Слободецкий.

независимо Агмоном, Дуглисом, Ниренбергом в США и В. А. Солонниковым в СССР. При этом были рассмотрены также системы, более общие, чем эллиптические по Петровскому.

В работе К. К. Головкина и В. А. Солонникова были доказаны предельно точные оценки в нормах L_p и $C_{l,\alpha}$ для широких классов интегральных операторов, включающих в себя как частные случаи интегральные представления решений предельных задач в полупространстве для уравнений и систем эллиптического и параболического типов с постоянными коэффициентами.

Нормальную разрешимость граничных задач после опубликования работы (1959 г.) Браудера стали доказывать с помощью построения регуляризатора (определение приведено в § 7 раздела I). В работах шведского математика Л. Херман-

дера была установлена эквивалентность важных свойств граничной задачи: нормальной разрешимости, существования регуляризатора, наличия априорной оценки вида (86) и выполнения условия коэрцитивности.

В многомерном случае важную роль в общей теории граничных задач играют сингулярные интегральные уравнения. Для классических задач сведение к этим уравнениям осуществлялось с помощью теории потенциала. При этом обнаруживалась полная аналогия между задачами, удовлетворяющими условиям коэрцитивности, с одной стороны, и системами сингулярных интегральных уравнений с невырождающейся символической матрицей — с другой.

Эта аналогия позволила А. И. Вольперту (1960 г.), в частности, построить первые примеры систем сингулярных интегральных уравнений с ненулевым индексом.

Переход от аналогии к точным утверждениям был проведен в работах А. С. Дынина (1961 г.). В § 7 раздела I уже отмечалось проделанное им расширение класса граничных задач. А. С. Дынин показал, что в этом, более широком классе, любую коэрцитивную задачу для одного эллиптического уравнения порядка $2m$ в области $\mathfrak{D}$ можно свести продолжением по параметру к задаче, эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений на границе области. При этом символическая матрица получающейся системы совпадает с матрицей, входящей в условие коэрцитивности. На случай произвольных эллиптических систем идея Дынина полностью не переносится. Это связано с тем, что индекс системы, вообще говоря, зависит от поведения коэффициентов не только на границе, но и внутри области. На такое парадоксальное, на первый взгляд, обстоятельство впервые обратил внимание А. И. Вольперт,

а топологическая его причина была вслед за этим выяснена М. С. Аграновичем.

Эллиптические системы с интегро-дифференциальными предельными условиями рассматривались М. С. Аграновичем и А. С. Дыниным. Их основной результат заключается в перенесении на этот более общий класс задач приведенной выше теоремы об эквивалентности: условия коэрцитивности, наличия априорной оценки, существования регуляризатора и свойства нормальной разрешимости задачи.

Благодаря описанным результатам вполне выяснилась картина и в отношении системы А. Б. Бицадзе, о которой говорилось в § 7 раздела I. Для нее «плоха» первая краевая задача, но зато нормально разрешимы некоторые другие краевые задачи довольно простого вида. Оказалось, однако, что не для любой эллиптической системы существуют такие задачи. М. З. Соломяк построил (1963 г.) пример эллиптической по Петровскому системы, которая не имеет ни одной нормально разрешимой интегро-дифференциальной граничной задачи.

В дальнейшем М. С. Агранович и позже М. И. Вишик и Г. И. Эскин еще более расширили класс предельных задач, введя интегро-дифференциальные операторы не только в краевые условия, но и в основной оператор. Трудности здесь появляются уже при постановке граничных задач; предварительно требуется провести некоторую специальную факторизацию уравнения, что и проделали Вишик и Эскин. Более подробно будем говорить об аналогичном расширении при рассмотрении работы М. И. Вишика и Г. И. Эскина по интегро-дифференциальным параболическим уравнениям.

Задачам с параметром посвящена работа (1964 г.) М. С. Аграновича и М. И. Вишика; в ней использована методика, основанная на том, что при «замораживании» коэффициентов члены, содержащие параметр, считаются главными наряду с членами, содержащими старшие производные. Следует отметить, что для важного случая операторов вида $A - \lambda I$ (т. е. при изучении резольвенты эллиптического оператора) эта идея была ранее применена М. З. Соломяком (1960 г.).

Исследование общих граничных задач было продолжено Ю. М. Березанским и Я. А. Ройтбергом (первая работа в этом направлении выполнена ими совместно с С. Г. Крейном). Мы не приводим здесь подробного обзора этих работ, поскольку он дается в разделе «Функциональный анализ». Отметим только, что в основе исследований упомянутых ученых лежат так называемые теоремы о гомеоморфизмах. В этих теоремах описываются пары пространств, между которыми оператор, отвечающий граничной задаче, устанавливает линейное взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие. Теоремы о гомеоморфизмах доказаны не для произвольных граничных условий, удовлетворяющих условию коэрцитивности, а лишь для так называемых нормальных граничных условий. Смысл условия нормальности состоит в том, что для операторов с нормальными граничными условиями (и только для них) справедлив аналог формулы Грина; иными словами, условие нормальности необходимо и достаточно для того, чтобы оператор, сопряженный к данному, сам являлся оператором некоторой граничной задачи вида



В. А. Кондратьев.

(85). На основании теорем о гомеоморфизмах удалось исследовать вопрос о локальном повышении гладкости решения краевой задачи: если в некоторой подобласти основной области правая часть уравнения (а если подобласть примыкает к границе, то и граничные функции) более гладкая, чем «в целом», то в этой подобласти решение также обладает лучшими свойствами. Другое применение указанных теорем заключается в подробном исследовании свойств функции Грина для общих задач.

Некоторые работы отечественных математиков посвящены построению и исследованию фундаментальных решений и функций Грина для эллиптических уравнений и систем. Я. Б. Лопатинский, З. Я. Шапиро и О. В. Гусева построили матрицы Грина для разных классов эллип-

тических систем с постоянными коэффициентами при различных предельных условиях на границе полупространства. Лопатинский построил также основное фундаментальное решение для эллиптических систем Петровского в малой области. Существование фундаментального решения в области произвольных размеров для линейного уравнения второго порядка с гладкими коэффициентами доказал Ю. И. Любич. О. А. Ладыженской дано описание исследования обобщенных решений краевых задач в пространствах $W_2^l(\mathfrak{D})$ с отрицательным l и, в частности, функции Грина, если известна разрешимость таких же задач в пространствах $W_2^{l_1}(\mathfrak{D})$ с положительным l_1 .

Мы упоминали в § 1 настоящего раздела об оценках производных функции Грина для уравнений Лапласа, данных Д. М. Эйдусом и Х. Л. Смолицким.

Аналогичные оценки получены В. А. Ильиным и И. А. Шихмаревым для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) u_{x_j}) - a(x) u = 0$$

при первом краевом условии.

Свойства предельных задач, рассматривавшихся до сих пор, носили в определенном смысле локальный характер: так, для получения априорной оценки достаточно изучать свойства решений с постоянными коэффициентами в малых областях (в этом, как уже указывалось, состоит одна из идей Шаудера). Совершенно иную природу имеет проблема индекса общей предельной задачи, требующая изучения задачи «в целом». Решение этой задачи было получено в замечательных работах М. Ф. Атья и М. И. Зингера (1963—1965 гг.) с помощью самых сов-

ременных алгебраических и топологических методов. До появления работ Атьи и Зингера по проблеме индекса (многомерный случай) советскими математиками были получены лишь некоторые частные результаты. Так, А. И. Вольперт вычислил (с помощью сведения к двумерному случаю) индекс трехмерной системы уравнений Лапласа при общих предельных условиях 1-го порядка. А. С. Дынин и М. С. Агранович, используя продолжение по параметру в классе интегро-дифференциальных граничных задач, выделили некоторые классы задач, имеющих нулевой индекс.



А. А. Дезин.

В последнее время были получены существенные результаты при изучении задач в том случае, когда не удовлетворяются условия коэрцитивности. Простейшая из таких задач — задача с косой производной. Об этой задаче мы уже говорили в первом разделе. Напомним, что она состоит в следующем: для линейного эллиптического уравнения второго порядка граничное условие имеет вид

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{\Gamma} = g(x),$$

где направление l зависит от точки границы x . Если в некоторых точках x направление l лежит в касательной плоскости к Γ , то при $n \geq 3$ задача некоэрцитивна.

Некоторые теоремы единственности и оценки числа решений упомянутой задачи были установлены А. В. Бицадзе. Он построил также ряд интересных примеров, допускающих решение в явном виде. Хермандер включил указанную задачу в общую теорию так называемых субэллиптических псевдодифференциальных операторов.

Значительные результаты были получены в совместных работах Ю. В. Егорова и В. А. Кондратьева, а также в работе М. В. Малютова. В них предполагалось, что множество M точек x , в которых направление l лежит в касательной плоскости к Γ , состоит из конечного числа гладких замкнутых линий λ , лежащих, естественно, на Γ (для простоты считаем $n = 3$). Существенное значение имеет характер изменения направления l при переходе через линии λ . Точного определения мы не приводим. Считается, что вдоль каждой линии λ этот характер один и тот же. Оказывается, что задача имеет однозначную разрешимость (или разрешимость при наличии конечного числа условий), если на линиях λ , на которых упомянутое изменение направления l носит определенный характер, задать значение решения. В работах Ю. В. Егорова и В. А. Кондратьева вводятся некоторые пространства с интегральной ве-

совой нормой и задача сводится к некоторой задаче Дирихле. М. В. Малютов использует вероятностную интерпретацию задач с косою производной и доказывает существование ограниченного решения, изучая некоторые диффузионные процессы, связанные с указанной задачей.

Другой класс с нарушением условий коэрцитивности был разобран Б. Р. Вайнбергом и В. В. Грушиным.

Упомянем о введенных и исследованных А. А. Дезиным так называемых инвариантных эллиптических системах — это класс систем, обобщающих на случай любого числа независимых переменных систему Коши — Римана, лежащую в основе теории функций комплексного переменного. Левая часть уравнений системы при этом записывается через операторы внешнего дифференцирования и метрически сопряженные с ними операторы, а неизвестными являются совокупности дифференциальных форм. Инвариантный характер систем дает простую возможность рассматривать системы в произвольной координатной системе и на римановом многообразии. Для них А. А. Дезиним исследуются обобщенные решения граничных задач.

В работах В. А. Кондратьева рассматриваются граничные задачи для линейных эллиптических уравнений любого порядка $2m$. В одной из них дается новая характеристика однозначной разрешимости первой граничной задачи для такого уравнения, причем эта характеристика выражается через понятия емкости и внутреннего диаметра области, в которой решается упомянутая задача. Емкость $l_{m,H}^n(\mathcal{E})$ для куба H в n -мерном пространстве, содержащего замкнутое множество, определяется формулой

$$l_{m,H}^n = \inf_H \frac{\int \sum_{i=1}^m (D^i u)^2 dv}{\int_H u^2 dv},$$

где D^i — всевозможные частные производные порядка i , а $\inf$ берется по всем m раз непрерывно дифференцируемым функциям, равным нулю на $\mathcal{E}$. Общие результаты были получены В. А. Кондратьевым при изучении им граничной задачи для линейного эллиптического уравнения любого порядка $2m$ в области, на границе которой имеется коническая точка. Он получил предельно точные оценки решения в некоторых весовых пространствах, доказал нормальную разрешимость задачи в этих пространствах и нашел асимптотическое разложение решения вблизи конической точки.

М. И. Вишик рассматривал задачу Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений произвольного порядка $2m$ и для квазилинейных сильно эллиптических систем. Такое уравнение имеет вид

$$\mathcal{L}_n \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^\alpha D^\alpha A_\alpha(x, D^\gamma u) = f(x),$$

где $|\gamma| \leq m$ и $A_\alpha(x, D^\gamma u)$ — нелинейные, вообще говоря, функции своих аргументов. Для них он доказал существование по крайней мере одного обобщенного решения, принадлежащего $W_p^m(\mathfrak{D})$ и имеющего внутри

$\mathfrak{D}$ обобщенные производные порядка $m + 1$. Число p характеризует рост функций $A_\alpha(x_1, \xi_\nu)$ по аргументам ξ_ν . При ряде предположений относительно функций $A_\alpha(x, D^\nu u)$ и $f(x)$ Вишик получает для приближенных решений задачи, которые им строятся с помощью некоторого видоизменения метода Галеркина, равномерные оценки в $W_p^m(\mathfrak{D})$ и в $W_2^{m+1}(\mathfrak{D}')$, где $\mathfrak{D}'$ — внутренняя подобласть $\mathfrak{D}$. Предельный переход получается далее на основе сильной компактности в $W_p^m(\mathfrak{D}')$. Эти работы были продолжены Ю. А. Дубинским и А. С. Симоновым.

В § 3 книги О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой «Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа» (1964 г.) рассматриваются системы вида

$$a_{ij}(x, \vec{u}) u_{x_i x_j}^{(l)} + b_i(x, \vec{u}, \vec{u}_x) u_{x_i}^{(l)} + b^{(l)}(x, \vec{u}, \vec{u}_x) = 0 \quad (l = 1, \dots, N), \quad (88)$$

где $\vec{u} (u', \dots, u^N)$ — вектор. Условие равномерной эллиптичности на решении $\vec{u}(x)$ определяется обычным образом через $a_{ij}(x, \vec{u})$. Для систем вида (88) оценивается $\max |\vec{u}_x|$ и $|\vec{u}_x| \propto$ через $\max |\vec{u}|$ лишь при необходимом условии, что b_i растут при $|p| \rightarrow \infty$ не быстрее $|p|$, а $b^{(l)}$ медленнее $|p|^2$, где

$$|p| = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^N (u_{x_k}^{(l)})^2}.$$

Для более общего класса систем

$$a_{ij}(x, \vec{u}) u_{x_i x_j}^{(l)} + a^l(x, \vec{u}, \vec{u}_x) = 0$$

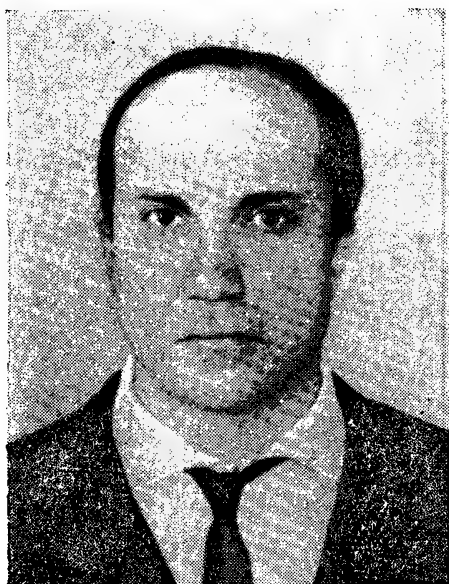
более сильные нормы (гельдеровы) оцениваются через $(|\vec{u}|, |\vec{u}_x|)$ при условии эллиптичности и гладкости a_{ij} и a^l . На основе этих априорных оценок исследуется разрешимость в целом (классическая и обобщенная) первой граничной задачи для системы (88). А. П. Осолков рассмотрел несколько более общие классы систем.

5

Задача Коши

и вопросы качественной теории

В последнее время в связи с развитием общей теории уравнений с частными производными и с некоторыми физическими приложениями появилось большое число исследований по задаче Коши для линейных уравнений второго порядка эллиптического типа. Единственность решения задачи при условии аналитичности коэффициентов уравнения (или системы) следует из общей теоремы Хольмгрена. В случае двух независимых переменных без предположения аналитичности



М. М. Лаврентьев.

единственность для систем первого порядка без кратных характеристик при двух независимых переменных была установлена (1933 г.) Карлеманом. Начиная с пятидесятых годов появляется ряд работ советских и зарубежных математиков, посвященных указанной выше единственности в различной норме. Существенные результаты в этом направлении были получены Е. М. Ландисом и М. М. Лаврентьевым. Большой обзор результатов об единственности решения задачи Коши, в частности и для эллиптических уравнений и систем, дается в работе А. Д. Мышкиса «Единственность решений задачи Коши» (1948 г.), где содержатся и результаты автора.

В дальнейшем предполагается, что $u(x)$ есть решение линейного однородного эллиптического уравнения второго порядка, коэффициенты которого обладают определенными свойствами гладкости. Приведем некоторые результаты, касающиеся упомянутой теоремы единственности и оценок $u(x)$ из работ Е. М. Ландиса и М. М. Лаврентьева. Для утверждения, что $u(x) \equiv 0$ в области $\mathfrak{D}$, достаточно потребовать, чтобы в какой-либо точке x_0 границы l функция u и ее нормальная производная стремились к нулю при условии, что $x \rightarrow x_0$ вдоль границы быстрее, чем $\exp[-(x - x_0)^{-C}]$, где C — некоторая положительная постоянная (Е. М. Ландис). Для этой постоянной М. М. Лаврентьев получил значение $2 + \delta$ ($\delta > 0$). В случае неограниченного цилиндра

$$\sum_{i=2}^n x_i^2 < r^2, \quad x_1 > 0$$

из условия $|u| < \exp(e^{-Cx_1})$, выполняющегося при достаточно больших x_1 , следует $u \equiv 0$ (C — постоянная, зависящая от уравнения). С вопросом о непрерывной зависимости от начальных данных связан следующий результат: если решение $u(x)$ определено в шаре $|x| < 1$, $|u(x)| < 1$ и на части S_0 границы, определяемой неравенством

$$\sum_{i=r}^n x_i^2 < r^2,$$

удовлетворяется условие

$$|u|_{S_0} < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{S_0} < \varepsilon,$$

то

$$|u(0)| < \varepsilon r^C \quad \text{или} \quad |u(0)| < \varepsilon C_1 r^{2+\delta},$$

где C, C_1 — зависят от уравнения.

Приведем связанную с указанным выше вопросом теорему о трех шарах (Е. М. Ландис), аналогичную теореме о трех кругах Адамара в теории аналитических функций. Рассмотрим простейшую формулировку этой теоремы.

Пусть решение $u(x)$ определено в шаре $|x| \leq 1$, непрерывно в замкнутом шаре и $M(1) = 1$, где

$$M(r) = \max_{|x|=r} |u(x)|.$$

Пусть далее $M(r_1) = r_1^\beta$ для некоторого r_1 ($0 < r_1 < 1$). Тогда для всякого r ($r_1 < r < 1$) справедливо неравенство

$$M(r) \leq (Cr)^\beta \lg \frac{C}{r},$$

где C зависит от постоянной эллиптичности α и размерности пространства n .

Сформулируем еще следствие, полученное Е. М. Ландисом из указанной теоремы. Пусть эллиптическое уравнение определено в полуцилиндре

$$\sum_{i=2}^n x_i^2 = r^2 \leq 1.$$

Существует такая постоянная N , зависящая от r , α и n , что для всякого решения $u(x)$ уравнения, определенного в указанном полуцилиндре и не равного тождественно нулю, справедливо неравенство

$$\limsup_{x_1 \rightarrow \infty} M(x_1) e^{Nx_1} > 0,$$

где

$$M(\tilde{x}_1) = \max_{x_1 = \tilde{x}_1} u(x).$$

Отметим кратко некоторые другие результаты Е. М. Ландиса, аналогичные результатам из теории аналитических функций. Им доказана теорема, аналогичная теореме Фрагмена — Линделефа в неограниченной области n -мерного пространства, имеющей тип телесного угла, при условии, что $u(x)$ непрерывна в $\mathfrak{D}$ и на границе $u(x) \leq 0$. При этом доказывается, что либо $u(x) \leq 0$ во всей $\mathfrak{D}$, либо для $M_1(r) = \sup_{|x|=r_1} u(x)$ устанавливается некоторое предельное неравенство при $r \rightarrow \infty$. Следующий результат аналогичен результату о связи числа нулей целой функции и порядком роста $M(r)$. Он устанавливается для обобщенных решений уравнения

$$\sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = 0$$



Е. М. Ландис.

во всем пространстве. Более детальные результаты в этом направлении получены при $n = 2$.

Близкими к предыдущим вопросам являются обратные задачи теории потенциала. Одна из этих задач состоит в отыскании тела единичной плотности по создаваемому им полю тяготения. Единственность решения при условии звездности искомого тела была доказана П. С. Новиковым. Эти работы продолжил Л. Н. Сретенский. В. К. Иванов и И. М. Рапопорт занимались обратной задачей в плоском случае. М. М. Лаврентьев получил некоторые оценки для обратной задачи теории потенциала в трехмерном случае.

Задача Коши для уравнения Лапласа явилась пробным камнем для некоторых общих методов теории уравнений с частными производными. Анализ понятия корректности был проведен (1943 г.) А. Н. Тихоновым. В дальнейшем он и его ученики указали ряд численных алгоритмов решения задач, некорректных в классическом смысле.

6

Уравнения, содержащие малый параметр

Целый ряд вопросов математической физики связан с наличием в соответствующих дифференциальных уравнениях или граничных условиях параметра ε (безразмерного), причем по самой постановке задачи ищется решение при малых (или больших) значениях ε . Задачи такого характера встречаются в гидродинамике (пограничный слой), теории электричества (скин-эффект), задачах дифракции (коротковолновая асимптотика), теории оболочек. В настоящем параграфе будем касаться упомянутого цикла задач только в его чисто математической формулировке и главным образом для уравнений эллиптического типа. Сама проблема характерна не только для этих уравнений.

Выше мы говорили о тех случаях, когда сама проблема приводит к уравнению с малым параметром. Но часто при решении уравнения без параметра $\mathcal{L}u = f$ вводятся дополнительные члены с малым параметром ε , например $\varepsilon M(u) + \mathcal{L}(u) = f$, что имеет смысл, если изучение последнего уравнения с соответствующими дополнительными условиями проще решения исходной задачи (при $\varepsilon = 0$), а решение исходной задачи получается путем предельного перехода. В настоящем параграфе будем придерживаться лишь первой точки зрения, т. е. считать заданным уравнение с малым параметром. В дальнейшем этот параметр будет множителем при старших производных.

Большое значение в этом направлении имела работа Н. Левинсона (1950 г.), в которой рассматривалась задача Дирихле

$$\varepsilon(u_{xx} + u_{yy}) + au_x + bu_y + cu = f, \quad u|_S = \varphi \quad (89)$$

($c < 0$) в конечной области $\mathfrak{D}$ с границей S , и было установлено, что ее решение при $\varepsilon \rightarrow +0$ стремится к вполне определенному решению пре-

дельного уравнения первого порядка

$$av_x + bv_y + cv = f.$$

Именно это решение полностью определяется условием $v|_{S_1} = \varphi$, где S_1 — та часть границы S , на которой характеристический вектор (a, b) направлен вне $\mathfrak{D}$. Исследование Левинсона продолжено в работах С. Л. Каменномостской, О. А. Олейник и О. А. Ладыженской для основных задач, отличных от задачи Дирихле, и для случая любого числа независимых переменных. Кроме того, в этих работах исследования проводились при более общих, чем в работе Левинсона, предположениях о расположении характеристик предельного уравнения, что существенно влияет на формулировку окончательного результата. При регулярном поведении характеристик и наличии гладкого решения задачи для предельного уравнения можно построить специального вида асимптотическое разложение решения задачи (89) по степеням ε .

Такого типа разложения («пограничный слой») строились для многих важных прикладных задач. В общей постановке такие разложения получены в работах М. И. Вишика и Л. А. Люстерника для решения первой граничной задачи в случае уравнения вида

$$\mathcal{L}_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \sum_{i=1}^{2l} \varepsilon^i \mathcal{L}_{2k+i} u_\varepsilon + \mathcal{L}_{2k} u_\varepsilon = f \quad (90)$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{\partial^m u}{\partial n^m} \right|_S = 0 \quad (m = 0, 1, \dots, k + l - 1), \quad (91)$$

где n — направление нормали к S . Уравнение (90) вырождается в эллиптическое уравнение

$$\mathcal{L}_{2k} v = f, \quad (92)$$

для которого граничные условия будут уже иными (некоторые граничные условия исчезают). Часто говорят о «регулярном вырождении» задачи для уравнения (90) в задачу для уравнения (92), когда разность $u_\varepsilon - v$ существенно отлична от нуля только вблизи границы S области $\mathfrak{D}$ (пограничный слой). Производная от функции типа пограничного слоя имеет, вообще говоря, вблизи границы производную по нормали более высокого порядка, чем по касательным направлениям. В случае «регулярного вырождения» разложение u_ε , как показано в работе М. И. Вишика и Л. А. Люстерника, имеет вид

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k u_k(x) + \sum_{l=0}^{m+k} \varepsilon^l v_l\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + z_m(x, \varepsilon), \quad (93)$$

где $z_m(x, \varepsilon)$ имеет порядок ε^{m+1} в $\overline{\mathfrak{D}}$ и вторая сумма состоит из слагаемых типа пограничного слоя. Мы опускаем довольно громоздкое описание процесса построения слагаемых формулы (93). Отметим лишь тот факт, что функции $v_l\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ строятся элементарно, как решения некоторых

обыкновенных дифференциальных уравнений. Это связано с возможностью выделения вблизи поверхности S координатной оси, нормальной к S , вдоль которой происходит наиболее интенсивное изменение $v_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)$. Указанное выше разложение справедливо, естественно, лишь при выполнении некоторых условий, на формулировке которых мы не останавливаемся.

Выше мы занимались случаем вырождения эллиптического оператора порядка $2k + 2l$ в эллиптический оператор порядка $2k$. В упомянутых работах Вишика и Люстерника рассмотрены и другие случаи. Отметим кратко некоторые из них. Уравнение нечетного порядка называется однохарактеристическим, если оно может быть записано в виде

$$\mathcal{L}_{2k+1}u \equiv M_1[M_{2k}u] + R_{2k}u = f, \quad (94)$$

где M_1u — дифференциальный оператор первого порядка, $M_{2k}u$ — эллиптический оператор порядка $2k$ и $R_{2k}u$ — любой оператор порядка не выше, чем $2k$. Вещественные характеристики уравнения (94) суть характеристики M_1u . Пусть S_1 — множество точек входа характеристик в $\mathfrak{D}$, а S_2 — множество точек их выхода из $\mathfrak{D}$. Как и выше, задача рассматривается в конечной области n -мерного пространства с границей S . Первой краевой задаче для уравнения (94) соответствуют краевые условия

$$\left. \frac{\partial^m u}{\partial n^m} \right|_S = 0 \quad (m = 0, 1, \dots, k-1), \quad \left. \frac{\partial^k u}{\partial n^k} \right|_{S_0} = 0,$$

где S_0 — есть или S_1 , или S_2 .

М. И. Вишик и Л. А. Люстерник исследовали вырождение однохарактеристического уравнения порядка $2k + 2l + 1$ в уравнение того же типа порядка $2k + 1$ при условии совпадения характеристик этих уравнений, а также вырождение уравнения эллиптического типа в однохарактеристическое уравнение и наоборот. Процесс построения u_ε аналогичен тому, который получался при вырождении эллиптического уравнения в эллиптическое, но при построении участвуют функции типа пограничного слоя только вблизи S_1 или S_2 . Отметим еще, что регулярность вырождения сводится к тому, что функции типа пограничного слоя имеют столько степеней свободы, что с их помощью можно компенсировать выпадающие при вырождении граничные условия. Надо иметь также в виду, что нет общих теорем о существовании решений однохарактеристических уравнений, и это приводит к необходимости заранее предполагать существование и гладкость решений соответствующих задач.

В работах М. И. Вишика и Л. А. Люстерника рассматриваются также асимптотики u_ε в случаях линейных уравнений с коэффициентами, большими в некоторой подобласти $\mathfrak{D}$, с быстро меняющимися в окрестности некоторых линий (поверхностей) коэффициентами и с быстро осциллирующими предельными условиями. Скажем кратко лишь о послед-

ней задаче в плоском случае. Пусть имеем уравнение

$$\mathcal{L}_\varepsilon u_\varepsilon = \sum_{i=0}^{2l} \varepsilon^i \mathcal{L}_i u_\varepsilon = 0,$$

где $\mathcal{L}_i$ — операторы порядка $2k + i$, причем $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_{2l}$ — эллиптические операторы, и граничные условия

$$\frac{\partial^m u}{\partial n^m} = A_m(s) e^{i\omega s} \quad (m = 0, 1, \dots, k + l - 1), \quad (95)$$

где ε — малый параметр, ω — большой параметр и s определяет положение точки на линии S (границе $\mathfrak{D}$). Вид асимптотического представления зависит от соотношения между большими параметрами ω и ε^{-1} . Если, например, $\omega = A\varepsilon^{-1}$, где A — постоянная, то

$$u_\varepsilon = e^{i\omega s} (v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots),$$

где функции v_i характера пограничного слоя и имеют $k + l$ степеней свободы (регулярность вырождения), что дает возможность удовлетворить условиям (95). Если эллиптический оператор не содержит ε , то все же за счет большого параметра ω решение имеет характер пограничного слоя.

В работах М. Ш. Бирмана и В. А. Солонникова для задачи

$$-\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ih} \frac{\partial u}{\partial x_h} \right) + b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + cu = f, \quad u|_S = 0$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$ обосновывается переход решения $u_\varepsilon(x)$ в решение соответствующего уравнения первого порядка с условием $u|_{S_1} = 0$, где S_1 та часть S , вдоль которой вектор $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ входит в область. Это обоснование приводится с помощью априорных оценок без исследования пограничного слоя. Рассмотрены и другие задачи такого типа.



М. Ш. Бирман.

7

Некоторые вопросы спектральной теории эллиптических дифференциальных операторов

Вопросы спектральной теории эллиптических дифференциальных операторов могут входить как в раздел об уравнениях с частными производными, так и в раздел функционального анализа, поэтому наш обзор будет сравнительно кратким.



В. Г. Мазья.

гармонической емкости. И. М. Глазман и М. Ш. Бирман изучали природу непрерывной и дискретной части спектра. В частности, Бирман выяснил, какую роль играют в этих вопросах теоремы о полной непрерывности операторов вложения в некоторых функциональных пространствах. Соответствующие операторы вложения исследовал впоследствии В. Г. Мазья, получивший окончательные результаты в терминах емкости. Из результатов общего характера отметим «принцип локализации» для спектра сгущения оператора (96) в $L_2(\mathfrak{D})$ ($\mathfrak{D}$ — область в R_n), который получили (независимо и различными способами) М. Ш. Бирман и И. М. Глазман. Именно они показали, что спектр сгущения (множество точек непрерывного спектра и собственных значений бесконечной кратности) не меняется при изменении границы области и условий (классических) на ней, а также коэффициентов, если изменения происходят вне какой-либо окрестности особых точек задачи. М. Ш. Бирман показал также, что такие возмущения сохраняют абсолютно непрерывную часть оператора граничной задачи с точностью до унитарной эквивалентности. Г. М. Жислин изучал природу спектра оператора Шредингера для случая многочастичных квантово-механических систем. Л. П. Нижник исследовал природу спектра неэллиптических операторов в частных производных.

Спектр несамосопряженного оператора (97) (с комплексным потенциалом $q(x)$) изучали В. Б. Лидский, Р. М. Мартиросян, Б. С. Павлов и др. В частности, Павлов обнаружил патологические (по сравнению с самосопряженным случаем) свойства спектра оператора (97) даже при быстро убывающем бесконечно дифференцируемом потенциале.

Оператор (97) в R_3 с достаточно хорошо убывающим потенциалом $q(x)$ детально исследовал А. Я. Повзнер. Основная задача у него — по-

Природу спектра эллиптических дифференциальных операторов изучали М. В. Келдыш, А. М. Молчанов, И. М. Глазман, М. Ш. Бирман, Г. М. Жислин, В. Г. Мазья и др. Основное внимание уделялось классическим сингулярным граничным задачам (в бесконечных областях или при наличии особых точек в коэффициентах) для дифференциальных операторов вида

$$\mathcal{L}u \equiv - \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) u_{x_j}) + q(x)u, \quad (96)$$

и в частности оператору Шредингера

$$\mathcal{L}u \equiv - \Delta u + q(x)u, \quad (97)$$

что приводит при вещественности $q(x)$ к самосопряженным операторам. А. М. Молчанов нашел критерий дискретности спектра оператора (97) (при $q(x) \geq 0$), для чего ему потребовалось использовать понятие

строение разложения произвольных функций по специальным решениям уравнения

$$-\Delta u + q(x)u = k^2 u, \quad (98)$$

аналогичного разложению в интеграл Фурье. С этой целью Повзнер изучил разрешающее ядро уравнения ²

$$-\Delta u + q(x)u - k^2 u = f \quad (99)$$

при условии

$$\frac{\partial u}{\partial r} - i|k|u = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (r \equiv |x| \rightarrow \infty). \quad (100)$$

Это ядро можно получить также как предел при $\varepsilon \rightarrow +0$ ядра резольвенты R_z ($z = k^2 + i\varepsilon$) оператора (97). С помощью разрешающего ядра А. Я. Повзнер построил решения $u(x, k)$ задачи рассеяния, т. е. решения уравнения (98) вида $u(x, k) = e^{i(k, x)} + v$, где v удовлетворяет условию (100). Решения $u(x, k)$ обычно называют рассеянными плоскими волнами. А. Я. Повзнер доказал теорему разложения по ним, аналогичную теореме Планшереля о преобразовании Фурье. Следует пояснить, что в таком разложении, вообще говоря, есть также конечное число дополнительных слагаемых, соответствующих собственным (отрицательным) значениям оператора (97).

Л. Д. Фаддеев доказал для таких разложений теорему равносходимости по отношению к разложению в интеграл Фурье. С помощью рассеянных плоских волн строится матрица рассеяния. В. С. Буслаев получил для оператора (97) так называемые формулы следов, связывающие матрицу рассеяния с характеристиками дискретного спектра и потенциалом. Близкие результаты независимо получил также М. И. Ломоносов. Фаддеев построил и исследовал резольвенту оператора (97) в весьма трудном случае квантовой задачи трех частиц. Он построил также решения задачи рассеяния для этого случая, доказал теорему разложения по ним, построил и исследовал матрицу рассеяния. Описанные выше исследования тесно связаны с обоснованием принципа предельного поглощения для уравнения (99) (см. § 3).

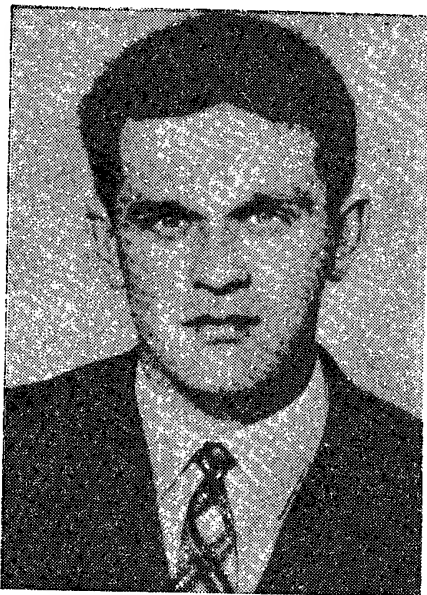
Исследованию спектральной функции и теорем разложения по собственным функциям посвящены исследования Ю. М. Березанского и Б. М. Левитана.

В заключение остановимся на одном вопросе спектральной теории несамосопряженных операторов, а именно на применении к теории эллиптических уравнений известного результата М. В. Келдыша, о кратной полноте собственных и присоединенных элементов некоторого класса несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве (1951 г.). М. В. Келдыш рассматривает уравнение вида

$$\mathcal{L}u \equiv a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + b_i(x)u_{x_i} + \sum_{j=1}^m c_j(x)\lambda^j u = 0$$

в ограниченной области $\mathfrak{D}$ из R_n с гладкой (ляпуновской) границей S , где коэффициенты a_{ij} , b_i и c_j — непрерывно дифференцируемые функции,

² Уравнение (99) рассматривается в точке непрерывного спектра оператора (97).



Л. Д. Фаддеев.

причем a_{ij} и c_j — вещественны, $c_m(x) > \alpha > 0$ и уравнение равномерно эллиптически в $\bar{D}$. Предельное условие берется в виде

$$u|_S = 0 \text{ или } \frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u|_S = 0,$$

где $\frac{\partial u}{\partial N}$ — производная по конормали и σ — непрерывная комплексная функция, заданная на S . М. В. Келдыш доказал m -кратную полноту собственных и присоединенных функций и получил асимптотическую формулу для собственных значений, обобщив известную формулу Карлемана. Эти результаты были продолжены в ряде работ, и в частности в работах В. Б. Лидского, а также В. Н. Визитея и А. С. Маркуса. В них рассматривались более сложные эллиптические операторы, исследовались разложения по собственным и присоединенным решениям, а также решалась смешанная задача для уравнения $u_t = \mathcal{L}u$.

8

Вырождающиеся эллиптические уравнения

Обширный цикл работ (более пятидесяти), которые начали появляться в сороковых годах, посвящен исследованию различных задач для эллиптических уравнений при наличии вырождения типа. Интерес к этим вопросам возник главным образом в связи с работами Трикоми по уравнениям смешанного типа и работами Ф. И. Франкля, в которых указывались приложения таких уравнений к газовой динамике. Первоначально в работах Ф. И. Франкля, К. И. Бабенко и других рассматривались линейные уравнения с двумя независимыми переменными (x, y) , главная часть которых имеет вид $y^m u_{xx} + u_{yy}$ или $u_{xx} + y^m u_{yy}$ ($m > 0$), так что $y = 0$ является линией вырождения.

М. В. Келдыш исследовал первую граничную задачу для уравнения $u_{xx} + y^m u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0$ ($m > 0$) (101) в области D , ограниченной отрезком $0 \leq x \leq 1$ оси $y = 0$ и гладкой кривой Γ , имеющей концы в точках $x = 0, x = 1$ и лежащей в полуплоскости $y \geq 0$. Он показал, что постановка задачи зависит от значения m и поведения коэффициента $b(x, y)$ при $y \rightarrow 0$. Если выполнено одно из условий:

- 1) $m < 1$, 2) $m = 1$, $b(x, 0) < 1$, 3) $1 < m < 2$, $b(x, 0) \leq 0$,
4) $m \geq 2$, $b(x, 0) < 0$,

то граничное условие надо задавать на всей границе. Если же

$$5) \ m = 1, \quad b(x, 0) \geq 1; \quad 6) \ 1 < m < 2, \quad b(x, 0) > 0,$$

$$7) \ m \geq 2, \quad b(x, 0) \geq 0,$$

то граничные условия надо задавать только на Γ . В указанных случаях М. В. Келдыш доказал существование и единственность решения граничной задачи.

О. А. Олейник для уравнения (101) в случаях 5) и 6) рассмотрела задачу с кривой производной

$$\frac{\partial u}{\partial l} + Au|_{\Gamma} = \varphi \quad (A \leq 0),$$

где l — направление, образующее острый угол с внутренней нормалью. Поставленная задача, как оказалось, при $c < 0$ может иметь не единственное решение, и число линейно независимых решений однородной задачи равно числу общих точек Γ с осью $y = 0$, в которых l образует с осью $x = 0$ тупой угол. При предположении гладкости данных доказано существование решения задачи.

Н. Д. Введенская для уравнения (101) в случаях 1) — 4) и для уравнения с главной частью $y^m u_{xx} + u_{yy}$ доказала существование и единственность решения граничной задачи, если на Γ задано указанное выше условие, а на отрезке оси $y = 0$ задана функция $u(x, 0)$.

В работах М. И. Вишика исследованы первая и вторая граничные задачи для уравнения

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) u_{x_j}) + b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = f(x), \quad (102)$$

имеющего вырождение на части $x_n = 0$ границы S . Вырождение квадратичной формы, соответствующей уравнению (102), принимается в виде

$$ca_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq x_n^\alpha \xi_n^2 \quad (\alpha > 0),$$

$$c_1 x_n^\alpha \leq a_{nn}(x) \leq c_2 x_n^\alpha,$$

где c , c_1 и c_2 — положительные постоянные. Постановка первой задачи при этом зависит от α и знака $b_n(x)$ при $x_n = 0$.

Исследование проводится применением методов функционального анализа, причем существенную роль играют теоремы вложения для вырождающихся на части границы области метрик, являющиеся обобщением теорем С. Л. Соболева. Отметим, что В. К. Захаров распространил результаты В. И. Вишика на эллиптические уравнения четвертого порядка с двумя независимыми переменными.

С. Г. Михлин применил вариационные методы для доказательства существования решения первой граничной задачи для вырождающегося уравнения (102) при $b_i \equiv 0$ ($i = 1, \dots, n$) и $c \equiv 0$. Предполагается, что уравнение (102) можно преобразовать к виду, не содержащему членов a_{in} ($i \neq n$), и что существует такая неотрицательная функция $\varphi(x_n)$, когда отношение $a_{nn}(x) : \varphi(x_n)$ непрерывно и ограничено сверху и снизу положительными числами. При этом исследуются спектральные

свойства оператора, полученного из указанной выше задачи путем расширения по Фридрихсу. С. Г. Михлин рассмотрел также общее уравнение (102) при условии, что некоторые из коэффициентов обращаются в нуль при $x_n = 0$, и указал простое достаточное условие того, что решение первой граничной задачи сводится к решению уравнения с вполне непрерывным оператором.

В работах Л. Д. Кудрявцева и А. А. Вашарина вариационным методом исследовалась первая граничная задача для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma^\alpha u_{x_i}) = 0 \quad (\alpha > 0), \quad u|_S = \varphi. \quad (103)$$

Здесь $\sigma(x)$ — положительная дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая неравенству $c_1 \rho(x) \leq \sigma(x) \leq c_2 \rho(x)$, где c_1, c_2 — положительные постоянные, а $\rho(x)$ — расстояние от точки x до границы S . Вашарин дал необходимое и достаточное условие на φ для разрешимости задачи (103) в классе функций с конечным интегралом энергии

$$\oint \sigma^\alpha(x) u_{x_i} u_{x_i} dx.$$

Л. Н. Слободецкий и И. А. Соломещ рассмотрели более общую задачу

$$\frac{\partial^n}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} (\sigma(x)^\alpha u_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial^l u}{\partial n^l} \right|_S = f_l \quad (l = 0, 1, \dots, n-1)$$

и установили необходимое и достаточное условие разрешимости этой задачи. Случай решения первой граничной задачи для уравнения (103) при вырождении лишь на части границы рассмотрен Л. Д. Кудрявцевым, А. А. Вашариным и П. И. Лизоркиным.

Более общие случаи вырождающихся уравнений (эллиптических и параболических) были сначала предметом исследований специалистов по теории вероятности (см. стохастические уравнения Ито и др.). У нас в этой области работали Е. Б. Дынкин, И. В. Гирсанов, Р. З. Хасьминский, М. И. Фрейдлин, Ю. Н. Благовещенский, М. В. Малютов и др. Мы не будем описывать здесь полученные ими содержательные и весьма общие результаты.

Изучение этих вопросов без применения методов теории вероятностей впервые начал итальянский математик Фикера, который рассмотрел первую граничную задачу для уравнений

$$\mathcal{L}u \equiv a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = f(x), \quad c < 0,$$

при условии, что $a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq 0$. Он доказал существование обобщенного решения в классе функций, несколько более широком, чем класс функций, в котором он установил теорему единственности. Обобщенное решение определяется им с помощью интегрального тождества вида (24)

и является элементом пространства $L_p(\mathfrak{D})$ с ограниченными $\text{vrai max } |u|$.

О. А. Олейник улучшила результат Фикеры, доказав единственность решения в том же классе, что и его существование. Сделано это в предположении, что части границы с разными граничными условиями должны быть разобщены. Даны достаточные условия, при которых решение обладает определенной гладкостью. Результатам Олейник предшествовали исследования А. М. Ильина, который рассмотрел уравнение вида

$$h(x) u_{x_n x_n} + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = f$$

при условии $h(x) \geq 0$, $\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq v \xi^2$, $v > 0$ и дал достаточные условия однозначной разрешимости первой граничной задачи.

И. Н. Векуа получил явную формулу для решения задачи Дирихле в полуплоскости $y \geq 0$ для уравнения

$$y^{2k} u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (k > -1).$$

А. Нарчаев исследовал первую граничную задачу для эллиптического уравнения четвертого порядка при вырождении на части границы области. Другие уравнения частного вида рассмотрены в работах М. Б. Капилевича и др.

Переходим к работам по вырождающимся системам уравнений.

В. П. Диденко рассмотрел первую граничную задачу для систем

$$\mathcal{L}u = -\frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) u_{x_j}) + b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = f(x), \quad (104)$$

где a_{ij} , b_i , c — заданные симметричные матрицы порядка m , $f(f_1, \dots, f_m)$ — заданный вектор, а $u(u_1, \dots, u_m)$ — искомый вектор, в области, граница которой состоит из отрезка AB оси $x_2 = 0$ и гладкой дуги Γ , лежащей в полуплоскости $x_2 > 0$ и с концами A , B . Система (104) в области $\mathfrak{D}_\delta = \mathfrak{D} \cap (x_2 > \delta)$, где δ — любое достаточно малое положительное число, предполагается сильно эллиптической. На оси $x_2 = 0$ она вырождается.

Ю. А. Дубинский доказал разрешимость первой краевой задачи для вырождающихся квазилинейных эллиптических систем порядка $2m$. Их обобщенные решения могут не иметь производных порядка m из L_2 , но производные от некоторых степеней производных порядка $(m-1)$ существуют и принадлежат L_2 . Доказательство полученных результатов проводится методом, аналогичным методу Галеркина.

С. А. Терсенов для системы

$$u_x - v_y = f_1, \quad yu_x + v_x + \alpha u = f_2 \quad (\alpha = \text{const})$$

с помощью элементарных решений построил потенциалы, которые дают возможность написать формулу, аналогичную формуле Шварца для аналитических функций.

Уравнения параболического типа

1

Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа

Линейным и квазилинейным уравнениям параболического типа посвящена за последнее десятилетие обширная литература как у нас, так и за рубежом. Мы имеем возможность лишь в общих чертах изложить материал, касающийся этих уравнений.

В тридцатых годах в связи с исследованиями стохастических процессов С. Н. Бернштейн доказал разрешимость задачи Коши для линейных параболических уравнений. Он дал способ оценки $\max |D'_x u|$ для решения этих уравнений как во всей области, где изучается решение $u(x, t)$, так и в любой внутренней подобласти, причем последние не зависят от начальных и граничных данных, а определяются лишь $\max |u|$ и расстоянием подобласти до границы области. А. Н. Тихонов исследовал для уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ смешанную задачу, граничное условие которой содержит производные высших порядков. Он доказал также, что задача Коши для указанного уравнения корректна в классе функций, растущих на ∞ не быстрее $C_1 \exp(Cx^2)$. Если двойку в показателе заменить на $2 + \varepsilon$, то единственности уже не будет. Он занимался также исследованием уравнения теплопроводности для случая нескольких независимых переменных.

Большое внимание в работах отечественных ученых в пятидесятых годах было уделено смешанным задачам трех классических типов для линейного параболического уравнения общего вида ($n \geq 2$)

$$u_t - \mathcal{L}u \equiv u_t - (a_{ij}(x, t) u_{x_i})_{x_j} + b_i(x, t) u_{x_i} + c(x, t) u = f(x, t). \quad (105)$$

Для них О. А. Ладыженская показала целесообразность перехода от классической постановки к обобщенной и, прежде всего, к обобщенным решениям из $W_2^{1,0}(Q_T)$ ($Q_T = \mathfrak{D} \times [0 \leq t \leq T]$). Элементы пространства $W_2^{1,0}$ квадратично суммируемы по Q_T вместе с обобщенными производными первого порядка u_{x_i} по пространственным координатам. Существование таких решений легко устанавливается с помощью метода Рунге, метода конечных разностей, метода Галеркина и метода продолжения по параметру. Гладкости (и даже непрерывности) коэффициентов и границы области $\mathfrak{D}$ при этом не требуется. Ладыженская исследовала однозначную разрешимость смешанных задач для уравнения (106) так же и в пространствах $W_2^{2,l}(Q_T)$, $l \geq 1$. После этого О. А. Ладыженской и М. И. Вишиком были даны функциональные методы доказательства разрешимости этих задач, не использующие дифференциальной природы оператора. Они оказались применимыми для

рассмотрения объектов более общей природы, в частности задача Коши для операторных уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + S(t)u = f(t), \quad u|_{t=0} = u_0, \quad (106)$$

в которых $u(t)$ и $f(t)$ суть функции t со значениями в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а $S(t)$ — неограниченные линейные операторы в $\mathcal{H}$, зависящие от параметра t . Полученные в этом направлении результаты изложены в обзорной статье М. И. Вишика и О. А. Ладыженской «Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений» (1956 г.). В дальнейшем задачу (106) изучали М. А. Красносельский, С. Г. Крейн, П. Е. Соболевский, М. З. Соломяк и др.

Ладыженской для решения уравнения (105), удовлетворяющего одному из классических предельных условий, была установлена предельно точная оценка нормы в пространстве $W_2^{2,1}(Q_T)$:

$$\int_{Q_T} (u_t^2 + u_{xx}^2) dx dt + \max_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathfrak{D}} u_x^2 dx \leq C \left[\int_{\mathfrak{D}} (u^2 + u_x^2)_{t=0} dx + \int_{Q_T} f^2 dx dt \right]. \quad (107)$$

Эту оценку В. А. Солонников обобщил на случай пространства $W_r^{2,1}(Q_T)$ при $r > 1$, причем он рассмотрел и неоднородные предельные условия. Аналогичные оценки получаются и в пространствах Гельдера $\mathcal{H}_{l, \frac{l}{2}}(\bar{Q}_T)$,

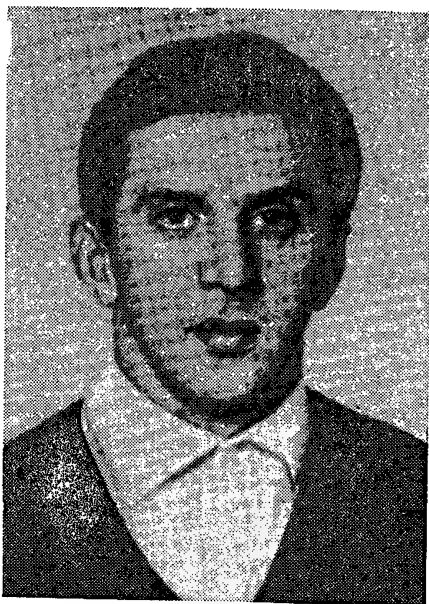
$l > 2$. При первом краевом условии они были доказаны американским математиком А. Фридманом, при втором и третьем — Л. И. Камыниным, В. Н. Масленниковой, В. А. Солонниковым. Отметим, что Солонников установил оценки, относящиеся к общим параболическим системам при общих коэрцитивных граничных условиях.

Рассмотрим работы, в которых исследуются точные зависимости гладкости обобщенных решений линейных параболических уравнений от гладкости его коэффициентов и свободных членов. При этом уравнение записывается в виде

$$u_t - \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} u_{x_j} + a_i u) + b_i u_{x_i} + cu = f + \frac{\partial}{\partial x_i} f_i, \quad (108)$$

где все коэффициенты и свободный член зависят от (x, t) . Началом исследований указанных выше зависимостей послужила работа (1957 г.) Нэша, в которой установлены априорные оценки нормы Гельдера функции Грина для уравнения

$$u_t - \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} u_{x_j}) = 0$$



В. А. Солонников.

только через верхнюю и нижнюю границы квадратичной формы $a_{ij}\xi_i\xi_j$ на сфере $|\xi|^2 = 1$, правда, при предположении, что $a_{ij}(x)$ — гладкие функции.

О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой были найдены точные показатели q_k пространств $L_{q_k, \infty}(Q_T)$, которым должны принадлежать коэффициенты и свободные члены уравнения (108) для того, чтобы все обобщенные его решения с конечной энергетической нормой обладали теми или иными свойствами гладкости (ограниченностью, непрерывностью по Гельдеру, непрерывностью производных первого порядка по x и т. д.). Отметим, что $a_{ij}(x, t)$ считаются ограниченными измеримыми функциями. Эти исследования были продолжены ими совместно с А. В. Ивановым и А. Л. Трескуновым в направлении рассмотрения более широкой шкалы пространств, к которым могут принадлежать коэффициенты, свободные члены и решения уравнений. Это — пространства $L_{q,r}(Q_T)$, в которых норма определяется равенством

$$\|u\|_{L_{q,r}(Q_T)} = \left[\int_0^T \left(\int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \right]^{\frac{1}{r}}.$$

Во всех этих работах предполагается равномерная параболичность уравнения.

Опубликовано ряд работ, посвященных так называемым задачам дифракции для уравнений разных типов, в том числе и для уравнений параболического типа. В этих задачах предполагается, что коэффициенты уравнений гладкие всюду, кроме конечного числа гладких поверхностей, где они имеют разрывы первого рода. На таких поверхностях разрыва ставятся два дополнительных условия на искомое решение, в которых задается величина скачка решения и его конормальной производной. В одной работе Ладыженской показано (1954 г.), что эти задачи можно протрансформировать в задачи на определение обобщенных решений с конечной энергетической нормой и, тем самым, вывести их разрешимость из уже доказанной ранее разрешимости обычных краевых задач в этом классе обобщенных решений. После этого в задачах дифракции оставался вопрос о том, как улучшаются дифференциальные свойства обобщенных решений при улучшении их у данных задач, в частности при каких условиях обобщенные решения будут классическими (заметим, что вопросы получения и исследования асимптотик в описываемой группе работ не ставились; им посвящен специальный раздел в математической физике). Эти вопросы исследованы разными способами в совместных работах В. А. Ильина и И. А. Шипмарева, совместных работах О. А. Ладыженской, Н. Н. Уральцевой и В. Ривкина. Задачам дифракции посвящены также работы А. А. Самарского, И. В. Гирсанова, О. А. Олейник, Л. И. Камынина, В. Н. Масленниковой и др. В них трактуется описанный здесь подход, а также более классические способы их решения.

З. И. Халилов применил для смешанных задач метод разложения по собственным функциям главной части, эллиптического оператора, вхо-

дящего в уравнение. Именно, для уравнения параболического типа $u_t = u_{xx} - c(x, t)$ и с условиями $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ решение ищется в виде ряда по $\sin kx$ ($k = 1, 2, \dots$). Для коэффициентов получается бесконечная система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Им установлена разрешимость этой системы. В работе А. М. Ильина указаны достаточные условия на коэффициенты линейного однородного параболического уравнения второго порядка для того, чтобы любое его решение с начальными данными, исчезающими на бесконечности, стремилось к нулю при $t \rightarrow \infty$ равномерно по x ($x_1, \dots, x_n$). Коэффициенты считаются зависящими от (x, t) .

Переходим к квазилинейным параболическим уравнениям. Еще в начале пятидесятых годов Н. Н. Мейман и С. Д. Эйдельман решили задачу Коши для нелинейных уравнений довольно общего вида «в малом» по времени. Т. Д. Вентцель и О. А. Олейник решили «в целом» задачу Коши и смешанную задачу для квазилинейных уравнений вида (при $n = 1$):

$$u_t - a(x, t, u) u_{xx} + b(x, t, u) u_x + c(x, t, u) = 0. \quad (109)$$

Далее это было сделано в работе (1956 г.) О. А. Ладыженской в многомерном случае в обобщенной и классической постановках и несколько иначе в работе Т. Д. Вентцель (1957 г.) в классической постановке с оценкой старших производных на границе для смешанной задачи. В упомянутых работах предполагалась ослабленная зависимость коэффициента $a(x, t, u)$ от u , которая снималась затем на основе упомянутой выше работы Нэша и локальных оценок $|u_x|$, данных в работе Ладыженской. Это позволило рассмотреть более общие уравнения вида

$$u_t - a_{ij}(x, t, u) u_{x_i x_j} + a(x, t, u, u_x) = 0 \quad (110)$$

при предположении, что члены из $a(x, t, u, u_x)$, квадратично растущие по $|u_x|$ (большой рост не допустим), имеют специальный вид. Такие уравнения для стационарного случая были изучены (1960 г.) Н. Н. Уральцевой, а для нестационарного — С. Н. Кружковым и О. А. Олейник (1961 г.). Общий случай квазилинейных уравнений вида

$$u_t - \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, t, u, u_x) + a(x, t, u, u_x) = 0, \quad (111)$$

$$u_t - a_{ij}(x, t, u, u_x) u_{x_i x_j} + a(x, t, u, u_x) = 0 \quad (112)$$

был исследован в работах О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой. Ими доказана однозначная разрешимость «в целом» основных смешанных задач при условиях, большинство из которых, как следует из примеров, являются в известном смысле необходимыми и касаются гладкости функций a_i , a_{ij} , a и их поведения при $|u|$ и $|p|$ ($p_i = u_{x_i}$), стремящихся к бесконечности (ср. § 3, раздел II). Эти и другие их результаты совместно с результатами В. А. Солонникова по линейным уравнениям составили основу монографии О. А. Ладыженской, В. А. Солонникова и Н. Н. Уральцевой «Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа» (1967 г.).

При одной пространственной переменной А. А. Филиппов дал другой способ оценки $\max |u_x|$ для уравнения (112), который привел к возможности несколько ослабить условия о поведении a_{11} и a при $|p| \rightarrow \infty$.

Опубликовано много работ по квазилинейным неравномерно параболическим уравнениям и в том числе по уравнениям с вырождением. В частности, это работы С. Л. Каменомостской и О. А. Олейник по задаче Стефана, работы по фильтрации и др. Описание ряда результатов данной области, полученных отечественными и зарубежными учеными, содержится в статье А. М. Ильина, А. С. Калашникова и О. А. Олейник «Линейные уравнения второго порядка параболического типа» (1962 г.) и в статье О. А. Олейник и С. Н. Кружкова «Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными» (1961 г.).

П. Е. Соболевский исследовал разрешимость смешанных задач для уравнений вида

$$u_j - a_{ij}(x, t) u_{x_i x_j} + b_i(x, t) u_{x_i} + f(x, t, u) = 0. \quad (113)$$

Полученные им результаты следуют из его же результатов по задаче Коши для абстрактных нелинейных уравнений вида

$$\frac{du}{dt} + S(t)u = f(t, u), \quad u|_{t=0} = u_0,$$

где $S(t)$ — линейный неограниченный оператор, а $f(t, u)$ — нелинейный оператор, подчиняющийся некоторым ограничениям. Ряд результатов по существованию обобщенных решений получен и для квазилинейных уравнений высших порядков. Мы упоминали во втором разделе о работах М. И. Вишика по эллиптическим уравнениям такого рода. Вишик рассмотрел также первую смешанную задачу для уравнения

$$u_t + \mathcal{L}u = f(x, t),$$

где эллиптический оператор $\mathcal{L}$ подчиняется условиям, при которых изучены эллиптические уравнения, и некоторым дополнительным. В операторе $\mathcal{L}$ за знак нелинейных членов $A_\alpha(x, D^\nu u)$ выносятся половина общего порядка дифференцирования. Ю. А. Дубинский смешанные задачи решал методом Минти — Браудера для некоторых более общих уравнений. При $n = 1$ он рассмотрел смешанные задачи для уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^k}{\partial x^k} A(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^l u}{\partial x^l}) = f(x, t),$$

где $l - k = 2r$ — четное число.

В совместной работе М. И. Вишика и Г. И. Эскина рассматриваются общие линейные параболические интегро-дифференциальные уравнения вида

$$Nu \equiv \int_Q \mathcal{L}(x, t, x - y, t - \tau) u(y, \tau) dy d\tau + \dots = f(x, t), \quad (114)$$

где $\mathcal{L}(x, t, z, \zeta)$ — обобщенная функция z и ζ , причем на ее преобразование Фурье (по z и ζ) $\tilde{\mathcal{L}}(x, t, \xi, \lambda)$ накладываются некоторые условия

при $|\xi| + |\lambda| > 0$. «Параболический вес» γ и «порядок» α оператора N определяются из соотношения

$$\tilde{\mathcal{L}}(x, t, s\xi, s^\nu\lambda) = s^\alpha \tilde{\mathcal{L}}(x, t, \xi, \lambda), \quad s > 0.$$

Область Q при $\gamma > 1$ есть цилиндр, лежащий между плоскостями $t = 0$ и $t = T$. Кроме уравнения (114) ставится нулевое начальное условие и граничные условия с операторами вида левой части (114). Приводятся алгебраические условия, при которых поставленная задача однозначно разрешима. В некоторых случаях кроме $u(x, t)$ задача содержит неизвестные плотности на поверхности Γ упомянутого цилиндра Q_T . Если уравнение (114) есть обычное уравнение параболического типа, то α и γ суть постоянные, большие единицы. В общем случае они могут зависеть от (x, t) . Определение пространства, в котором ищется решение, связано с факторизацией $\tilde{\mathcal{L}}$ при $(x, t) \in \Gamma$. Аналогичная задача для эллиптических интегро-дифференциальных уравнений упомянута в § 4 раздела II.

2

Параболические системы

Основная тема настоящего параграфа — задача Коши и смешанная задача для линейных систем, параболических по Петровскому и более общих. При этом не будем касаться связей этих задач с теорией обобщенных функций (откладывая этот вопрос до раздела V) и теорией абстрактных дифференциальных уравнений, а остановимся лишь на функционально-аналитических методах исследования. В конце параграфа кратко рассмотрим и квазилинейные системы.

Начнем с задачи Коши. С. Д. Эйдельман построил (1956—1965 гг.) фундаментальные матрицы решения для систем, параболических по Петровскому, с помощью метода Леви. Получающееся при этом интегральное уравнение относительно переменной t является вольтерровым и, значит, всегда разрешимо. Построение проводится при сравнительно малых предположениях о коэффициентах. Эйдельман получил оценки в C элементов фундаментальных матриц и их производных по x и t . Аналогичные оценки перенесены и на введенные им системы более общего вида (с различными «весами параболичности» по разным переменным). Все оценки он применил к доказательству классической разрешимости задачи Коши, при этом начальные данные могут иметь предельно допустимый рост при $|x| \rightarrow \infty$. Эти результаты, а также результаты по изучению различных свойств решений параболических систем изложены в книге С. Д. Эйдельмана «Параболические системы» (1964 г.). Близкие результаты примерно в то же время получил Аронсон.

Л. Н. Слободецкий несколько позже, но независимо от Аронсона, построил матрицу фундаментальных решений для параболических по Петровскому систем, оценил ее элементы и исследовал разрешимость задачи Коши для случая, когда начальные данные и свободный



С. Д. Эйдельман.

член, умноженные на экспоненциально убывающий вес, суммируемы с какой-либо степенью $q > 1$.

В. А. Солонников ввел в рассмотрение класс систем, более общий, чем системы, параболические по Петровскому, и для них установил однозначную разрешимость в разных функциональных пространствах, получив при этом предельно точные оценки в пространствах $W^{2b,1}$ и пространствах Гельдера.

Переходим к смешанным задачам для параболических систем. О. А. Ладыженская доказала однозначную разрешимость трех основных краевых задач для сильно параболических систем в классе обобщенных решений с конечной энергетической нормой. Данный ею способ получения предельно точной оценки (107) для одного параболического уравнения 2-го порядка вместе с оценками О. В. Гусевой по сильно

эллиптическим системам позволил получить такую же, как (107), предельно точную оценку для этих систем. Такая же разрешимость этих задач выводится и из теорем о разрешимости задачи Коши для абстрактных уравнений вида (40), § 4 раздел I.

После появления упоминавшихся нами выше работ З. Я. Шапиро и Я. Б. Лопатинского, в которых был выделен широкий класс краевых задач для эллиптических по Петровскому систем, стали изучаться такие же краевые задачи для параболических по Петровскому систем в основном первого порядка по t . Т. Я. Загорский сформулировал в алгебраической форме условие дополнительности Лопатинского применительно к параболическим системам и сделал попытку построить теорию потенциала для таких задач с тем, чтобы свести краевую задачу к системе вольтерровых интегральных уравнений на границе. В качестве ядер потенциалов были взяты фундаментальные решения краевой задачи в полупространстве с δ -функциями на границе, причем как сама параболическая система, так и граничный оператор имели постоянные коэффициенты и содержали только старшие члены. Эти фундаментальные решения были построены с помощью преобразования Лапласа и оценены. Однако такие исследования не привели к доказательству теоремы о разрешимости смешанной задачи для параболических систем из-за ряда неточностей, допущенных уже при оценке упомянутых выше полупространственных фундаментальных решений. Т. Я. Загорский предполагал, что порядок дифференциальных операторов, стоящих в граничных условиях, меньше веса параболичности $2b$. Исследования Загорского относятся к 1955—1958 гг.; они изложены также в его монографии «Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа» (1961 г.).

В 1958 г. Л. Н. Слободецкий анонсировал оценки решений тех же краевых задач, которые рассматривал Загорский в введенных и изученных им пространствах $W_2^{2bl,l}$ с любым положительным l . Он указал, что эти оценки получаются методом «замораживания коэффициентов» Шаудера из оценок решений полупространственных краевых задач для систем с постоянными коэффициентами, которые устанавливаются с помощью перехода к преобразованию Фурье и равенства Парсеваля. Однако кроме условий дополненности Слободецкий накладывает на краевые условия еще одно (как выяснилось впоследствии — излишнее) ограничение. Кроме того, он обобщает оценку (107) (для одного уравнения и сильно параболических систем) на случай неоднородных граничных условий. В дальнейшем развивались оба эти подхода к параболическим краевым задачам.

Так, в 1963—1964 гг. в работах М. С. Аграновича и М. И. Вишика была доказана однозначная разрешимость и получены точные оценки решений краевых задач, удовлетворяющих условию Лопатинского, для параболического уравнения любого порядка в пространствах $W_2^{2bl,l}(Q_T)$. Для получения этих результатов детально изучались так называемые эллиптические задачи с параметром, представляющие собой преобразования Лапласа от параболических задач, если коэффициенты всех операторов не зависят от t . Переход к общему случаю осуществлялся «замораживанием коэффициентов» по t , что позволило сначала доказать разрешимость задачи «в малом» по t , а потом конечным числом шагов исчерпать любой промежуток $0 \leq t \leq T$. Агранович и Вишик указали также, что все сделанное ими распространяется на весь класс параболических в смысле Петровского систем. В это же время С. Д. Эйдельман доказал точные оценки фундаментальных решений, полученных в работах Т. Я. Загорского, для такого класса параболических по Петровскому систем, первая краевая задача для которых удовлетворяет условию Лопатинского. Это позволило построить (1967 г.) и точно оценить матрицу Грина для краевой задачи в произвольной цилиндрической области, когда порядок граничных операторов ниже, чем порядок системы.

Наиболее сильные результаты по смешанным задачам получены В. А. Солонниковым в 1963—1965 гг. Он рассмотрел краевые задачи, удовлетворяющие лишь условию дополненности, для систем, более общих, чем параболические системы Петровского. Порядки дифференциальных операторов, входящих в краевые условия, могут быть любыми. Солонников установил однозначную разрешимость этих задач в пространствах $W_q^{2bl,l}$ и пространствах Гельдера на основании полученных им предельно точных априорных оценок и построенных им «регуляризаторов».

По разрешимости смешанных задач для квазилинейных параболических систем отметим следующие работы.

В совместных работах О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой изучены линейные и квазилинейные системы вида

$$\vec{u}_t - a_{ij}(x, t, \vec{u}) \vec{u}_{x_i x_j} + \vec{A}(x, t, \vec{u}, \vec{u}_x) = 0 \quad (115)$$

и для них доказана при некоторых естественных условиях однозначная разрешимость в целом (обобщенная и классическая) первой смешанной задачи. М. И. Вишик, Ю. А. Дубинский, О. А. Ладыженская и Н. Н. Уральцева исследовали наличие обобщенных решений смешанных задач для квазилинейных параболических систем, эллиптическая часть которых имеет вид, указанный в § 5 раздела II в связи с работами М. И. Вишика. В работах Н. Д. Введенской, Т. Д. Вентцель, С. К. Годунова и других исследуются специально классы квазилинейных параболических систем с одной пространственной переменной, моделирующие в некотором смысле уравнения газовой динамики.

3

Вырождающиеся параболические уравнения

Рассмотрим некоторые работы по вырождающимся параболическим уравнениям, появившиеся за последние десять лет. В работе А. М. Ильина рассмотрено линейное уравнение вида

$$u_t - h(x, t) u_{x_0 x_0} - a_{ij}(x, t) u_{x_i x_j} + \dots = f(x, t),$$

$$a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \mu \xi_i \xi_j \quad (\mu > 0); \quad h(x, t) \geq 0;$$

$$x(x_0, \dots, x_n),$$
(116)

которое может вырождаться ($h = 0$) как внутри цилиндра Q_T , так и на его границе. Указаны условия, при которых существует единственное обобщенное решение уравнения (116), непрерывное в Q_T и обращающееся в нуль на его основании и боковой поверхности. Подробно исследован случай одной пространственной переменной. При доказательстве существования решения Ильин заменяет h на $h + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) и использует априорные оценки решений полученного невырожденного параболического уравнения, равномерные по ε .

Г. И. Макаренко рассмотрел первую смешанную задачу для линейного параболического уравнения

$$u_t - a_{ij}(x, t) u_{x_i x_j} + b_i(x, t) u_{x_i} + c(x, t) u = f(x, t) \quad (117)$$

с вырождением квадратичной формы при $t = 0$. Предполагалось выполнение неравенств

$$|a_{ik}| \leq \frac{k}{t^\alpha}, \quad |b_i| \leq \frac{k}{t^\alpha}, \quad |c| \leq \frac{k}{t^\alpha} \quad (\alpha = \text{const} > 0).$$

Он указал достаточные условия существования и единственности решения как при $\alpha < 1$, так и при $\alpha \geq 1$. При доказательстве существования применяется аналог метода Галеркина. Этот результат Макаренко обобщил на системы параболических уравнений, вырождающихся при $t = 0$. Он рассмотрел также случай вырождения уравнения (117) на боковой поверхности Q_T и установил, когда часть этой поверхности освобождается от граничных условий.

Для линейного параболического уравнения (117) О. А. Олейник исследовала задачу Коши в слое Q_T ($0 < t < T$; $x \in R_n$) с вырождением квадратичной формы $a_{ij} \xi_i \xi_j \geq 0$ в Q_T , построила обобщенное решение задачи и доказала его единственность. Это решение может быть определено следующим образом: к старшим членам добавляется $\varepsilon \Delta u$ и $\varepsilon > 0$, а начальное данное и свободный член считаются зависящими от ε . Решение получается в соответствующей норме при $\varepsilon \rightarrow +0$. Доказано также существование гладкого решения задачи Коши и первой смешанной задачи при гладкости коэффициентов уравнения.

Г. Н. Смирнова установила существование и единственность ограниченного решения смешанных задач для уравнения ($n = 1$)

$$q(x, t) u_t - a(x, t) u_{xx} + b(x, t) u_x + c(x, t) u = f(x, t), \quad (118)$$

где $q(x, t) \geq 0$, $a(x, t) \geq 0$ в областях $\{t \geq 0, x \geq 0\}$ и $\{t \geq 0, 0 \leq x \leq 1\}$. В зависимости от характера обращения в нуль $q(x, t)$ и $a(x, t)$ она указала, когда часть или вся граница освобождается от граничных условий. Исследование проводилось с помощью барьеров и априорных оценок для невырождающихся параболических уравнений.

Переходим к задачам по нелинейным параболическим уравнениям с вырождением. Ю. А. Дубинский исследовал первую смешанную задачу для квазилинейного уравнения, эллиптическая часть которого аналогична ранее рассмотренной М. И. Вишиком (см. § 5 раздела II). Вырождение имеет место в условии параболичности. Обобщенное решение определяется интегральным тождеством. При выполнении некоторых условий доказывается существование по крайней мере одного решения задачи. При доказательстве вводится член с малым параметром ($-\varepsilon u_{tt}$), после чего уравнение становится эллиптическим. Далее применяется метод Галеркина, что приводит к некоторой алгебраической нелинейной системе, разрешимость которой следует из исследований Вишика. Предельный переход при $\varepsilon \rightarrow +0$ исследуется на основе доказанной Ю. А. Дубинским теоремы о некотором вложении нелинейных множеств в нормированное пространство.

Смешанные задачи для параболических уравнений вида

$$u_{xx} = x^m [1 + p(x)] u_t \quad (x \geq 0, t \geq 0)$$

исследовали Г. И. Баренблатт и Б. М. Левитан.

Ряд работ посвящено изучению типа уравнений нестационарной фильтрации газа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2} \quad (u \geq 0; \quad \varphi'(u) > 0 \text{ при } u \neq 0; \quad \varphi'(0) = 0).$$



О. А. Олейник.

Это нелинейное уравнение параболического типа, вырождающееся при значении $u = 0$ неизвестной функции. Б. Я. Зельдович и А. С. Компанец, а также Г. И. Баренблатт установили, что для него, в отличие от невырождающихся параболических уравнений, начальное возмущение, отличное от нуля на конечном интервале x , распространяется с конечной скоростью. Этот вопрос рассмотрен также Г. И. Баренблаттом и М. И. Вишиком. О. А. Олейник доказала существование и единственность обобщенного решения задачи Коши для упомянутого уравнения и для некоторых более общих уравнений в классе ограниченных функций. Она показала, что в точках, где $u \neq 0$, обобщенное решение имеет непрерывные производные, входящие в уравнение, и удовлетворяет этому уравнению в обычном смысле.

М. Л. Краснов исследовал одну смешанную задачу для уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ t^\alpha \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 + \frac{\partial u}{\partial x} \right] \right\} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + \\ + c(x, t) u = f(x, t) \quad (\alpha > 0)$$

с вырождением при $t = 0$. Граничные условия — периодические. Он рассмотрел также еще одно уравнение в области $\{0 < t < T, 0 < x < 1\}$, вырождающееся при $x = 0$ (в предыдущем уравнении t^α заменяется на x^α). В работах Краснова применяется аналог метода Галеркина. Методами теории вероятностей Ю. Н. Благовещенский исследовал вырождающееся уравнение ($n = 1$)

$$u_t = b^2(x, t, u) u_{xx} + a(x, t, u) u_x.$$

Уравнения гиперболического типа

1

Задача Коши для уравнений и систем

Исследования уравнений гиперболического типа до 1917 г. проводились у нас в работах В. А. Стеклова. Он рассматривал при различных предположениях о коэффициентах и предельных условиях смешанную задачу в одномерном случае (малые колебания неоднородной конечной струны). Об этих задачах будем говорить в § 3. В тридцатых годах появляются работы С. Л. Соболева и И. Г. Петровского о задаче Коши для линейных и квазилинейных уравнений и систем гиперболического типа, которые явились исходным пунктом многих дальнейших исследований.

В 1930 г. С. Л. Соболев получил аналог известной формулы Кирхгофа для волнового уравнения с непостоянным коэффициентом

$$\frac{1}{c^2(x, y, z)} u_{tt} - (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0. \quad (119)$$

Этот аналог формулы Кирхгофа позволил свести задачу Коши уравнения (119) к интегральному уравнению Вольтерра, к которому применим метод последовательных приближений для всех значений t , достаточно близких к начальному $t = 0$.

Изложим некоторые подробности. Указанная задача естественно приводит к вариационной задаче для функционала

$$I = \int_{M_0}^M \frac{ds}{c(x, y, z)}, \quad (120)$$

и при достаточной гладкости $c(x, y, z)$ может быть построено центральное поле этой задачи для произвольной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в качестве центра поля. Пусть s — длина экстремали, соединяющей M_0 с точкой $M(x, y, z)$ поля, (ϑ_0, φ_0) — угловые координаты (сферической системы координат) касательной к экстремали в точке M_0 , τ — величина интеграла (120) по экстремали M_0M . Положение точки M можно определить координатами $(s, \vartheta_0, \varphi_0)$. Пусть

$$\delta = \frac{D(x, y, z)}{D(s, \vartheta_0, \varphi_0)}$$

является функциональным определителем. Существенное значение для всего построения имеет функция $\sigma(M, M_0)$, определяемая формулой

$$\sigma(M, M_0) = \sqrt{\frac{c(M) \sin \vartheta_0}{c(M_0) \delta}}.$$

Уравнение Вольтерра имеет вид

$$u(M_0, t) = F(M_0, t) + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{D}_t} [u] \Delta \sigma(M, M_0) d\vartheta, \quad (121)$$

где $[u] = u(M, t - \tau(M, M_0))$ — запаздывающее значение функции $u(M, t)$, $F(M_0, t)$ — известная функция, определяемая начальными данными, $\mathfrak{D}_t$ — квазишар радиуса t с центром в M_0 , т. е. множество точек M , для которых $\tau(M, M_0) \leq t$.

Отметим еще, что $\sigma(M, M_0)$ является решением уравнения

$$2 \operatorname{grad} \sigma \cdot \operatorname{grad} \tau + \sigma \Delta \tau = 0.$$

Если $c(M) = \text{const}$, то $\sigma = \frac{1}{r}$ и $\Delta \sigma = 0$, а формула (121) приводится к известной формуле Пуассона. При переменной $c(M)$ для $\Delta \sigma(M, M_0)$ справедлива оценка

$$|\Delta \sigma(M, M_0)| \leq \frac{k}{\tau(M, M_0)} \quad (k = \text{const}).$$

Требование малости t обусловлено возможностью построения указанного выше центрального поля экстремалей.

В работах (1934 г.) С. Л. Соболева метод сведения задачи Коши к интегральному уравнению применялся и в случае задачи Коши для произвольного линейного гиперболического уравнения

$$u_{tt} - a_{ij} u_{x_i x_j} + b_i u_{x_i} + cu = f, \quad (122)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x_1, \dots, x_n), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x_1, \dots, x_n), \quad (123)$$

где a_{ij} , b_j , c и f — функции $(x_1, \dots, x_n, t)$. Это делается для случая гладких коэффициентов и начальных данных. Для них доказывается существование и единственность гладких решений задачи (122), (123). Для этих решений и их производных устанавливаются интегральные оценки, позволившие путем предельного перехода получить так называемые обобщенные решения задачи (122), (123) при менее жестких требованиях к коэффициентам и начальным данным. Это обобщенное решение при любом фиксированном t является элементом пространства W_2^1 , а u_t — элементом L_2 в любой конечной части пространства $(x_1, \dots, x_n)$. Мы не приводим указанные Соболевым условия на коэффициенты и начальные данные задачи, обеспечивающие существование обобщенного решения, его единственность и непрерывную зависимость от u_0 и u_1 в W_2^1 и L_2 . Доказано, что классическое решение получается в случае, когда u_0 и u_1 принадлежит соответственно W_2^k и $W_2^{(k-1)}$, где $k \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3$. Все сказанное вы-

ше относится к случаю нечетного n . При четном n применяется известный метод спуска. Во всех случаях решение получается лишь «в малом» по t . Отметим, что в начале XX века задача Коши для линейных уравнений гиперболического типа была решена Адамаром иным методом с использованием особого понятия интеграла.

Как мы указывали в разделе I, С. Л. Соболев при решении задачи Коши для линейных уравнений гиперболического типа впервые ввел функционалы (обобщенные функции). Основным пространством при этом являлось пространство $C_{(tn)}^l$ l раз непрерывно дифференцируемых финитных функций. Он рассматривал тот случай, когда правая часть уравнения — любой функционал над этим пространством. При этом он применял к функционалам аппарат усреднения (сглаживания), что дало возможность построить в пространстве функционалов плотные множества регулярных функционалов, определяемых гладкими функциями. Решение задачи Коши на этих функциях и предельный переход в пространстве функционалов дали возможность получить решение задачи Коши в пространстве функционалов.

Для квазилинейных гиперболических уравнений задача Коши была решена (1935 г.) «в малом» Шаудером. Ф. И. Франкль исследовал ее несколько иначе (1937 г.).

В работах (1939 г.) С. Л. Соболева для квазилинейного уравнения гиперболического типа

$$a_{ij}(x, t, u, u_x, u_t) u_{x_j x_i} - u_{tt} = F(x, t, u, u_x, u_t) \quad (124)$$

доказана разрешимость задачи Коши «в малом» при тех же условиях на начальные данные, что и классическая разрешимость для линейных уравнений. При доказательстве существования и единственности решения указанной задачи применяются полученные ранее результаты для линейных гиперболических уравнений, неравенства, аналогичные известным неравенствам Фридрихса — Леви и теоремы вложения. В процессе доказательства уравнение (124) заменяется функциональным уравнением, которое получается из уравнения (124) заменой в функции $u(x, t)$

и ее производных, входящих в a_{ij} и F , аргумента t на $t - \eta$. При разделении промежутка изменения t на части получается цепь линейных уравнений, причем в первом уравнении на промежутке $-\eta \leq t < 0$ рассматривается задача с начальными данными, равными нулю, а общая задача сводится к ней. Компактность полученного таким образом для $\eta > 0$ семейства решений позволяет найти предельную при $\eta \rightarrow +0$ функцию, которая оказывается решением уравнения (124). Такая замена t на $t - \eta$ была раньше дана И. Г. Петровским при исследовании квазилинейных систем.

В период с 1936 г. по 1938 г. вышел ряд работ И. Г. Петровского, посвященных исследованию задачи Коши для систем уравнений. Приведем результаты работы, касающейся систем, гиперболических по Петровскому. Общего определения этого понятия мы не приводим. Рассматривается система вида

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = F_i \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

где F_i зависит от $t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_N$ и производных

$$\frac{\partial^{k_0+k_1+\dots+k_n} u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \quad (j = 1, 2, \dots, N),$$

причем выполнены неравенства

$$k_s \geq 0, \quad k_0 < n_j, \quad n_j > 0, \quad \sum_{s=0}^n k_s \leq n_j. \quad (125)$$

Последнее из этих неравенств характеризует так называемые системы Ковалевской. При условии, что функции F_i имеют непрерывные и ограниченные производные по всем аргументам до порядка $4n + 4$ в некоторой области пространства $(x_1, \dots, x_n, t)$ при всех u_i и их частных производных, входящих в F_i и не превосходящих некоторой положительной постоянной, и что система гиперболична по Петровскому, доказано существование и единственность решения задачи Коши «в малом» по t и непрерывность в C зависимости решения u_i ($i = 1, \dots, N$) от начальных данных и их производных до некоторого порядка. В этом же периоде Петровский занимался также корректностью постановки задачи Коши для систем линейных уравнений с зависящими только от t коэффициентами, для которых не обязательно выполняется последнее из неравенств (125). В этом случае для единственности решения надо задавать начальные данные для u_i и их производных на всей гиперплоскости $t = 0$, а не только на части ее, как для системы гиперболического типа при определении решения на конечном промежутке изменения t .

В работе И. Г. Петровского подробно исследована зависимость решения задачи Коши от начальных данных для общего гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \sum_{k_0 < k} a_{k_0 k_1 \dots k_n} \frac{\partial^k u}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} + \dots, \quad (126)$$

где выписаны лишь члены, содержащие производные наивысшего порядка. Для таких уравнений Петровский установил понятие лакун и исследовал возможность их образования и их устойчивость.

Рассмотрим некоторые подробности. Уравнению (126) соответствует дифференциальное уравнение первого порядка для функции $r(x_1, \dots, x_n)$:

$$\sum_{h_0+h_1+\dots+h_n=h} a_{h_0 h_1 \dots h_n} \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right)^{h_1} \dots \left(\frac{\partial r}{\partial x_n} \right)^{h_n} = 1, \quad (127)$$

причем поверхности $t + r(x_1, \dots, x_n) = \text{const}$ являются характеристиками для уравнения (127). На этих поверхностях решения уравнения могут иметь разрывы производных некоторых порядков, и данные Коши на них не могут задаваться произвольно. Если обозначить $\frac{dr}{dz_s} = \alpha_s$, то уравнение (127) является уравнением некоторой поверхности

$$\psi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1 \quad (128)$$

в пространстве $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. И. Г. Петровский называет уравнение (126) общим гиперболическим уравнением в некоторой области пространства $(x_1, \dots, x_n, t)$, если для всех точек этой области поверхность (128) состоит из $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ овалов, вложенных последовательно друг в друга и заключающих в себя начало координат, а при нечетном k еще из так называемого непарного куска, гомеоморфного проективной гиперплоскости. Петровский доказал, что для общего гиперболического уравнения задача Коши имеет единственное решение, непрерывно зависящее от начальных данных в метрике L_2 .

Важную роль при решении задачи Коши играет характеристический конус с вершиной в какой-либо заданной точке $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, t^{(0)})$, в которой исследуется значение решения задачи Коши. Эта поверхность типа конуса (вообще с криволинейными образующими) разбивает гиперплоскость $t = 0$ на несколько областей. Лакунами И. Г. Петровский называет те из этих областей, которые обладают свойством, что значения начальных данных в этой области не влияют на значение решения в вершине конуса $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, t^{(0)})$.

Вопрос о лакунах был ранее рассмотрен для одного линейного дифференциального уравнения второго порядка. И. Г. Петровский изучал этот вопрос для общих гиперболических уравнений. Он указал необходимые и достаточные условия существования лакун для линейных уравнений с постоянными коэффициентами, содержащих только старшие производные, и дал необходимое условие существования лакуны для уравнений с переменными коэффициентами. Петровский исследовал также устойчивость лакуны при малых изменениях коэффициентов уравнения (126). Наличие лакуны связано с конечной скоростью распространения начальных возмущений и с четким задним фронтом.

О. А. Ладыженская построила сходящиеся конечно-разностные схемы для решения задачи Коши для линейных и квазилинейных систем, гиперболических по Петровскому. Для неявных схем сходимость имеет

место независимо от соотношения шагов по времени и пространственных переменных.

Решение задачи Коши для линейных гиперболических уравнений (и систем) можно иногда представить в виде суммы интегральных операторов от функций, входящих в начальные условия, причем ядра этих операторов являются производными от так называемого фундаментального решения, удовлетворяющего сопряженному уравнению (системе) и имеющего особенности на конусе характеристик. Это фундаментальное решение и его производные могут быть и обобщенными функциями. Для многих гиперболических уравнений высшего порядка фундаментальные решения задачи Коши были построены Цейлоном и Герглотцем. Для общего линейного гиперболического уравнения произвольного порядка с постоянными коэффициентами, не содержащего младших членов, фундаментальное решение было впервые построено И. Г. Петровским в работе, в которой им исследованы условия наличия лакун. В работе И. М. Гельфанда, З. Я. Шапиро и В. А. Боровикова дан простой вывод формулы Герглотца — Петровского путем наложения плоских волн с использованием формулы Радона разложения δ -функции по плоским волнам. Близкие результаты были получены Ф. Ионом. Аналитический характер фундаментального решения в окрестности неособой точки характеристического конуса был выяснен В. А. Боровиковым.

В работе В. М. Бабича строится и изучается фундаментальное решение общего гиперболического в смысле Петровского уравнения с аналитическими коэффициентами. С помощью метода Адамара строятся сначала решения уравнения, аналогичные плоским волнам, и из них конструируется фундаментальное решение. В. М. Бабичем построено и исследовано фундаментальное решение (тензор) для гиперболических систем типа Ковалевской с аналитическими коэффициентами.



В. М. Бабич.

2

Задача Коши

для квазилинейных уравнений и систем первого порядка

Задаче Коши для квазилинейных уравнений и систем первого порядка посвящено немало работ отечественных и зарубежных ученых. Выше мы говорили о разрешимости задачи Коши для гиперболических уравнений и систем «в малом» вблизи гладких

многообразий, несущих гладкие начальные данные. Это было сделано в работах С. Л. Соболева, И. Г. Петровского, а также в совместной работе Шаудера и Кржижанского.

При попытках решить задачу Коши «в целом» (при всех $t \geq 0$) оказывается, что решение не будет гладким и его надо искать в классе разрывных функций и определять каким-либо образом как обобщенное решение. Такого рода вопросы рассматривались в основном лишь для уравнений газовой динамики. Строгие результаты по однозначной разрешимости «в целом» задачи Коши и смешанной задачи получены только для модельных задач, в которых неизвестной является одна функция. Большая часть работ посвящена задаче

$$u_t + \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, t, u) = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad (129)$$

где $\varphi(x, t, u)$ — заданная функция трех аргументов.

Начало этим исследованиям положила работа Е. Хопфа (1950 г.), где решалась задача (129) с $\varphi = \frac{1}{2}u^2$. Для нее Хопф из всего множества возможных разрывных решений предлагает выделить одно, обладающее определенными свойствами, и затем доказывает, что именно к этому решению сходятся решения той же задачи для уравнения

$$u_t + \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, t, u) = \varepsilon u_{xx}, \quad u|_{t=0} = u_0(x) \quad (130)$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$. Результат Хопфа был обобщен О. А. Олейник на случай уравнения (129) и несколько более общего уравнения

$$u_t + \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, t, u) = \psi(x, t, u) \quad (131)$$

при условии, что $\varphi_{uu} > 0$, и при некоторых предположениях о регулярности расположения характеристик, соответствующих уравнению (129) или (131). Метод исследования и окончательные результаты аналогичны результатам Хопфа. Далее такие же результаты были получены А. С. Калашниковым для случая, когда φ_{uu} меняет знак, но начальное значение $u_0(x)$ есть кусочно-гладкая функция.

О. А. Ладыженская дала другое, более простое обоснование принципа введения исчезающей вязкости для случая $\varphi_{uu} > 0$ без каких-либо предположений о расположении характеристик уравнения (129). Оно основано на данных ею априорных оценках, позволяющих доказать, что вся совокупность $u^\varepsilon(x, t)$ решений задачи (130) имеет при $\varepsilon \rightarrow +0$ один предел $u(x, t)$. Этот предел и является единственным обобщенным решением задачи (129), которое понимается как ограниченная измеримая функция $u(x, t)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_{t>0} \int (u\Phi_t + \varphi(x, t, u)\Phi_x) dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\Phi(x, 0) dx = 0, \quad (132)$$

где $\Phi(x, t)$ — любая гладкая финитная функция на плоскости (x, t) . Кроме того, функция $u(x, t)$ должна для почти всех значений x' и x''

удовлетворять неравенству

$$\frac{u(x', t) - u(x'', t)}{x' - x''} \leq k(x', x'', t),$$

с какой-нибудь непрерывной при $t > 0$ функцией $k(x', x'', t)$. Последнее неравенство есть выражение известного в гидродинамике принципа возрастания энтропии. Теорема единственности для таких решений была сформулирована О. А. Олейник и доказана независимо ею и О. А. Ладыженской.

Впоследствии О. А. Олейник доказала теорему единственности для случая, когда φ_{uu} меняет знак, в предположении, что рассматриваемые решения суть кусочно-гладкие функции с разрывами на конечном числе гладких линий. Этим теоремам единственности предшествовали теоремы единственности, доказанные С. К. Годуновым для кусочно-гладких решений системы уравнений газовой динамики. Вопрос о существовании таких решений для систем газовой динамики остается открытым.

Н. Д. Введенская исследовала для задачи (130) сходимость конечно-разностной схемы, предложенной П. Лаксом. В зависимости от соотношения шагов по x и t решения разностных уравнений могут сходиться к решению либо задачи (129), либо задачи (130). Введенская исследовала и другие разностные схемы для решения задач (130) и (131).

А. И. Вольперт исследовал однозначную разрешимость в целом одного квазилинейного уравнения первого порядка с одной неизвестной функцией при двух и более пространственных переменных x . Он сформулировал условие, аналогичное последнему неравенству для $u(x, t)$, которое надо добавить к интегральному тождеству, соответствующему уравнению, чтобы выделить одно решение из совокупности всех возможных обобщенных решений.

Исследованиям задачи Коши и смешанной задачи для уравнения (131) и квазилинейных систем посвящены работы А. Н. Тихонова и А. А. Самарского, И. М. Гельфанда, С. К. Годунова, Б. Л. Рождественского, Н. Н. Кузнецова и др. Различные принципы выделения разрывных решений для квазилинейных систем рассмотрены в статьях И. М. Гельфанда «Некоторые задачи квазилинейных уравнений» (1959 г.) и Б. Л. Рождественского «Разрывные решения квазилинейных уравнений гиперболического типа» (1960 г.). Работа Гельфанда содержит большой материал чисто физического характера, но, как пишет он сам, доказательства проводятся на «физическом» уровне строгости и содержание работы является по существу развернутой постановкой некоторых задач теории квазилинейных уравнений.



С. К. Годунов.

В работе Б. Л. Рождественского устанавливается классификация систем уравнений первого порядка при двух независимых переменных (t, x) , изучаются свойства решений таких систем и обсуждаются вопросы единственности и существования обобщенного решения задачи Коши. В вопросе существования обобщенных решений задачи Коши им дан ряд новых методов построения разрывных решений: метод «потенциального сглаживания», усовершенствованный метод характеристик, метод последовательных приближений. Им рассмотрены также некоторые типы систем при многих независимых переменных.

К рассматриваемому кругу вопросов относятся также работы С. К. Годунова, в которых была предложена разностная схема для построения обобщенных решений квазилинейных уравнений и систем.

3

Смешанная задача для гиперболических уравнений и некоторые другие задачи

Смешанной задаче для гиперболических уравнений посвящены многочисленные работы В. А. Стеклова. Большинство из них относится к концу XIX в. — началу XX в. Итог этих исследований был им изложен в первой части монографии «Основные задачи математической физики» (1922 г.). Работы Стеклова связаны с обоснованием метода Фурье для уравнения

$$u_{tt} + \mathcal{L}u = u_{tt} - (p(x)u_x)_x + q(x)u = 0 \quad (133)$$

при обычных начальных условиях и краевых условиях на концах $x = 0$ и $x = l$ того отрезка, на котором рассматривается задача. При краевых условиях вида $u = 0$ при $x = 0$ и $x = l$ имеем задачу колебаний неоднородной струны, закрепленной на концах. В. А. Стеклов рассмотрел различные линейные однородные краевые условия, при которых возможно обычное применение метода Фурье (самосопряженные задачи). Как известно, при этом решение задачи представляется в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \lambda_k t + b_k \sin \lambda_k t) \varphi_k(x), \quad (134)$$

где λ_k^2 и $\varphi_k(x)$ — суть собственные значения и собственные функции оператора $\mathcal{L}u$ при соответствующем краевом условии, а коэффициенты a_k и b_k определяются функциями, стоящими в начальных условиях. Стеклов при весьма общих предположениях оправдал метод Фурье, строго доказав сходимость ряда (134) при $0 \leq x \leq l$, $-\infty < t < \infty$ и возможность его почленного двукратного дифференцирования по x и t . При этом он пользовался двумя методами: изучением асимптотик собственных функций $\varphi_k(x)$ при больших k или, чаще, непосредственным изучением разложений по ортонормированным системам $\varphi_k(x)$ без использования асимптотики, поскольку последняя требовала добавочных предположений

о коэффициентах уравнения (133). Он ввел понятие замкнутости ортонормированных систем функций и исследовал свойства замкнутых систем. Все эти результаты были получены Стекловым оригинальными методами еще до создания теории интегральных уравнений.

В магистерской диссертации (1917 г.) Я. Д. Тамаркина, ученика В. А. Стеклова, для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, была рассмотрена аналогичная краевая задача для несамосопряженного оператора, уже не приводящая к ортонормированным системам. В 50-х годах это направление исследований получило развитие после опубликования работы М. В. Келдыша по абстрактным несамосопряженным операторам, о чем мы говорили во втором разделе.

В 1948 г. появилась в печати посмертная работа Н. М. Гюнтера, где задача о малых колебаниях неоднородной струны решается с тех точек зрения на постановку задач математической физики, которые развивались тогда Гюнтером и о которых мы говорили в первом разделе. Решение $u(x, t)$ предполагается непрерывной функцией, скорость центра тяжести всякого отрезка (ω) струны — функцией от t с суммируемым квадратом и начальное условие для этой скорости задается как функция от (ω) .

Вернемся к классическому методу Фурье. Его обоснование в многомерном случае приводит по сравнению с одномерным случаем к новым принципиальным трудностям. Пусть имеем уравнение

$$u_{tt} - \mathcal{L}_1 u \equiv u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) u_{x_j}) + a(x) u = 0 \quad (135)$$

и граничные условия одного из трех основных типов. Решение имеет вид (134), где λ_k^2 и $\varphi_k(x)$ — собственные значения и собственные функции эллиптического оператора $\mathcal{L}_1 u$ при соответствующих краевых условиях. В случае, когда $n = 3$, $-\mathcal{L}_1 u$ — оператор Лапласа, а краевое условие записывается в виде $u|_S = 0$, Н. М. Гюнтер доказал, что если ряд (134) сходится абсолютно и равномерно и сумма его $u(x, t)$ такова, что $u_{tt}(x, t)$ существует и удовлетворяет условию Гельдера по x , то $u(x, t)$ имеет внутри области производные второго порядка по x и удовлетворяет уравнению.

Для общего уравнения (135) легко указать те условия, при которых ряд (134) и ряды, полученные из него однократным почленным дифференцированием по x и t , сходятся в среднем. Отсюда, как показал С. Л. Соболев, следуют условия, при которых сумма ряда (134) дает «обобщенное» в известном смысле решение смешанной задачи. Выяснение условий возможности дальнейшего почленного дифференцирования ряда (134) и сходимости полученных рядов в различных нормах было проведено О. А. Ладыженской, о чем будем говорить позже.

На любой паре дважды непрерывно дифференцируемых решений уравнения (135), равных нулю на границе S области $\mathfrak{D}$, интеграл

$$I_1(u, v) = \int_{\mathfrak{D}} (a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + u v_t + a u v) dx \quad (136)$$

сохраняет постоянное по t значение (билинейный интеграл энергии). С. Л. Соболевым построен другой «положительный интеграл энергии второго порядка» (1945 г.), и с использованием абстрактной теории почти периодических функций С. Бохнера была доказана почти периодичность решения первой (и второй) смешанных задач для уравнения (135). Этим без применения ряда Фурье выяснены некоторые общие свойства решений смешанных задач для уравнения (135).

В работах Д. М. Волкова построен (1947 г.) интеграл третьего порядка для волнового уравнения и получены еще некоторые результаты в этом направлении. Х. Л. Смолицкий подробно исследовал смешанные задачи для многомерного волнового уравнения при неоднородности уравнения и начального условия (1950 г.). Для однородного волнового уравнения им построены «положительные интегралы энергий» всех порядков и с их помощью доказана разрешимость в различных пространствах $W_2^l(\mathfrak{D})$ первой смешанной задачи для волнового уравнения. При этом была установлена возможность некоторых суммирований рядов Фурье. Отметим, что в работах Смолицкого рассматривались как обобщенные решения смешанной задачи, так и решения в функционалах (обобщенных функциях).

Переходим к работам (1949—1951 гг.) О. А. Ладыженской. В них исследуются разрешимость смешанных задач и возможности различных приближенных методов определения решений как для линейных гиперболических уравнений вида (135), так и более общих

$$u_{tt} + a_{ij}u_{x_i x_j} + b_i u_{x_i} + au + f = 0, \quad (137)$$

где a_{ij} , b_i , a и f могут зависеть от всех x_k и t , $k = 1, \dots, n$. Рассматривая смешанную задачу для уравнения (135) при первых трех граничных условиях, О. А. Ладыженская устанавливает те условия на данные задачи, при которых ряд (134) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по x и t до k раз включительно, сходятся в среднем в $\mathfrak{D}$ равномерно по t . При этом сумма ряда принадлежит $W_2^k(\mathfrak{D})$ и является обобщенным решением смешанной задачи в смысле интегрального тождества (при $k \geq 1$), решением почти везде (при $k \geq 2$) или классическим решением (при $k \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 3$). Эти исследования ряда Фурье (134)

позволили ей доказать существование для решений смешанных задач положительных интегралов всех порядков и установить, что все они могут быть преобразованы к виду $I_1 \left(\frac{\partial^l u}{\partial t^l}, \frac{\partial^l u}{\partial t^l} \right)$ ($l = 1, 2, \dots, k - 1$), где $I_1(u, u)$ определяется формулой (136) для краевых условий первого типа ($u = 0$ на S). Доказана единственность обобщенного решения и непрерывная зависимость в соответствующих нормах от данных задачи. Не приводя условий, при которых получаются указанные выше результаты, отметим лишь, что условия, налагаемые на функции, входящие в начальные условия являются не только достаточными, но в известном смысле и необходимыми для сходимости (134) в $W_2^k(\mathfrak{D})$. В. А. Ильин исследовал впоследствии сходимость рядов Фурье методом, отлич-

ным от метода Ладыженской, и установил равномерную сходимость этих рядов в замкнутой области и продифференцированных рядов внутри области при более широких предположениях о гладкости границы.

Для уравнения (137) О. А. Ладыженская исследует смешанную задачу сначала методом конечных разностей в цилиндре $Q_T = \mathfrak{D} \times (0 \leq t \leq T)$ при любом T . При сравнительно малых предположениях доказывается, что указанный метод приводит к обобщенному решению задачи. При этом на границу S никаких ограничений не накладывается. Доказывается, что такое решение единственно, и исследуются его дифференциальные свойства в зависимости от гладкости данных задачи, порядка их согласования и гладкости границы S . Устанавливаются условия принадлежности решения к $W_2^k(Q_T)$. Если $k \geq \left[\frac{n+1}{2} + 3 \right]$, то это решение будет классическим. При применении метода конечных разностей указываются два различных способа замены дифференциального уравнения разностным. Кроме уравнения (137) при этом рассмотрены и более общие уравнения, содержащие смешанные производные по x и t . Далее для уравнения (137) в том случае, когда a_{ij} , b_i и a не зависят от x_0 ($x_0 = t$), исследуется решение смешанной задачи с помощью преобразования Лапласа по t . К эллиптическому уравнению, получаемому в результате преобразования Лапласа, применяется метод конечных разностей, приводящий к обобщенному решению задачи Дирихле. Исследуются его дифференциальные свойства. Устанавливаются условия, при которых существует дважды непрерывно дифференцируемое в $\mathfrak{D}$ при $t \geq 0$ решение смешанной задачи.

Приведенные выше результаты О. А. Ладыженской относятся к 1949—1951 гг. В 1954 г. она дала новый метод доказательства разрешимости смешанных задач для уравнений параболического и гиперболического типов, сильно параболических и гиперболических систем (в частности, для уравнений теории упругости), линеаризованных уравнений Навье — Стокса и ряда других линейных задач математической физики. Этот метод основан на доказательстве теорем единственности обобщенных решений в $L_2(Q_T)$ (см. раздел I). Они гарантируют плотность в $L_2(Q_T)$ множества значений операторов, соответствующих задачам и определенных сначала на гладких функциях. Замыкание приводит к однозначной разрешимости смешанных задач. Теоремы единственности в L_2 используют лишь общие свойства эллиптических частей операторов, входящих в уравнения или системы. Это позволило перейти от смешанных задач для дифференциальных уравнений к абстрактной задаче Коши для дифференциальных уравнений по t с неограниченными линейными операторами (действующими в гильбертовом пространстве) в качестве коэффициентов и доказать для последних однозначную разрешимость (см. об этом в § 3 раздела I).

В работе (1941 г.) С. Г. Михлина смешанная задача решается для волнового уравнения в случае двух пространственных переменных $u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = 0$. Граница области считается аналитической кривой без особых точек и с кривизной, отличной от нуля. На ней задается функ-



М. Л. Расулов.

ция или ее нормальная производная. Вводятся интегральные представления решения задачи, аналогичные потенциалам, и задача приводится к интегро-дифференциальному уравнению для плотности упомянутых интегральных представлений. М. Л. Расулов применил контурные интегралы и теорию вычетов к решению смешанных задач для гиперболических систем определенного типа. Функциональные методы исследования смешанных задач для некоторого класса гиперболических систем были даны А. А. Дезиным. Смешанные задачи для гиперболических и более общих систем с одной пространственной переменной исследовались также в ряде работ А. Д. Мышкиса.

В связи со сказанным выше упомянем о работах С. Л. Соболева об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра, имеющем

приложения в теории уравнений гиперболического типа. Интегрирование в нем проводится по конусу $0 \leq t \leq t^{(0)} - r$, где $r = \sqrt{(x_1 - x_1^{(0)})^2 + \dots + (x_n - x_n^{(0)})^2}$. Если порядок производных от искомой функции $u(x, t)$, входящих под знак интеграла, не превышает $\frac{n+1}{2}$ и выполнены некоторые предположения об ядрах и свободном члене, то доказывается, что путем нескольких итераций исследуемое уравнение приводится к уравнению типа Вольтерра, разрешимому методом последовательных приближений. Условия на ядро касаются их поведения вблизи поверхности и вершины конуса и свойств нескольких производных от ядер. Примеры показывают, что для рассматриваемого типа уравнений упомянутые условия разрешимости не улучшаемы.

Укажем еще две задачи, поставленные и решенные С. Л. Соболевым. В первой из них рассматривается линейное неоднородное уравнение гиперболического типа с коэффициентами, не зависящими от t в цилиндре, образующие которого параллельны оси t , причем на боковой его поверхности задается искомая функция $u(x, t)$ или ее нормальная производная. Доказывается, что при определенных условиях, налагаемых на поведение $u(x, t)$ при больших по абсолютной величине отрицательных t и не слишком большом росте свободного члена при $t \rightarrow +\infty$, задача имеет решение, зависящее от конечного числа произвольных постоянных (решение может быть не единственным). Вторая, аналогичная задача для волнового уравнения относится к времяобразно ориентированному конусу, на поверхности которого задается искомая функция. Существенным является поведение предельного условия в окрестности

вершины конуса. Задача сводится к предыдущей с помощью специального преобразования координат и замены искомой функции.

Как и для задачи Коши, для смешанной задачи попутно с доказательством существования и единственности решения и исследованием его дифференциальных свойств устанавливалась непрерывная зависимость решения от начальных данных и свободного члена уравнения, причем решение рассматривалось в любом, но конечном промежутке $0 \leq t \leq T$ (корректность смешанной задачи).

Будем говорить, что решение устойчиво, если эта зависимость равномерна по t и в промежутке $0 \leq t < \infty$. Одна из первых работ по устойчивости решения принадлежит (1941 г.) С. Л. Соболеву, который рассмотрел смешанную задачу для неоднородного уравнения (135), при однородных краевых условиях одного из трех основных типов. Им указаны достаточные условия устойчивости такой смешанной задачи при изменении начальных условий и свободного члена уравнения. Исследованию устойчивости решений смешанных задач (в том числе и при изменении функции, входящей в граничное условие) и задачи Коши для более общих гиперболических уравнений и систем посвящены работы А. Х. Гелига (1958—1960 гг.).

Для произвольных плоских выпуклых областей Р. А. Александрян исследовал следующую задачу о собственных значениях и функциях:

$$u_{xx} - u_{yy} = \lambda(u_{xx} + u_{yy}), \quad u|_{\Gamma} = 0.$$

Он получил условия существования нетривиальных решений, указал методику построения таких решений и исследовал особенности спектра. Оказалось, например, что в случае круга спектр чисто точечный, а для некоторых сколь угодно близких к кругу областей содержит участки непрерывного спектра.

Для общих дифференциальных операторов Ю. М. Березанский предложил методику для описания корректных граничных задач. Это, по существу, некоторый способ получения оценок решений в W_2^1 . В частности, в случае задачи Дирихле для уравнения струны из результатов Березанского следует, что существуют области, в которых справедливо энергетическое неравенство

$$\|u_{xx} - u_{yy}\|_{L_2(\mathfrak{D})} \geq C \|u\|_{W_2^1(\mathfrak{D})}$$

для функций, равных нулю на границе $\mathfrak{D}$. Для таких областей задача разрешима в слабом смысле, и эта разрешимость устойчива в классе малых в классе C^1 вариаций границы.

4

Вырождающиеся гиперболические уравнения

Для вырождающихся гиперболических уравнений были рассмотрены как задачи Коши, так и смешанная задача. Начнем с задачи Коши для уравнений с двумя независимыми переменными при $y > 0$ и с вырождением на линии $y = 0$, несущей данные Коши:

$$\mathcal{L}u \equiv y^\alpha k(x, y) u_{xx} - u_{yy} + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = f(x, y), \quad (138)$$

$$\mathcal{L}_1 u \equiv y^m u_{yy} - u_{xx} + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = f(x, y), \quad (139)$$

$$u|_{y=0} = \tau(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \gamma(x). \quad (140)$$

Для задачи (138), (140) случай $\alpha = 1$, $k(x, y) \equiv 1$ был рассмотрен Ф. И. Франклем и К. И. Бабенко. В общем случае $k(x, y) > 0$ и $\alpha > 0$ задачу (138), (140) исследовал И. С. Березин. Он доказал корректность постановки задачи Коши при $\alpha < 2$ и построил пример некорректной задачи при $\alpha > 2$. В. Ф. Волкодавцов рассмотрел при $\alpha = 1$ и $k(x, y) \equiv 1$ задачу Коши — Гурса для уравнения (138). Он получил в явном виде решение этой задачи через построенную им функцию Римана — Адамара. С. П. Хайруллина исследовала задачу Коши для уравнения $\mathcal{L}(\mathcal{L}u) = f(x, y)$ для случая $k(x, y) \equiv 1$ с данными на линии вырождения.

Задачи Коши (139), (140) поставлены корректно, если $0 < m < 1$. В случае $1 \leq m < 2$ естественно исследовать эту задачу с видоизмененными начальными данными (А. В. Бицадзе)

$$\lim_{y \rightarrow 0} \varphi(x, y) u = \tau(x), \quad \lim_{y \rightarrow 0} \psi(x, y) u_y = \gamma(x),$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ стремятся к нулю при $y \rightarrow 0$. Изучению этой задачи посвящены работы С. А. Терсенова, М. М. Смирнова, В. Н. Николенко и И. Х. Хайруллина. С. А. Терсенов рассмотрел системы вида (138) и (139) (u, f — векторы, a, b, c — матрицы, $k(x, y) \equiv 1$) и установил при гладкости данных и некоторых других условиях существование и единственность решения задачи Коши с начальными данными на линии вырождения.

Перейдем к случаю задач Коши для уравнений, где число независимых переменных больше двух. Для уравнения

$$\varphi(t) u_{tt} - a_{ik} u_{x_i x_k} + b_i u_{x_i} + b_0 u_t + cu = f \quad (141)$$

в случае $\varphi(t) \equiv 1$ К. И. Карапетян рассмотрел задачу Коши с начальными данными на плоскости $t = 0$, на которой обращается в нуль наименьшее собственное значение $\rho(x, t)$ матрицы $\|a_{ik}\|$, положительное при $t > 0$. При условии $\rho(x, t) > ct^\alpha$ ($\alpha > 0$) и при некоторых предположениях о гладкости коэффициентов и их поведении при $t = 0$ доказана корректность постановки задачи Коши при $\alpha < 2$. При $\alpha = 2$ задача Коши корректна при дополнительных условиях на коэффициенты a_i . Существование и единственность решения задачи Коши доказывается с помощью энергетических неравенств. Для невырождающейся матрицы $\|a_{ik}\|$

Ф. Т. Барановский тем же методом решал задачу Коши для уравнения (141) в случае, когда функция $\varphi(t)$, положительная при $t > 0$, обращается в нуль при $t = 0$ и $b_0 \equiv 0$.

Смешанную задачу при краевом условии первого рода для уравнения

$$\varphi(t) u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} u_{x_j}) + b_i u_{x_i} + b_0 u_t + cu = f, \quad (142)$$

вырождающегося при $t = 0$, рассмотрели М. Л. Краснов и Ф. Т. Барановский. В предположении, что $\varphi(t) \equiv 1$, а $\rho(x, t) > ct^\alpha$, М. Л. Краснов дал достаточные условия существования и единственности решения смешанной задачи при $0 < \alpha < 2$; если же $\alpha > 2$, то для разрешимости должны при $t = 0$ обращаться в нуль соответствующего порядка коэффициенты b_i ($i = 0, 1, \dots, n$). При доказательстве существования решения Краснов применил аналог метода Галеркина, причем сначала получил существование и единственность обобщенного решения смешанной задачи, а затем исследовал его дифференциальные свойства. Он рассмотрел также случай вырождения уравнения (142) на части боковой поверхности цилиндра, несущего краевые условия. Ф. Т. Барановским доказано существование и единственность обобщенного решения смешанной задачи для уравнения (142) при невырождающейся матрице $\|a_{ik}\|$, $b_0 \equiv 0$ и при уже упоминавшемся условии вырождения коэффициента $\varphi(t)$. Р. Г. Баранцев исследовал методом Фурье смешанную задачу на промежутке $0 \leq x \leq 1$:

$$u_{xx} - k(x) u_{tt} = 0, \quad u|_{t=l(x)} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=l(x)} = \psi(x).$$

Условие для u_t задается лишь при $|l'(x)| < \sqrt{k(x)}$. Если $|l'(x)| \equiv k(x)$, то u_t не задается. Предельные условия при $x = 0$ и $x = 1$ имеют вид $Au + Bu_x = 0$, а функция $k(x) = x^\alpha (1-x)^\beta k_0(x)$, где $k_0(x) > 0$ — гладкая функция. Если $B \neq 0$, то допустимые значения α и β больше -1 , а если $B = 0$, то α и β больше -2 .

Различным случаям вырождения посвящены также работы М. М. Олевского и М. Б. Капилевича.

Уравнения первого порядка, общая теория уравнений и уравнения смешанного типа

1

Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка и смежные вопросы

В XIX в. наибольший вклад в развитие теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка внесли отечественные ученые С. В. Ковалевская, А. Н. Коркин и В. Г. Имшенецкий. С начала XX в. по этой теме большое число работ



Группа киевских математиков и Т. Леви-Чивита (Италия). 1-й ряд (слева направо): М. А. Бык, Д. А. Граве, Т. Леви-Чивита, Г. В. Пфейффер, М. Ф. Кравчук, М. Х. Орлов; 2-й ряд: Ю. Д. Соколов, В. Е. Дьяченко, К. А. Бреус, В. И. Можар, А. С. Смогоржевский, Е. Я. Ремез, А. Л. Наумов, И. Б. Погребынский. 1935 г.

опубликовали Г. В. Пфейффер и его ученики. Рассмотрим основные направления исследований в указанной области.

Как хорошо известно, С. Ли назвал интегралом уравнения

$$F(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) = 0 \quad \left(p_k = \frac{\partial z}{\partial x_k}\right) \quad (143)$$

n -мерное многообразие, определяемое равенствами

$$x_k = f_k(u_1, \dots, u_n), \quad z = f(u_1, \dots, p_k), \quad p_k = \varphi_k(u_1, \dots, u_n), \quad (144)$$

причем должно быть выполнено уравнение (143) и соотношение

$$dz = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n.$$

Если исключение величины p_k приводит к зависимости

$$z = \psi(x_{q+1}, \dots, x_n), \quad x_i = \psi_i(x_{q+1}, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, q),$$

то число q называется классом интеграла Ли. Отметим, что интеграл Ли записывался в различной форме. Г. В. Пфейффер придал понятию интеграла Ли ту общность определения, которая позволила перенести это понятие на случай уравнений со многими неизвестными функциями, а именно он определил его соотношениями

$$\Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_{q+1}) = 0, \quad \varphi_i \equiv \varphi_i(z, x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_h), \\ h < n - 1,$$

где Φ — произвольная функция, и установил условия общности интеграла в такой форме.

Г. В. Пфейффер рассмотрел вопрос о возможности построения по интегралу Ли данного класса всех интегралов низших классов вплоть до нулевого (интеграла Лагранжа) и построения интегралов высших классов. Последняя задача не всегда имеет положительное решение. Пфейфферу принадлежит также новый метод интегрирования одного уравнения и систем уравнений первого порядка с одной неизвестной функцией, являющейся глубоким развитием метода отделения переменных В. Г. Имшенецкого. Попутно Пфейффер уточнил и развил утверждение С. Ли (долгое время остававшееся непонятным) об эквивалентности интегрирования нелинейных уравнений с частными производными интегрированию системы линейных уравнений. Ц. К. Руссьяну и А. Н. Макарову принадлежат исследования о полных интегралах Лагранжа высших рангов одного уравнения и систем уравнений в инволюции.

Ряд работ Г. В. Пфейффера (к ним примыкают и некоторые работы Г. И. Дринфельда) связан с задачей Ли — Бюля, которая в первоначальной постановке сводится к нахождению инфинитезимального оператора

$$Y(f) = \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (145)$$

удовлетворяющего условию

$$(X, Y)f = \lambda X(f), \quad (146)$$

где $X(f)$ — данный инфинитезимальный оператор и λ — произвольная функция. Эту задачу можно трактовать как задачу нахождения инфинитезимального оператора одночленной группы преобразований, отображающих совокупность всех решений уравнения $X(f) = 0$ (или абсолютных инвариантов группы с оператором $X(f)$) в себя. При $\lambda = 0$ (задача Бюля) можно также говорить о розыскании одночленной группы, взаимной с данной.

Как указал Ли, в общем случае задача нахождения оператора (145) эквивалентна задаче нахождения всех решений уравнения $X(f) = 0$. Поэтому основным является вопрос о числе линейно несвязных операторов (145), удовлетворяющих уравнению (146), и о структуре наиболее общего из таких операторов. Полное решение этой задачи было найдено Г. В. Пфейффером. Он решил аналогичную задачу для случая задания полной системы линейных уравнений. Полученные результаты позволили ему обобщить второй способ Якоби интегрирования полных систем линейных однородных уравнений с частными производными первого порядка. Пфейффер доказал, что достаточно заменить полную систему линейных уравнений системой уравнений $X_i(f) = 0$ ($i = 1, \dots, m$), обладающей тем свойством, что полной является каждая из систем $X_i(f) = 0$, $i = 1, 2, \dots, q$; $q = 2, \dots, m$. Соответствующие обобщения он получил для систем нелинейных уравнений. Обобщением задачи Ли — Бюля в указанной выше трактовке является вопрос об инфинитезимальном операторе (145) одночленной группы преобразований, отображающем в себя

совокупность интегральных инвариантов всех порядков группы G_r с инфинитезимальными операторами

$$X_j(f) = \sum_{i=1}^n \xi_{ji} \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad j = 1, \dots, r. \quad (147)$$

Г. И. Дринфельд показал, что такой оператор (145) вместе с операторами (147) определяет группу G_{r+1} , имеющую группу G_r своим нормальным делителем.

Коэффициенты оператора (145), удовлетворяющие условию (146) при $\lambda = 0$, являются решениями системы уравнений

$$X(\eta_i) - Y(\xi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (148)$$

Совокупность функций $\eta_{\alpha_1 \dots \alpha_p}, \alpha_1, \dots, \alpha_p = 1, \dots, n$, удовлетворяющих условиям кососимметричности относительно индексов и условиям

$$X(\eta_{\alpha_1 \dots \alpha_p}) - \sum_{j=1}^n \left\{ \eta_{j\alpha_2 \dots \alpha_p} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_{\alpha_1}} + \dots + \eta_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_{\alpha_p}} \right\} = 0, \quad (149)$$

де Дондер назвал контравариантными функциями первого порядка уравнения $X(f) = 0$. Он многократно обращался к этим функциям. Таким образом, коэффициенты оператора (145) — это контравариантные функции первого порядка. Г. И. Дринфельд показал, что наиболее общей совокупностью контравариантных функций p -го порядка является совокупность

$$\eta_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \sum_{\beta_1, \dots, \beta_p} \pi_{\beta_1 \dots \beta_p} \xi_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_p},$$

где π — произвольные функции интегралов уравнения $X(f) = 0$, ξ — миноры p -го порядка определителя, составленного из коэффициентов n линейно несвязанных операторов, удовлетворяющих условию Бюля. Упомянутый результат был получен Дринфельдом с помощью им же доказанной теоремы о построении всех интегральных инвариантов p -го порядка системы уравнений

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \dots = \frac{dx_n}{\xi_n} = dt$$

(интегральных инвариантов группы с инфинитезимальным оператором $X(f)$). Исходя из идеи Н. Г. Чеботарева рассматривать объем группы Ли как интегральный инвариант, Г. И. Дринфельд применил результаты Н. Г. Чеботарева и свои в интегральной геометрии, рассматривая меры тех или иных множеств геометрических элементов как интегральные инварианты соответствующей группы преобразований. Эти исследования продолжили С. А. Демидова, А. В. Луценко, Е. Г. Ушакова.

Ц. К. Руссьян обобщил метод Коши нахождения интеграла уравнения первого порядка с начальным условием на случай системы в инволюции и нашел прием получения интеграла Коши по полному интегралу с помощью вариации произвольных постоянных. Развивая идею

метода Лагранжа — Шарпи о сведении интегрирования уравнения $f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$ к интегрированию системы уравнений в полных дифференциалах, Руссьян свел задачу определения полного интеграла уравнения n -го порядка

$$p_{n0} = \Theta(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \dots, p_{0n}), \quad p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}$$

к задаче нахождения $n - 1$ функций $u_i(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \dots, p_{0n})$, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка или (этот случай и рассмотрен подробно) системе дифференциальных уравнений первого порядка, линейных относительно производной каждой функции в отдельности, и интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Ряд работ, дополняющих и развивающих методы Лагранжа — Шарпи, Якоби и Коши, опубликовал И. С. Аржанных. Его работы содержат и приложения полученных им результатов.

Г. В. Пфейффер посвятил ряд работ линейному в якобианах уравнению, удовлетворяющему условиям Гамбургера и несколько более общим условиям. Им была исследована связь таких уравнений с якобиевыми и обобщенно якобиевыми, в смысле Н. Н. Салтыкова, системами линейных уравнений с частными производными первого порядка многих функций, а также связь с теорией внешних форм.

Ц. К. Руссьян до 1917 г. и после революции неоднократно изучал системы пфаффовых дифференциальных уравнений. Отметим здесь его посмертную статью (1938 г.), в которой изучена связь задачи интегрирования системы уравнений

$$\omega_i = \sum_{k=1}^n X_{ik} dx_k, \quad i = 1, \dots, m,$$

с задачей приведения формы

$$\Omega = \sum_{i=1}^m \lambda_i \omega_i,$$

где λ_i, x_i — независимые переменные, к каноническому виду

$$\Omega = \sum_{s=1}^{m+1} v_s du_s.$$

Ученик Г. В. Пфейффера М. К. Куренский посвятил большое число работ, в частности докторскую диссертацию, уравнениям с частными



Г. И. Дринфельд.

производными многих функций. К сожалению, краткое изложение результатов Куренского невозможно. Отметим, что он применил полученные им результаты в задаче Бэклунда о соответствии двух многообразий касательных элементов, в задаче Вейнгартена о представлении элемента $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ в виде $ds^2 = d\alpha^2 + 2d\omega d\beta$, в задаче об ортогональных траекториях и других.

Заканчивая наш краткий обзор, мы должны отметить, что работы по темам настоящего параграфа не ограничивались в СССР упомянутыми исследованиями. Мы не остановились, к сожалению, на работах, выполненных Н. М. Гюнтером, Н. Т. Михальским, В. И. Романовским и другими, хотя результаты работ этих ученых представляют несомненный интерес.

2

Общая теория линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Обобщенные функции

1. *Общие вопросы теории обобщенных функций.* В первой главе мы ввели понятие обобщенной функции и упоминали о применении этого понятия в работе (1936 г.) С. Л. Соболева, посвященной решению задачи Коши для линейного гиперболического уравнения. В 1950 г. была опубликована книга Л. Шварца «Теория распределений», содержащая систематическое изложение теории обобщенных функций (распределений) и ее приложений — в частности к теории уравнений с частными производными. С этого времени появляется в нашей и зарубежной литературе обширное число работ, связанных с самой теорией обобщенных функций и ее приложениями к основным проблемам анализа и теории уравнений с частными производными. Первые работы в этой области, выполненные в нашей стране в пятидесятых годах, принадлежали И. М. Гельфанду и Г. Е. Шилову, а также их многочисленным ученикам. Начиная с 1958 г. выходит серия монографий по обобщенным функциям. Первые три из них были написаны И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым. Третья монография называется «Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений». К настоящему времени вышло шесть выпусков указанной серии монографий.

В первом разделе мы рассматривали основное пространство K бесконечно дифференцируемых финитных функций в n -мерном пространстве. Сопряженное пространство K' — пространство линейных функционалов в K — и было пространством обобщенных функций. Важную роль в теории сыграло введение других классов основных пространств и сопряженных к ним пространств обобщенных функций. Некоторые из таких пространств были введены и использованы в монографии Л. Шварца. Далее И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилев построили семейство S_α^β основных пространств, которые характеризуются специальными оценками скорости убывания функций $u \in S_\alpha^\beta$ и их производных всех порядков на

бесконечности. Другие классы пространств были введены Б. Л. Гуревичем (так называемые пространства типа W) и В. П. Паламоновым (пространства E_α^B).

В приложениях к теории дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами важнейшая задача, решаемая с помощью обобщенных функций, заключается в построении законченной теории преобразования Фурье в «неклассическом» случае (например, для функций, растущих на бесконечности). Приведем соответствующее определение. Условимся через $\tilde{u}$ обозначать преобразование Фурье функции u . Для «хороших» функций известно равенство Парсевала

$$(\tilde{u}, \tilde{\varphi}) = (u, \varphi),$$

где

$$(u, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \overline{\varphi(x)} dx.$$

Именно расширенное толкование этого равенства и приводит к нужному определению. Пусть Φ — некоторое основное пространство. Тогда пространство $\tilde{\Phi}$, образованное преобразованиями Фурье всевозможных функций из Φ , также всякий раз оказывается основным пространством (так, например, $\tilde{S}_\alpha^B = S_\beta^\alpha$). Допустим, что f — обобщенная функция класса Φ' (т. е. функционал над основным пространством Φ). Тогда под $\tilde{f}$ понимается обобщенная функция класса $\tilde{\Phi}'$, определяемая соотношением

$$(\tilde{f}, \tilde{\varphi}) = (f, \varphi)$$

для всякой $\varphi \in \Phi$. Тем самым в рамках теории обобщенных функций оказывается возможным определить преобразование Фурье для любой обобщенной функции.

Другая важная задача, получающая естественное решение с помощью обобщенных функций — это задача регуляризации расходящихся интегралов. Регуляризацией интеграла

$$\int f(x) \varphi(x) dx, \quad (150)$$

где функция φ принадлежит основному пространству, или, что то же самое, регуляризацией функции $f(x)$, имеющей, вообще говоря, точки локальной неинтегрируемости, называется функционал f , который для функций φ , равных нулю в окрестности особых точек (или поверхностей) функции f , выражается интегралом (150). Задачи регуляризации рассматривались в работах И. М. Гельфанда, З. Я. Шапиро, Г. Е. Шилова, В. В. Грушина и В. П. Паламонова.

В совместной работе И. М. Гельфанда и З. Я. Шапиро указан метод регуляризации интеграла вида

$$\int_{t \geq 0} f^\lambda(x) \varphi(x) dx$$

при некоторых условиях на поверхность $f = 0$. Общая задача регуляризации для случая одного переменного рассматривалась И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым. Для случая многих независимых переменных она изучалась В. В. Грушиным и В. П. Паламоновым. Последний получил существенный результат, касающийся так называемой проблемы деления, тесно связанной с проблемой регуляризации.

2. *Линейные дифференциальные уравнения.* Переходим к работам, посвященным рассмотрению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u = g, \quad (151)$$

где $P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — полином от производных $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ с любыми комплексными коэффициентами. В дальнейшем часто будем пользоваться обозначением $P(s)$ для результата замены $i \frac{\partial}{\partial x_h}$ на s_h в полиноме $P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)$, где буква s обозначает совокупность переменных $(s_1, \dots, s_n)$. Обобщенные функции играют существенную роль при определении фундаментальных решений $E(x)$, т. е. решений уравнений вида

$$P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) E(x) = \delta(x), \quad (152)$$

где $\delta(x)$ — функция Дирака.

Решения неоднородного уравнения (151) выражаются через $E(x)$ в виде свертки

$$u = E * g. \quad (153)$$

Для одного независимого переменного свертка определяется формулой $f * \varphi = (f(\xi), \varphi(x - \xi))$. Если $f * \varphi$ принадлежит основному пространству Φ при любом φ из Φ , то f называется свертывателем. В этом случае свертка двух обобщенных функций $f * f_1$ определяется формулой $(f * f_1, \varphi) = (f, f_1 * \varphi)$.

Ряд основополагающих результатов в теории фундаментальных решений был получен Мальгранжем, Хермандером, Л. Шварцем и Эренпрайсом. В частности, Шварц рассмотрел класс гипоеллиптических уравнений, для которых фундаментальное решение $E(x)$ бесконечно дифференцируемо при выделении точки $x = 0$, а Хермандер указал алгебраические критерии гипоеллиптическойности. Все решения однородного гипоеллиптического уравнения бесконечно дифференцируемы и локально принадлежат классу Жеврея, т. е. на любой конечной замкнутой области ω из R_n производные имеют оценку

$$|D^m u| \leq C m^{m\gamma},$$

где C — постоянная (зависящая от ω).

Пусть $\sigma + \tau i$ — корни многочлена $P(s)$, где $\sigma + \tau i = (\sigma_1 + \tau_1 i, \dots, \sigma_n + \tau_n i)$. Для гипоеллиптического случая удаление корней $P(s)$ от вещественной части пространства R_n характеризуется минимальным значением $\gamma > 0$, при котором выполняется неравенство

$$\sqrt{\tau_1^2 + \dots + \tau_n^2} \geq C_1 \left(\sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2} \right)^\gamma + C_2$$

$$(C_1 > 0),$$

где C_1 и C_2 — постоянные.

Исследованию различных свойств решений гипоеллиптических уравнений посвящены работы Л. Р. Волевича, Е. А. Горина, В. В. Грушина, В. П. Паламодова и других. В частности, Грушин доказал, что среди фундаментальных решений гипоеллиптического уравнения есть решения, растущие не быстрее некоторой степени при $|x| \rightarrow \infty$, и что для любого фундаментального решения справедлива оценка вида $|E(x)| \ll \ll C|x|^{-n/\gamma}$ вблизи $x = 0$. Кроме того он показал, что чем медленнее растет на бесконечности какое-либо решение гипоеллиптического уравнения в терминах показательного роста, тем лучше его локальные свойства в смысле оценок производных. Доказано, что это — характеристическое свойство гипоеллиптических уравнений, т. е. для негипоеллиптических уравнений из оценки $|u(x)| \ll A \exp(a|x|)$ никаких выводов о гладкости решения однородного уравнения сделать нельзя. В. П. Паламодовым указана формула, выражающая число γ , входящее в указанные выше оценки, через полином $P(s)$. Е. А. Гориным исследованы частично гипоеллиптические уравнения, т. е. уравнения гипоеллиптические по части переменных. Им доказана эквивалентность двух определений частичной гипоеллиптичности, из которых одно основано на расположении корней $P(s)$, а другое — на бесконечной дифференцируемости по части переменных (существует такое $q \geq 0$, что всякое q раз дифференцируемое решение бесконечно дифференцируемо по определенной части переменных).

В негипоеллиптическом случае любое фундаментальное решение имеет кроме начала координат особенность в смысле несуществования некоторых производных, и возникает задача о построении такого фундаментального решения, множество особенностей которого в известном смысле минимально. Исследованию этого вопроса посвящены работы В. А. Боровикова и В. П. Паламодова. Ряд работ посвящен исследованию условий на бесконечности, аналогичных условиям излучения Зоммерфельда для уравнения $\Delta u + k^2 u = g$. Условия на бесконечности должны обеспечивать существование и единственность решения во всем пространстве. Для полиномов от оператора Лапласа соответствующие результаты были получены И. Н. Векуа и Б. П. Панеяхом. В. П. Паламодов исследовал вопрос о классах обобщенных функций, в которых линейное уравнение с постоянными коэффициентами $P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u = f$ корректно разрешимо, и установил, что в случае, когда $P(s) \neq 0$ при вещественных s , такими классами являются введенные им классы E_α^b при

$\alpha > 1$ и $\alpha + \gamma\beta \geq 1$, где $\gamma \leq 0$ — некоторая постоянная, зависящая от $P(s)$. В работах Е. А. Горина и В. В. Грушина указаны специальные типы уравнений с постоянными коэффициентами; решения их сглаживаются при применении некоторого оператора. Этим свойством обладает, например, уравнение $\frac{\partial \Delta u}{\partial x_1} - u = 0$ по отношению к оператору $\frac{\partial}{\partial x_1}$. Од-

ним из важных вопросов теории линейных однородных и неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами является вопрос об общих формулах решений таких уравнений. Для однородных уравнений это было решено Паламодовым (и одновременно Эренпрайсом). Общее решение представляется в виде интеграла по многообразию N экспоненциальных решений уравнений по некоторой комплексной мере, определенной на множестве корней полинома $P(s)$. Для неоднородных уравнений задачу решил М. С. Агранович, рассматривавший ее в ограниченных областях. Укажем еще некоторые качественные результаты, полученные Аграновичем для неоднородного уравнения. Пусть ω' и ω — две ограниченные области, и замыкание первой лежит внутри второй. При этом если в неоднородном уравнении $P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u = f$ функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в ω , а решение $u(x)$ бесконечно дифференцируемо в граничной полоске $\omega \setminus \omega'$, то оно бесконечно дифференцируемо в ω . При этом гладкость в ω оценивается через гладкость $f(x)$ в ω и гладкость $u(x)$ в $\omega \setminus \omega'$. Доказывается также, что максимум модуля решения внутри области можно оценить через максимум модуля $f(x)$ и ее нескольких производных внутри области и максимум модуля решения и его нескольких производных в граничной полоске. Кроме того, Агранович подробно исследовал соответствие между различными пространствами функций $u(x)$ и $f(x)$ (обычных или обобщенных), которое устанавливается линейным дифференциальным полиномом с постоянными коэффициентами $P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u = f$. Эти последние результаты связаны с работами Хермандера, Эренпрайса и Мальгранжа.

До сих пор мы касались вопросов различных свойств решений линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Большое число работ относится и к системам однородных и неоднородных уравнений, где вместо полинома P берется прямоугольная матрица P , составленная из таких полиномов, и роль множества корней уравнения $P(s) = 0$ играет множество N тех значений s , при которых ранг $P(s)$ меньше числа неизвестных функций. В. П. Паламодов построил, как и для одного уравнения, общее решение в выпуклых областях для систем в виде интеграла от векторных экспоненциальных полиномов, удовлетворяющих системе, по комплексной мере, сосредоточенной на N . Это позволило получить для систем результаты, аналогичные результатам для одного уравнения.

В работах В. В. Грушина и В. П. Паламодова исследован вопрос о неустранимых особенностях решений систем. Указаны условия, при которых такие особенности отсутствуют, и получены утверждения о возможности продолжения решения, определенного у границы области,

внутри этой области. Мы не уточняем соответствующих формулировок. Отметим также работы В. П. Паламодова о совместности уравнений неоднородной системы. Условие такой совместности записывается в виде $P_1 \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) g = 0$, где g — вектор правых частей уравнений и $P_1 \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)$ — матрица той же структуры, что и $P \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)$. Для областей определенных типов условия такого вида являются не только необходимыми, но и достаточными. Аналогичные результаты содержатся в работах Эренпрайса и Мальгранжа.

3. *Задача Коши.* Начиная с пятидесятих годов появляется большое число работ по задаче Коши для уравнений и систем рассмотренного выше типа. Содержание этих работ подробно изложено в третьем выпуске цикла монографий по обобщенным функциям (1958 г.), о котором мы говорили выше.

Начнем с проблем единственности задачи Коши для систем эволюционного типа вида

$$\frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^m P_{jk} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) u_k(x, t) \quad (j = 1, \dots, m),$$

или в векторной форме

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t), \quad (154)$$

где $u(x, t)$ — неизвестная вектор-функция $u(x, t) = \{u_j(x, t)\}$, $P \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)$ — квадратная матрица порядка m , элементы которой $P_{jk} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)$ — многочлены от производных $i \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, i \frac{\partial}{\partial x_n}$ максимального порядка p по совокупности переменных; число p называется порядком системы. К системе добавляются начальные условия

$$u_j(x, 0) = u_j(x) \quad (j = 1, \dots, m). \quad (155)$$

Для указанного типа систем с постоянными (или зависящими только от t) коэффициентами теоремы единственности задачи Коши были установлены И. Г. Петровским в классе ограниченных и непрерывных при $-\infty < x < +\infty$ функций. Этот результат был обобщен на класс всех функций степенного роста В. Э. Лянце и Л. Шварцем — последним с использованием обобщенных функций. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилев получили



М. С. Агранович.

ли соответствующий результат в классе экспоненциально растущих функций. Уточним этот основной результат.

Отметим предварительно, что под функциями $u_j(x, t)$ понимаются обобщенные функции — функционалы в некотором основном пространстве Φ при любом значении параметра t из некоторого промежутка его изменения, так что (154) и (155) означают

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_j(x, t), \varphi(x)) = \sum_{k=1}^m (u_k(x, t), \bar{P}_{jk} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(x)),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (u_j(x, t), \varphi(x)) = (u_j(x), \varphi(x))$$

для любой функции $\varphi(x)$ из Φ . Образует матрицу $R \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)$, элементы которой получаются из элементов $P \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)$ по формулам $R_{ik} = -\bar{P}_{ki}$. После замены в $R_{ik} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)$ выражений $i \frac{\partial}{\partial x_k}$ на s_k получается матрица $R(s)$, где s — совокупность переменных $(s_1, \dots, s_n)$. Далее образуется матрица

$$Q(s, t_0, t) = e^{(t-t_0)R(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} R^k(s), \quad (156)$$

элементы которой — целые функции s . Доказывается существование такого наименьшего числа $p_0 \leq p$, что имеет место оценка для нормы матрицы Q

$$\|Q(s, t_0, t)\| \leq C(1 + |s|)^{(m-1)p} e^{b|t-t_0|} |s|^{p_0}, \quad (157)$$

где $|s|^2 = |s_1|^2 + \dots + |s_n|^2$ (норма матрицы есть норма соответствующего линейного оператора в конечномерном пространстве). Число p_0 называется приведенным порядком системы (154). Как показала В. М. Борок, любую систему (154) с целым приведенным порядком p_0 можно привести с помощью линейных преобразований функций и их производных к системе порядка p_0 .

Сформулируем теперь окончательный результат, полученный в работах И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова, и затем несколько улучшенный К. И. Бабенко, Б. Л. Гуревичем и С. Д. Эйдельманом. Класс функций $f(x)$, удовлетворяющих неравенству

$$|f(x)| \leq C e^{b|x|^{p_0}} \left(\frac{1}{p_0'} + \frac{1}{p_0} = 1 \right) \quad (158)$$

при любых фиксированных C и b , образует класс единственности задачи Коши для системы (154). Иначе говоря, может существовать лишь единственное решение системы (154), обращающееся при $t = 0$ в заданную вектор-функцию $u_0(x)$, все компоненты которой при $0 \leq t \leq T$ принадлежат классу (158). Если $p_0 = 1$, то p_0' — любое; если $p_0 < 1$, то единственность имеет место без ограничений роста на бесконечности. Допустимый интервал $0 \leq t \leq T$ зависит от C и b и не зависит от выбора начального вектора $u_0(x)$. Г. Н. Золотарев показал, что при замене в (158) p_0 на $p_0 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) класс (158) при любом ε уже не является

классом единственности. Полученные результаты обобщаются и на случай, когда матрица $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}, t\right)$ непрерывно зависит от t .

Отметим, что исследование задачи Коши (154), (155) проводится двумя методами: операторным и преобразованием Фурье. В последнем случае указанный выше результат не получается при $p_0 < 1$, но можно получить лучший результат для частного вида систем (так называемых гиперболических систем). Установим еще смысл матрицы $Q(s, t_0, t)$. Как доказывается, единственность решения задачи Коши (154), (155) справедлива в классе Φ' , если в основном пространстве Φ будет существовать решение «обратной сопряженной» задачи Коши

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x, t), \quad \varphi(x, t_0) = \varphi_0(x)$$

при любых $\varphi_0(x)$. Этим определяется построение пространства Φ . Применяя преобразование Фурье по x_k , получаем систему обыкновенных уравнений с параметром

$$\frac{d\psi(s, t)}{dt} = R(s) \psi(s, t), \quad \psi(s, t_0) = \psi_0(s),$$

где $\psi_0(s)$ — преобразование Фурье $\varphi_0(x)$, и формальное решение этого уравнения представляется в виде

$$\psi(s, t) = e^{(t-t_0) R(s)} \psi_0(s) = Q(s, t_0, t) \psi_0(s).$$

Г. Е. Шиловым была установлена важная связь приведенного порядка системы с корнями $\lambda_k(s)$ уравнения

$$\det \|R(s) - \lambda\| = 0, \quad (159)$$

а именно: если $\Lambda(s) = \max_k \operatorname{Re} \lambda_k(s)$, то для любой квадратной матрицы $R(s)$ порядка m , элементы которой многочлены степени не выше p , имеет место при $t \geq 0$ оценка

$$e^{t\Lambda(s)} \leq \|e^{tR(s)}\| \leq C(1 + |s|)^{(m-1)p} e^{t\Lambda(s)}.$$

Отсюда следует правило определения приведенного порядка p_0 : если разложить левую часть уравнения (159) по степеням λ и обозначить через m_j степень коэффициента при λ^{m-j} по совокупности переменных $(s_1, \dots, s_n)$, то p_0 есть наибольшее значение дроби $\frac{m_j}{j}$ при $j = 1, \dots, m$.

Выше мы указывали на основные пространства типа W , введенные Б. Л. Гуревичем. Это было сделано им в связи с рассмотрением задачи Коши для системы уравнений в свертках

$$\frac{\partial \varphi_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^m f_{jk} * \varphi_k(x, t), \quad \varphi_j(x, 0) = \varphi_j(x), \quad (160)$$

где $\varphi_j(x, t)$ при фиксированном t ($0 \leq t \leq T$) принадлежат некоторому основному пространству Φ и f_{jk} — функционалы-свертыватели (они считаются не зависящими от t). При рассмотрении системы (160) предполагается, что преобразование Фурье свертывателей f_{jk} — функционал на

пространстве типа целых аналитических функций. Частными случаями системы (160) являются: дифференциальные системы, если f_{jk} — производные δ -функций; системы интегральных уравнений с ядрами, зависящими от разности аргументов, если f_{jk} — финитные функции (регулярные функционалы); разностные системы, если f_{jk} — сдвиги δ -функций.

А. Г. Костюченко и Г. Е. Шилов рассмотрели системы вида

$$\frac{\partial \varphi_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^m a_{jk} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(x - \xi, t) d\zeta_{jk}(\xi),$$

где $\zeta_{jk}(\xi)$ — функции ограниченной вариации на $(-\infty, \infty)$, причем существует такой интервал $0 \leq \mu_1 < \mu < \mu_2$, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mu|\xi|} |d\zeta_{jk}(\xi)| = C_\mu < \infty.$$

Кроме того, Костюченко рассмотрел задачу Коши для систем с эллиптическими операторами $\mathcal{L}(\mathfrak{D}) = \sum_{|q| < p} a_q(x) D^q$. Эти системы имеют вид

$$\frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^m P_{jk}(\mathcal{L}, t) u_k(x, t).$$

Переходим к классам корректности решения задачи Коши. Здесь указывается класс начальных условий, обеспечивающих существование решений и их непрерывную зависимость от начальных данных, причем все рассмотрения проводятся в классах единственности. Приведем основные моменты исследования. Вводится разрешающая матрица $Q(s, t) \equiv Q(s, 0, t) = e^{tR(s)}$, и решение задачи представляется в виде $u(x, t) = G(x, t) * u(x, 0)$, где $G(x, t)$ — матрица Грина (обратное преобразование Фурье $Q(s, t)$). Столбцы $G(x, t)$ суть решения задачи Коши при начальных данных

$$u_j(x, 0) = 0 \quad (j \neq k), \quad u_k(x, 0) = \delta(x) \quad (k = 1, \dots, m).$$

Исследуются те случаи, когда отмеченная выше формула приводит к обычным функциям.

Укажем типы рассматриваемых систем, которые определяются свойствами введенной выше величины $\Lambda(s)$. Параболические системы характеризуются тем, что для них справедлива при вещественных $s = \sigma$ оценка

$$\Lambda(\sigma) \leq -C|\sigma|^h + C_1^*, \quad C > 0, \quad h > 0.$$

Наибольшее значение h называется показателем параболичности системы. В дальнейшем буква σ обозначает вектор s с вещественными составляющими. При $h = 1$ это — вещественное число. Система, параболическая по Петровскому, параболична и в указанном смысле, и для таких систем $h = p = p_0$. Доказывается, что каждое решение параболической системы в классе корректности бесконечно дифференцируемо по x_k , даже если начальные данные только локально суммируемы. В. М. Борок показала, что этим свойством обладают только параболические системы.

Для определенных выше параболических систем вводится еще одна, кроме h , характеристика μ , которая называется родом системы, но точное определение ее в общем случае нами не приводится. Сформулируем основной результат при $\mu > 0$: если начальные данные входят в класс функций K_{p_1, b_0} , определяемый неравенством

$$|u_j(x)| \leq C e^{b_0 |x|^{p_1}}, \quad p_1 = \frac{p_0}{p_0 - \mu},$$

то при достаточно малом $t \geq 0$ решение принадлежит классу K_{p_1, b_1} , где b_1 — любое число, большее b_0 . В частности, для систем, параболических по Петровскому ($\mu = 1$), имеем $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} = 1$, где $p_0 = p$ — порядок системы. В. М. Борок указала простой прием вычисления характеристики параболической системы при $n = 1$. В рассматриваемом случае s — одно комплексное переменное. Корни $\lambda(s)$ уравнения (159) разлагаются в окрестности бесконечно далекой точки в ряд Ньютона — Пуизе:

$$\lambda(s) = \alpha_0 s^{k_0} + \alpha_1 s^{k_1} + \dots + \alpha_p s^{k_p} + \dots,$$

где $k_0 > k_1 > \dots$ — рациональные показатели. Имеются такие α_q , что $\operatorname{Re} \alpha_q \neq 0$. Пусть $\operatorname{Re} \alpha_0 = \operatorname{Re} \alpha_1 = \dots = \operatorname{Re} \alpha_{p-1} = 0$ и $\operatorname{Re} \alpha_p \neq 0$. Доказывается, что $k_0, k_1, \dots, k_{p-1}$ — целые положительные числа и k_p — целое положительное четное число и что

$$p_0 = \max k_0, \quad h = \min k_p, \quad \mu = \min (k_p - k_0 + 1),$$

где $\max$ и $\min$ берутся по всем корням.

Гиперболические системы определяются двумя условиями:

$$\Lambda(s) \leq a|s| + b \quad \text{и} \quad \Lambda(\sigma) \leq C.$$

Можно показать, что для гиперболических систем — и только для них — задача Коши имеет решение при любых достаточно гладких начальных данных без ограничений их роста на бесконечности. Точная формулировка результата требует введения нового понятия — показателя корректности h гиперболической системы. Это — наименьшее целое неотрицательное число, входящее в неравенство $\|Q(\sigma, t)\| \leq C(1 + |\sigma|)^h$. При этом результат для гиперболических систем формулируется так: если начальные данные $u_j(x, 0)$ имеют непрерывные производные до порядка $h + n + k$, где k — любое целое неотрицательное число, то решение $u(x, t)$ непрерывно и имеет производные до порядка k , причем зависимость решения от начальных данных непрерывная.

Система (154) называется корректной по Петровскому, если существует такая постоянная C , что $\Lambda(\sigma) \leq C$. Определенные выше параболические и гиперболические системы корректны по Петровскому. Для таких систем доказывается существование решения и его непрерывная зависимость от начальных данных для достаточно гладких начальных данных при некотором ограничении их роста на бесконечности. Доказывается и обратное предложение о том, что корректность по Петровскому также необходима для справедливости такого рода утверждений. Далее изучаются классы корректности для указанных выше систем.

Исследуются так называемые некорректные системы. Эти системы определяются следующим образом: существует, по крайней мере, одна вещественная последовательность $\sigma_n \rightarrow \infty$, что $\Lambda(\sigma_n) \geq C |\sigma_n|^p$, $C > 0$, $\zeta > 0$. При выполнении неравенства $\Lambda(\sigma) < C |\sigma|^h + C_1$ для $h < 1$ решение существует при бесконечной дифференцируемости начальных данных при ограничениях (зависящих от h) на рост производных. При $h \geq 1$ эти ограничения приводятся к требованию аналитичности начальных данных и при увеличении h повышаются требования на порядок роста начальных данных на плоскости $x + yi$.

Кратко рассмотрим историю вопроса о классах корректности. Общие теоремы для систем с постоянными или зависящими от t коэффициентами, как уже указывалось, были получены И. Г. Петровским для класса функций, ограниченных вместе с некоторым числом производных при $-\infty < x < \infty$. Это связано с «условием А» из первого раздела. А. Н. Тихонов получил точный класс корректности для уравнения теплопроводности, О. А. Ладыженская — для общего параболического уравнения, С. Д. Эйдельман — для параболических по Петровскому систем. Общее указанное выше построение принадлежит Г. Е. Шилову.

М. В. Федорюк исследовал асимптотику $G(x, t)$ как при $t \rightarrow 0$, так и при $|x| \rightarrow \infty$, и это привело его к расширению классов корректности по сравнению с рассмотренными выше результатами. Е. А. Горин получил условия на систему, при которых всякое решение задачи Коши при $u_j(x, 0) \in L_2$ также принадлежит L_2 вместе с некоторым числом производных. Хоу Тянь Сян дал условия на систему и начальные данные, при которых $u(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$ имеет сильный или слабый предел. Я. И. Житомирский рассматривал классы единственности решения задачи Коши для одного уравнения вида

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^n q_k(x) \frac{\partial^k u}{\partial x^k}$$

с комплекснозначными коэффициентами. Приведенный порядок такого уравнения равен $\frac{n}{m}$. При $m = 1$ исследуются также классы корректности в том случае, когда имеются пределы $q_k(x) \rightarrow q_k$ при $|x| \rightarrow \infty$ и уравнение с коэффициентами q_k корректно по Петровскому.

В совместной работе В. М. Борок и Я. И. Житомирского изучается вопрос корректной разрешимости задачи Коши для уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= P_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u + P_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u, \\ (-\infty < x < \infty, \quad 0 \leq t \leq T < \infty), \\ u(x, t)|_{t=0} &= u_0(x). \end{aligned}$$

Предполагается, что если в правой части оставить только $P_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u$, то полученное уравнение корректно по Петровскому, т. е. $\operatorname{Re} P_0(i\delta) \leq C$. При некоторых предположениях о коэффициентах $P_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ доказы-

ется, что задача Коши корректно разрешима в классе ограниченных функций, в классе $L_2(-\infty, \infty)$ и в классе функций, растущих степенным образом при $|x| \rightarrow \infty$.

Отметим еще некоторые работы по системам уравнений. С. Л. Соболев изучал задачу Коши для системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - [\vec{v} \times \vec{k}] + \text{grad } p &= \vec{F}, \\ \alpha^2 \frac{\partial p}{\partial x} + \text{div } \vec{v} &= \psi. \end{aligned} \quad (161)$$

Его исследования были продолжены В. Н. Масленниковой и Р. А. Александряном. Работы Александряна связаны с его исследованиями о спектральных свойствах задачи Дирихле для уравнения струны в круге. С. А. Гальперн рассматривал системы вида

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = B\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) \vec{u},$$

где A и B — полиномиальные относительно $\frac{\partial}{\partial x_i}$ матрицы. Он доказал существование решения задачи Коши при выполнении «условия A » Петровского. Гальперн получил также решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + f(x_2, \dots, x_n, t),$$

которое при $n = 3$ равносильно системе (161) при $\alpha = 0$.

В работах Г. С. Салехова, В. Р. Фридлендера и В. А. Сочневой рассматривалась задача Коши для линейных и нелинейных систем, решенных относительно старших производных. Наиболее подробно изучались решения линейных систем с переменными коэффициентами в классах Жеврея $G(\delta_1, \dots, \delta_n)$. В работе А. С. Благовещенского была построена корректная задача для ультрагиперболического уравнения

$$\sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_{k=1}^q \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}$$

с данными для искомой функции на характеристическом конусе $x_1^2 + \dots + x_p^2 = y_1^2 + \dots + y_q^2$, причем на поведение функции u наложены некоторые ограничения при $R \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$, где $R^2 = x_1^2 + \dots + x_p^2 + y_1^2 + \dots + y_q^2$. Решение задачи строится в конечном виде.

4. *Случай полупространства. Предельные задачи.* Переходим теперь от задачи Коши к вопросу о корректности задач в полупространстве. В двух совместных работах Г. В. Дикополова и Г. Е. Шилова (1960 г.) эта задача рассматривалась в пространстве обобщенных функций H , состоящем из всех квадратично суммируемых функций $f(x_1, \dots, x_n)$ в вещественном пространстве R_n и их производных любого порядка,



Г. С. Салехов.

которые, вообще говоря, являются обобщенными функциями. Пусть уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^m u(x, t)}{\partial t^m} = \sum_{k=0}^{m-1} p_k \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k}, \quad (162)$$

где $p_k \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)$, как и выше, полиномы от $i \frac{\partial}{\partial x_s}$ ($s = 1, 2, \dots, n$) с максимальной степенью p . Ищется решение $u(x, t)$ такое, что оно и его производные по t до порядка m принадлежат H . Корни алгебраического уравнения

$$\lambda^m = \sum_{k=0}^{m-1} p_k(s) \lambda^k \quad (163)$$

нумеруются так, что

$$\operatorname{Re} \lambda_0(s) \leq \operatorname{Re} \lambda_1(s) \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_{m-1}(s).$$

Пусть A_j — множество точек из вещественного пространства R_n таких, что

$$\operatorname{Re} \lambda_0(s) \leq \operatorname{Re} \lambda_1(s) \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_{j-1}(s) \leq 0,$$

так что $A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_{m-1}$. Все A_j рассматриваются с точностью до множества меры нуль. Пусть H_1 — пространство, состоящее из всех функций $g(s) = g(s_1, \dots, s_n)$, квадратично суммируемых на R_n , и их произведений на полиномы от s .

Сформулируем основной результат, полученный в работах Дикоплова и Шилова. Пусть на каждом A_j задана функция $v_j(s)$, продолжимая на все пространство R_n до функции из H_1 . При этом уравнение (162) имеет решение $u(x, t)$, у которого преобразование Фурье $\frac{\partial^j u(x, t)}{\partial t^j}$ при $t = 0$ совпадает на A_j с $v_j(s)$ ($j = 0, 1, \dots, m-1$). Это решение при каждом $t \geq 0$ принадлежит H и при $t \rightarrow \infty$ возрастает в H не быстрее некоторой степени t вместе с производными по t до порядка $(m-1)$. Оно единственно в классе решений с указанными свойствами и непрерывно зависит в топологии H от $v_j(x)$, если эти функции меняются непрерывно в топологии H_1 . Выяснено, что если число корней $\lambda_k(s)$ с неположительной вещественной частью остается неизменным почти во всех точках пространства s , то задача может быть сформулирована в терминах начальных данных, а не их преобразований Фурье. Соответствующий класс уравнений, содержащий параболические уравнения, гиперболические и эллиптические с условием Лопатинского, называется классом регулярных уравнений. Такие уравнения имеют фундаментальные решения; для однородных уравнений эти решения определяются явно. В. П. Паламоновым были рассмотрены более общие условия на границе. Г. В. Ди-

кополов и Г. Е. Шилов распространили свои результаты на неоднородные уравнения. Шилов рассмотрел краевую задачу в четверти плоскости.

Обратимся теперь к случаю ограниченной области. Как мы указывали в § 3 II раздела, М. И. Вишиком рассматривались в общем плане расширения предельных задач для эллиптических уравнений второго порядка $\mathcal{L}u = f$ при однородных граничных условиях. Рассмотрим общий линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}u = \sum_{k_1, \dots, k_n} a_{k_1, \dots, k_n}(x) u_{x_{k_1} \dots x_{k_n}}, \quad (164)$$

где коэффициенты — достаточно гладкие функции и сумма конечна. На этот оператор $\mathcal{L}$ легко переносится построение минимальных операторов $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_0^*$. Как и в простейшем случае, важную роль играют условия

$$\|\mathcal{L}u\|_{L_2(\mathfrak{D})} \geq c \|u\|_{L_2(\mathfrak{D})}, \quad \|\mathcal{L}^*u\|_{L_2(\mathfrak{D})} \geq c \|u\|_{L_2(\mathfrak{D})} \quad (165)$$

на гладких финитных в $\mathfrak{D}$ функциях. Эти условия равносильны существованию корректно разрешимых расширений минимального оператора $\mathcal{L}_0$ (расширений, имеющих в $L_2(\mathfrak{D})$ ограниченный обратный) или тому факту, что $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_0^*$ имеют непрерывные обратные. Хермандер, которому принадлежит отчетливая формулировка указанного результата, доказал, что оценки (165) выполнены в случае оператора (164) с постоянными коэффициентами. Это оказалось, как выяснилось из примера А. А. Дезина, неверным для систем с постоянными коэффициентами.

Б. П. Панеях дал описание всех тех систем с постоянными коэффициентами, для которых сохраняется результат Хермандера. Он же выяснил, что несуществование корректно разрешимых расширений для всех систем с постоянными коэффициентами связано с тем, что рамки пространства $L_2(\mathfrak{D})$ не всегда удобны для изучения дифференциальных операторов. Он показал, что с любой дифференциальной матрицей вида (164) (u — вектор, $a_{k_1 \dots k_n}$ — матрицы) с постоянными коэффициентами можно связать такое пространство функций, в котором соответствующий минимальный оператор имеет корректно разрешимые расширения.

3

Уравнения смешанного типа

Уравнениями смешанного типа называются уравнения, которые в одной части рассматриваемой области $\mathfrak{D}$ принадлежат эллиптическому типу, а в другой — гиперболическому; на переходной линии (или поверхности) уравнения вырождаются в параболические или не определены. Первые исследования в этой области принадлежат итальянскому математику Трикоми. Он для уравнения вида (уравнение Трикоми)

$$Tu \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (166)$$

принадлежащему эллиптическому типу при $y > 0$ и гиперболическому при $y < 0$, рассматривал краевую задачу (задачу Трикоми), к описанию которой мы переходим.

Пусть область $\mathfrak{D}$ ограничена гладкой кривой Γ , расположенной в полуплоскости $y > 0$, с концами A и B на оси $y = 0$ и характеристиками l_1 и l_2 уравнения (166) при $y < 0$, выходящими из точек A и B и пересекающимися в точке C . Требуется найти гладкое в $\mathfrak{D}$ решение уравнения (166), удовлетворяющее условиям

$$u|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad u|_{l_1} = \psi(x, y). \quad (167)$$

Трикоми доказал при некотором предположении об участках линии Γ , примыкающих к точкам A и B , существование и единственность решения указанной задачи. Он свел ее к нахождению функции $v(x) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y}$, которая должна удовлетворять некоторому сингулярному интегральному уравнению.

Начиная с 1945 г. появляются многочисленные работы по предельным задачам для уравнений смешанного типа. К настоящему времени опубликовано более 70 работ отечественных математиков в этой области. Первые работы принадлежат Ф. И. Франкля (с 1945 г. по 1961 г.), М. А. Лаврентьеву (1950 г.), А. В. Бицадзе (с 1950 г. по 1962 г.) и К. И. Бабенко (1952 г.). В работах Ф. И. Франкля в период с 1945 г. по 1952 г. рассматриваются приложения результатов Трикоми и совместной работы М. А. Лаврентьева и А. В. Бицадзе к некоторым задачам газовой динамики. Дальнейшие работы Франкля относятся как к приложениям, так и к математическим проблемам. Для кривой Γ общая разрешимость задачи Трикоми доказана К. И. Бабенко. М. М. Смирнов доказал для уравнения Трикоми существование и единственность решения краевой задачи, в которой на Γ задается выражение $y \frac{dy}{ds} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{dx}{ds} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$, а на характеристике l_1 — значение искомой функции. В работе М. А. Лаврентьева и А. В. Бицадзе рассматривалось уравнение

$$u_{xx} + u_{yy} \cdot \operatorname{sgn} y = 0, \quad (168)$$

т. е. $u_{xx} + u_{yy} = 0$ при $y > 0$ и $u_{xx} - u_{yy} = 0$ при $y < 0$.

Подробное исследование задачи Трикоми и ее различных обобщений для (168) было проведено А. В. Бицадзе. В частности, он решил задачу Трикоми в многосвязной области, задачу, в которой на Γ задана нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial n}$, а также задачу, которая отличается от обычной задачи Трикоми тем, что кусок характеристики l_1 заменяется на кривую с уравнением $y = -\gamma(x)$, $0 < \gamma'(x) \leq 1$ в полуплоскости $y < 0$.

Л. И. Чибрикова, используя свойства автоморфных функций, получила в явном виде решение задачи Трикоми для уравнения (168) при некотором предположении о кривой Γ . Отметим, что уравнение (168) (в других независимых переменных) исследовалось в начале тридцатых годов В. И. Смирновым и С. Л. Соболевым в работах, посвященных вопросу о распространении колебаний. Затем оно рассматривалось Буземаном в связи с задачами газовой динамики. Но в этих работах не было речи о предельных задачах типа задачи Трикоми и других. В работах Л. Е. Востровой, Ю. М. Крикунова и С. П. Пулькина рассмотрены

различные граничные задачи для обобщенного уравнения Лаврентьева — Бицадзе

$$u_{xx} + u_{yy} \cdot \operatorname{sgn} y + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = 0.$$

Для задачи Трикоми в случае уравнения (168) Бицадзе сформулировал следующий принцип экстремума: решение задачи Трикоми, обращающееся в нуль на характеристике l_1 , не может достигать на открытом отрезке линии AB вырождения типа ни положительного максимума, ни отрицательного минимума. К. И. Бабенко доказал справедливость его для задачи Трикоми в случае общего уравнения Трикоми

$$yu_{xx} + u_{yy} + a(x, y) u_{xx} + b(x, y) u_y + c(x, y) u = 0$$

в предположении, что $a(x, 0) = b(x, 0) = 0$ и отрезок AB достаточно мал. Отсюда следует единственность решения задачи Трикоми. В. Ф. Волкодавцов доказал эту единственность при больших предположениях относительно a , b и c , но без предположения малости AB .

Во многих работах рассматривается уравнение Чаплыгина

$$k(y) u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (k(0) = 0, \quad k'(y) > 0). \quad (169)$$

К. И. Бабенко подробно исследовал для этого уравнения задачу Трикоми как в первоначальной ее постановке, так и в обобщенной. Ф. И. Франкль показал, что некоторая задача газовой динамики сводится к краевой задаче для уравнения (169), в которой на части Γ , примыкающей к A , и на характеристике l_1 задано условие $u = 0$, а на остальной части Γ должно выполняться соотношение $Pu_x + Qu_y = 0$, где P и Q — заданные функции. Им была подробно изучена эта задача. Б. В. Мелентьев исследовал ту же задачу для уравнений (166) и (168), а также и более общие краевые задачи. Для уравнения (169) Ф. И. Франкль поставил краевую задачу нового типа («задача Франкля»). Эта задача формулируется следующим образом: найти решение уравнения (169) в области $\mathfrak{D}$, ограниченной отрезком $A'A$ ($-a < y < a$) оси $x = 0$, характеристикой $A'C$ уравнения (169), где C имеет координаты $(a_1, 0)$, отрезком CB оси $y = 0$ ($a_1 \leq x \leq b$) и кривой Γ с концами A и B , лежащей в верхней полуплоскости, при задании u на Γ и CB и дополнительно при условиях

$$u_x|_{A'A} = 0, \quad u(0, y) - u(0, -y) = f(y), \quad 0 \leq y \leq a.$$

Задача Франкля была исследована в работах А. В. Бицадзе и Ю. В. Девингтала.



С. П. Пулькин.

И. Л. Кароль рассмотрел граничные задачи для уравнений вида

$$u_{xx} + |y|^m u_{yy} \operatorname{sgn} y = 0, \quad (170)$$

$$u_{xx} + y u_{yy} + \alpha u_y = 0, \quad (171)$$

где m и α — постоянные. Для уравнения (171) при постановке задачи играет роль знак α . Кароль решил при $\alpha > 0$ задачу Трикоми для случая, когда на линии вырождения ($y = 0$) поставлено условие

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^\alpha u_y = \lim_{y \rightarrow -0} |y|^\alpha u_y.$$

Он исследовал и доказал также для уравнения (170) существование и единственность решения задачи Трикоми при специальном выборе Γ («нормальная кривая»).

Ф. И. Франкль свел прямую задачу теории сопла Лавалья к новой граничной задаче для уравнения (170) при $m = \frac{1}{2}$, в которой условие на линии $y = 0$ имеет вид $u_y(x+0) = -u(x-0)$, и исследовал эту задачу.

Л. В. Овсянников рассмотрел обобщенные решения уравнения (166) и указал схему применения метода наименьших квадратов для приближенного решения задачи Трикоми. Функциональная методика доказательства существования слабых решений граничных задач была применена к уравнениям смешанного типа К. Моравец, которая рассматривала системы первого порядка, эквивалентные уравнению Чаплыгина. Методы, по которым она строила энергетические неравенства, применялись для других уравнений и граничных условий Ф. И. Франклем. Он установил теорему существования слабого решения для прямой задачи плоско-параллельного сопла Лавалья. Для ряда других граничных задач функциональные методы доказательства существования слабых решений граничных задач были разработаны Ю. М. Березанским, который получил энергетические неравенства, дающие оценки в других нормах и для уравнений более общих, чем уравнение Чаплыгина. Эти результаты были распространены им и для области, эллиптическая часть которой неограничена. В. Г. Карманов и Л. И. Коваленко применяли метод сеток для доказательства существования решения граничных задач для уравнения смешанного типа: Карманов — для уравнения (168) и Коваленко — для более общего уравнения. В предположении существования решения задачи Трикоми для уравнения (168) Е. А. Волков, О. А. Ладыженская и З. И. Халилов указали разностные схемы, сходящиеся к решению; для уравнения Трикоми (166) это сделал А. Ф. Филиппов.

Переходим к уравнениям высших порядков. М. М. Смирнов изучал уравнение

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \operatorname{sgn} y + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$$

в области $\mathfrak{D}$, ограниченной гладкой кривой Γ с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, расположенной в верхней полуплоскости, и характеристиками

$AC: y = -x$ и $BC: y = x - 1$. На Γ задается u и $\frac{\partial u}{\partial n}$, а на AC и BC только $\frac{\partial u}{\partial n}$. Он доказал существование и единственность решения этой задачи. Им исследованы и другие граничные задачи для данного уравнения. В. И. Жегалов рассмотрел ряд граничных задач для уравнения

$$\Delta^{(n)} u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \operatorname{sgn} y \right)^{(n)} u = 0$$

при различных граничных условиях и для некоторых из них при условиях сопряжения на отрезке оси $y = 0$. В работе А. В. Бицадзе и М. С. Салахитдинова исследованы граничные задачи для уравнения $\frac{\partial}{\partial x}(Tu) = 0$. Для уравнения $\frac{\partial}{\partial x}(\Lambda u) = 0$ рассмотрел эти задачи Т. Д. Джураев. Ф. И. Карамышев исследовал систему уравнений

$$u_x - v_y = 0, \quad u_y + v_x \operatorname{sgn} y = 0.$$

Рассмотрим постановку задачи. Область $\mathfrak{D}^+$, ограниченная отрезком $0 \leq x \leq 1$ оси $y = 0$ и кривой Γ , является половиной симметрично расположенной относительно оси $y = 0$ фундаментальной области некоторой элементарной (не дwoякопериодической) или фуксовой группы первого рода дробно-линейных преобразований плоскости комплексного переменного. Область $\mathfrak{D}^-$ ограничена отрезком оси $y = 0$ и характеристиками $y = -x$ и $y = x - 1$. На Γ и характеристиках задаются линейные комбинации u и v , а на отрезке $0 \leq x \leq 1$ u^+ и v^+ выражаются линейно через u^- и v^- . Существование решения доказывается с помощью сведения к задаче Римана для автоморфных функций.

А. В. Бицадзе рассмотрел граничные задачи для уравнений

$$u_{xx} \operatorname{sgn} z + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z)$$

и

$$\sum_{k=1}^n u_{x_k x_k} + u_{zz} \operatorname{sgn} z = 0.$$

Различные уравнения смешанного типа исследовали также Ф. Б. Абу-талиев, Н. И. Бакиевич, М. Б. Капилевич, Б. В. Шабат и др.

О. А. Ладыженская и В. Ступялис рассмотрели смешанные задачи, в которых область изменения пространственных переменных состоит из нескольких подобластей и в каждой из них задано свое уравнение эллиптического, параболического или гиперболического типа. На границах раздела подобластей ставятся условия сопряжения (такие же, как в задачах дифракции, на внешней границе — одно из классических условий, а в областях, где заданы уравнения параболического или гиперболического типа, — начальные данные Коши. Они доказали однозначную разрешимость таких задач.

Некоторые задачи математической физики

1

Работы Н. М. Гюнтера по гидродинамике идеальной жидкости

В последнем, шестом, разделе мы рассмотрим работы, посвященные некоторым конкретным задачам математической физики. Начнем с большого цикла работ Н. М. Гюнтера по задаче Коши и смешанной задаче для уравнений гидродинамики. Обе задачи решаются на малом промежутке изменения времени.

Основным результатом в случае задачи Коши является установление существования и единственности решения уравнений гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости при наличии внешней силы, имеющей потенциал. При этом предполагается, что жидкость заполняет все пространство и задано начальное поле скоростей. Это поле характеризуется тремя непрерывными функциями, имеющими ограниченные производные, которые могут терпеть разрыв при переходе через некоторые поверхности. Существование производных второго порядка у начального поля скоростей не предполагается. Исключая давление из уравнения гидродинамики, применяя к обеим его частям операции расходимости и используя формулы Пуассона, Гюнтер получил три нелинейных интегральных уравнения для составляющих скорости. Правые части этих уравнений представляют собой интеграл по времени от составляющих градиента некоторого ньютонова потенциала, плотность которого содержит нелинейно производные от составляющих скорости. К этим трем уравнениям добавляются еще три дифференциальных уравнения мгновенных линий тока, записанные в интегральной форме. Полученные шесть уравнений записываются в переменных Лагранжа, и к ним применяется метод последовательных приближений.

Большая часть работы Н. М. Гюнтера посвящена изучению вторых производных ньютонова потенциала при малых предположениях относительно его плотности. Результаты этого изучения применяются при исследовании сходимости метода последовательных приближений.

Совершенно по-иному строится метод последовательных приближений для случая ограниченной задачи, т. е. для случая жидкости, заполняющей некоторый сосуд, который может перемещаться заданным образом с течением времени и деформироваться при неизменном объеме. Здесь, кроме начального условия, имеем и предельное условие на поверхности сосуда. В данном случае метод последовательных приближений построен не на поле скоростей, а на поле вихрей, и в качестве начального условия берется поле вихрей в начальный момент времени. Предварительно Гюнтер вывел формулу для поля скоростей по заданному полю вихрей в случае жидкости, заключенной в замкнутом сосуде. Для безграничного пространства такая формула была дана Гельмгольцем. В случае замкнутого сосуда задача получения такой формулы

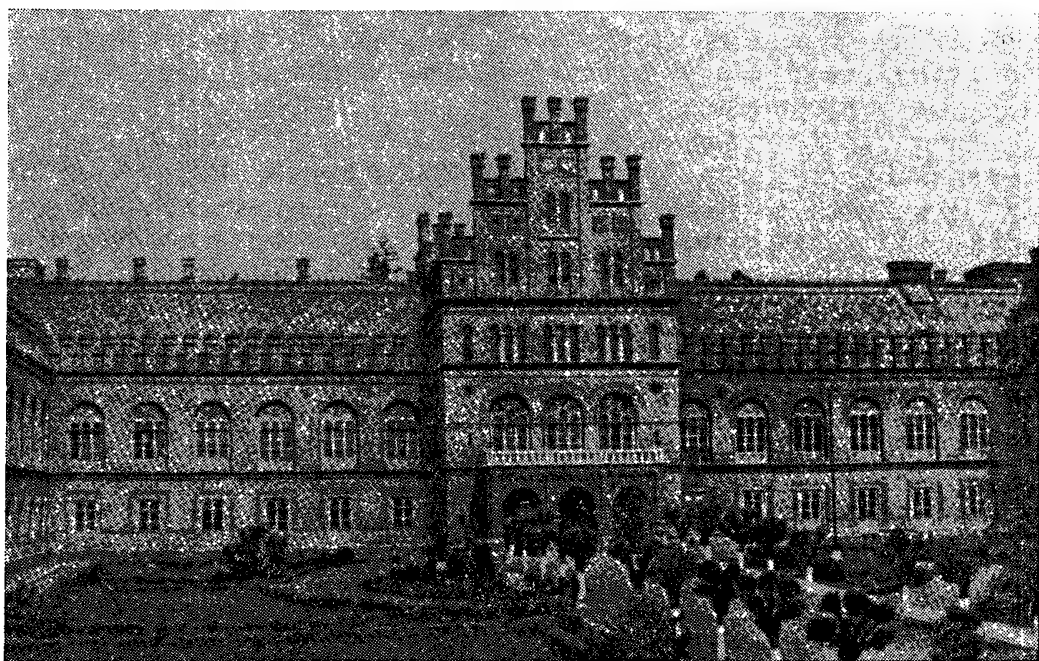
становится гораздо более сложной и требует решения задачи Неймана и преобразования некоторого потенциала простого слоя в потенциал двойного слоя, причем в окончательные формулы входят, между прочим, производные этого потенциала двойного слоя.

Основой метода последовательных приближений являются здесь соотношения Коши, которые выражают составляющие вихря через их начальные значения и через производные от декартовых координат жидкой частицы по лагранжевым переменным. В качестве первого приближения для поля скоростей берется градиент гармонической функции, решающей задачу Неймана, соответствующую предельным условиям на границе сосуда. По этому полю скоростей строятся мгновенные линии тока и соотношения Коши дают первое приближение для поля вихрей. Упомянутые выше формулы дают по этому полю вихрей соответствующее поле скоростей. Таким образом, получается второе приближение для поля скоростей, и процесс продолжается, как и выше. Метод последовательных приближений приводит к полю скоростей, которое удовлетворяет уравнениям Гельмгольца, вытекающим из соотношений Коши. Далее следует обширное исследование, в котором доказывается, что полученное поле скоростей динамически возможно, т. е. позволяет определить из уравнений гидродинамики скалярное поле давления. Это сводится к доказательству того факта, что полученное поле скоростей, выраженное в переменных Лагранжа, имеет производную по времени, которая, в свою очередь, имеет производные по лагранжевым координатам. Наличие этих производных и уравнений Гельмгольца позволяет заключить о возможности определения давления так, как это было указано выше. Некоторые дополнительные осложнения возникают в том случае, когда область, занятая жидкостью, многосвязна. Рассмотренная работа Гюнтера по смешанной задаче была напечатана в период с 1926 по 1928 г. в «Известиях Академии наук» в виде большого мемуара, состоящего из шести частей.

2

Математическая теория дифракции. Коротковолновая асимптотика

Решение задач дифракции заключается в нахождении решений уравнения или системы уравнений с частными производными вне некоторой области (дифрагирующее тело) при определенных начальных условиях, предельных условиях на границе области и условиях на бесконечности. Начальные условия часто заменяются требованием синусоидальности решения во времени. Именно этому случаю и посвящен настоящий параграф. Кроме того, во многих случаях ставится задача об определении поля не только вне дифрагирующего тела (препятствия), но и внутри него, причем на его поверхности задаются условия сопряжения этих двух полей. Бóльшая часть работ этого направления выполнена на «физическом» уровне строгости.



Черновицкий государственный университет.

Рассмотрим работы (1944—1950 гг.) В. А. Фока, которые оказали существенное влияние на дальнейшее развитие исследований по дифракции. Его исследования относятся к дифракции электромагнитных волн, определяемых синусоидальными решениями уравнений Максвелла. До него в теории дифракции электромагнитных волн были известны лишь решения немногочисленных задач для дифрагирующих тел определенной формы. Эти решения, представляемые рядами или интегралами, весьма мало эффективны в том практически важном случае, когда длина волны мала по сравнению с размерами препятствия и их следует рассматривать лишь как первый шаг в решении задачи. Следующим шагом должен быть вывод формул, из которых могут быть получены качественные физические следствия и удобные расчетные формулы. В таком именно направлении и производились исследования В. А. Фока при решении дифракции от проводящей сферы и параболоида вращения.

Указанный выше метод естественно применим лишь в тех немногочисленных случаях, когда удастся построить строгое решение. Поэтому существовала потребность в создании приближенного метода задач дифракции, который, обладая общностью, приводил бы к достаточно простым окончательным формулам. Построение такого приближенного метода и решению с его помощью ряда задач посвящен второй основной цикл работ В. А. Фока. В них он развил и применил предложенный М. А. Леонтовичем «метод параболического уравнения». Это позволило Фоку дать не только новый упрощенный вывод результатов, полученных им раньше, но и обобщить его в различных направлениях

(учет конечной производимости вещества тела; определение поля не только на самой поверхности, но и вблизи нее; учет неоднородности атмосферы в задаче дифракции радиоволн вокруг Земли). Приближенный метод Фока основан, естественно, на предположении малости некоторых параметров, входящих в задачу. Это величины $\frac{1}{|\eta|}$ и $\frac{\lambda}{R}$, где

$\eta = \epsilon + i \frac{4\pi\tau}{\omega} \left(\omega = \frac{2\pi i}{\lambda} \right)$ — комплексная диэлектрическая постоянная тела, λ — длина волны падающего излучения; R — величина порядка радиуса кривизны тела. Если $|\eta| = \infty$ (идеальные проводники), то поле внутри проводника равно нулю, и задача дифракции формулируется только для части пространства вне тела. Аналогичный результат получается и в случае неидеальных проводников, если $|\eta| \gg 1$ и $R|\eta| : \lambda \gg 1$. В этом случае поле внутри проводника мало всюду, кроме поверхностного слоя толщиной порядка $\lambda : |\eta|$, причем влияние этого слоя может быть учтено с помощью предельного условия для внешнего поля (условия, впервые указанные М. А. Леонтовичем и несколько видоизмененные по форме В. А. Фоком).

Дальнейшее существенное упрощение в задаче дифракции для тел произвольной формы вытекает из принципа локальности поля в области полутени, сформулированного В. А. Фоком. Если бы удалось определить электромагнитное поле вблизи поверхности проводящего тела, а следовательно, и распределение токов в поверхностном слое, то решение задачи дифракции получалось бы с помощью известных формул для векторного потенциала. В освещенной области вблизи тела поле подчиняется, с большой степенью точности, законам отражения Френеля и легко может быть определено, а при входе в область тени поле быстро стремится к нулю. Существенно важным звеном является переходная область (полутени), расположенная вблизи границы геометрической тени и имеющая форму полосы шириною $d = \sqrt[3]{\frac{\lambda}{\pi} R_0^2}$, где R_0 — радиус кривизны нормального сечения тела плоскостью падения. Фок показал, что с точностью порядка $\sqrt[3]{\frac{\lambda}{\pi R_0}}$ электромагнитное поле имеет локальный характер, т. е. зависит только от значения поля падающей волны в окрестности данной точки, от геометрической формы тела вблизи этой точки и от электрических свойств проводника. Ввиду этого принципа локальности поля достаточно найти решение задачи дифракции для какого-либо выпуклого тела довольно общей формы. Фок сделал это для параболоида вращения $x^2 + y^2 + 2az - a^2 = 0$. Он построил точное решение в виде интегралов и выполнил их приближенное вычисление при предположении, что $ka \gg 1$, где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число.

После этой общей характеристики основных результатов работ В. А. Фока перейдем к их более точным математическим формулировкам и последующим работам других ученых. В работе о дифракции волн от точечной антенны относительно Земли Фок, исходя из представления решения в виде контурного интеграла (преобразование Ватсона)

и вычисляя асимптотически этот интеграл, получил в области полутени на поверхности Земли следующее выражение для функции Герца:

$$U = \frac{e^{ika\vartheta}}{a\vartheta} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{x}{a}} \left(\int_{i\infty}^0 + \int_0^{\infty} \right) e^{ixt} \frac{w_1(t-y)}{w_1'(t) - qw_1(t)} dt,$$

где $w_1(t)$ — функции Эйри,

$$x = \left(\frac{ka}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \vartheta, \quad y = \left(\frac{ka}{2} \right)^{-\frac{1}{3}} kh,$$

a — радиус сферы, h — высота источника над Землей ($\vartheta = 0$) и q — некоторая постоянная. При удалении в освещенную область эта формула переходит в формулу Вейля — Ван-дер-Поля, а при удалении в область тени она может быть сведена к быстро сходящему ряду. В работе В. А. Фока «Распределение токов, возбуждаемых плоской волной на поверхности проводника» (1945 г.) подсчитывается, что вблизи границы тени поле имеет локальный характер, о чем мы упоминали выше, и показано, что вблизи этой границы распределение токов выражается через универсальную (одинаковую для всех тел) функцию $G(\xi)$ от аргумента $\xi = \frac{l}{\alpha}$, где l — расстояние от границы тени, отсчитываемое в плоскости падения, а α — ширина области полутени. Решение задачи о распределении токов, возбуждаемых плоской волной на поверхности проводника, основано на изучении решений интегрального уравнения для плотности тока $\vec{j}$ на поверхности абсолютного проводника при падении на него монохроматической электромагнитной волны. Все это вместе с применением результатов решения задачи для параболоида вращения и приводит к введению функции $G(\xi)$.

В работе 1944 г. М. А. Леонтовичем были предложены приближенные «граничные условия Леонтовича», широко используемые теперь в теоретической радиофизике. О сущности этих условий мы уже говорили выше. В совместной работе М. А. Леонтовича и В. А. Фока с помощью этих условий рассматривалась указанная выше задача о дифракции относительно Земли. В уравнении отбрасываются также малые при большой частоте члены. В результате все сводится к внешней по отношению к Земле задаче для параболического уравнения

$$w_{yy} + i \left[\left(x + \frac{y}{x} \right) w_y + w_x \right] = 0$$

при дополнительных условиях

$$w_y + \left(q + \frac{ix}{2} \right) w \Big|_{y=0} = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y > 0}} \frac{w-2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Выше мы упоминали о преобразовании Ватсона в связи с работой В. А. Фока о дифракции радиоволн относительно Земли. Оно применяется вообще в тех случаях, когда переменные разделяются. Его смысл в общих чертах таков: если оператор является суммой двух коммутиру-

ющих операторов, то его резольвенту можно представить в виде контурного интеграла (интеграл Ватсона) от произведения резольвент этих двух коммутирующих операторов по контуру, разделяющему их спектры. Заметим при этом, что физический смысл ядра резольвенты в дифракционных задачах — волновое поле, возникшее от точечного источника. Произведение резольвент имеет полюсы в точках спектра упомянутых коммутирующих операторов. В дифракционных задачах один из них самосопряженный, а другой — несамосопряженный. Интеграл Ватсона можно представить в виде ряда вычетов в полюсах, совпадающих с собственными значениями несамосопряженного оператора. Это приводит к разложению резольвенты в ряд по собственным функциям несамосопряженного оператора. В последнее время ряды по собственным функциям несамосопряженных операторов, связанных с преобразованием Ватсона, исследовал В. Ф. Лазуткин. Оказалось, что они могут расходиться для финитной бесконечно дифференцируемой функции, но с другой стороны эти собственные функции образуют замкнутую систему.

Приближенные формулы, полученные на основании анализа точных решений, допускают наглядную интерпретацию с позиций так называемого лучевого метода. С его помощью можно находить коротковолновое приближение и в таких задачах дифракции, для которых точные решения в явной форме не могут быть построены. Это обстоятельство позволяет считать лучевой метод весьма важным в теории дифракции.

Наметим кратко типичную схему, по которой находится лучевое приближение. Пусть $c(M)$ — скорость распространения волн в соответствующей задаче. Поле лучей образуется экстремальными интеграла

$$I = \int \frac{ds}{c(M)}. \quad (172)$$

Если это поле связано с точечным источником, то все лучи поля выходят из фиксированной точки (центральное поле). Если имеются отражающие или преломляющие границы, то лучи надо отразить или преломить по законам геометрической оптики. Поверхности, ортогональные к лучам, называются волновыми фронтами. Существенную роль в геометрической оптике играет функция $\tau(M)$ (эйконал), определяемая равенством

$$\tau(M) = \tau_0 + \int_{M_0}^M \frac{ds'}{c(M')} \quad (\tau_0 = \text{const}),$$

где интеграл берется по лучу M_0M и M_0 пробегает какой-либо фиксированный волновой фронт. Эта функция связана с полем лучей. В случае центрального поля точку M_0 можно считать фиксированной (точечный источник).

Первое приближение (лучевого метода) к решению дифракционной задачи имеет вид

$$u = A(x, y, z, \omega) e^{-i\omega\tau(x, y, z)}, \quad (173)$$

где $A(x, y, z, \omega)$ — функция (скалярная или векторная), «медленно меняющаяся» с ростом ω . Если волновой процесс описывается уравнением Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (174)$$

то скалярная функция A в нулевом приближении удовлетворяет вдоль лучей уравнению

$$2 \frac{dA}{ds} + A \Delta \tau = 0. \quad (175)$$

В конкретных задачах для A можно получить начальную величину и, таким образом, определить лучевое приближение (173).

Формулы лучевого метода для уравнений Максвелла были получены в работе (1938 г.) С. М. Рытова. В совместной работе С. М. Рытова и М. Л. Левина рассмотрен коротковолновой аспект лучевого метода для теории упругости. Американским математиком Келлером был указан эвристический метод построения асимптотических формул в зоне тени. Эти соображения нашли свое применение в работах В. А. Фока, В. И. Иванова, Л. А. Вайнштейна и А. А. Федорова, а также в работах В. С. Булдырева. Основным моментом в них является сведение интеграла Ватсона к сумме вычетов в полюсах резольвенты, соответствующей радиальному оператору, который и является упомянутым выше несамосопряженным оператором.

Келлер и Рубинау применили также лучевой метод к задаче об асимптотике собственных чисел и функций оператора Лапласа в случае конечной области. Они предположили, что собственные функции можно искать в виде конечной суммы выражений (173). Соответствующие поля лучей должны обладать некоторыми специальными свойствами. Неясно, сколь широк тот класс областей, для которых эти построения применимы. Во всяком случае метод Рубинау — Келлера дает интересную интерпретацию асимптотики собственных функций круга, эллипса и шара. В случае эллипсоида построение асимптотик собственных функций для оператора Лапласа, а также сравнение полученных на этом пути результатов с точными были проведены в работах В. П. Быкова и Л. А. Вайнштейна.

Для более общих областей метод Рубинау — Келлера был применен для подпоследовательностей собственных функций в совместной работе В. С. Булдырева и М. М. Попова.

Когда поле лучей теряет регулярность, лучевой метод становится неприменимым. Обычно в таких областях асимптотика находится по методу параболического уравнения. Характер поведения лучей в этих областях позволяет указать систему координат, в которых следует искать решения параболического уравнения.

Анализ поля лучей позволил применить метод параболического уравнения также к задаче об асимптотике собственных функций дифференциальных операторов с частными производными. Этому вопросу по существу посвящена работа Л. А. Вайнштейна об открытых резонаторах. В случае плоской выпуклой области В. С. Булдырев рассмотрел асимптотику собственных функций типа «прыгающего мячи-

ка» и «шепчущей галлерей». Трехмерным задачам такого рода посвящены работы В. М. Бабича и В. Ф. Лазуткина, в которых получена асимптотика собственных функций, сосредоточенных около некоторого замкнутого луча. Метод определения коротковолновой асимптотики с помощью континуальных интегралов предложил В. С. Буслаев. Все эти работы выполнены на физическом уровне математической строгости.

Строгому обоснованию коротковолнового приближения в задаче дифракции от точечного источника посвящены работы В. С. Буслаева, В. М. Бабича, В. А. Марченко, В. П. Маслова, К. В. Маслова, и И. В. Олимпиева.

В работе В. С. Буслаева изучалась асимптотика функции Грина $G(x', x; k)$ уравнения Гельмгольца для внешности $\mathfrak{D}$ ограниченного выпуклого контура l на плоскости. Математически задача формулируется следующим образом:

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + k^2\right)G(x', x; k) = \delta(x - x'), \quad (176)$$

$$G(x', x; k)|_{x \in l} = 0,$$

где x' и x — набор координат точек в области $\mathfrak{D}$, $k^2 > 0$, $\delta(z)$ — функция Дирака. На бесконечности ставится принцип излучения. С помощью некоторых соображений устанавливается асимптотика $Q(x', x; k)$ для $G(x', x; k)$, удовлетворяющая предельному условию на l и принципу излучения, и определяется невязка в уравнении

$$K(y, x; k) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + k\right)Q(y, x; k) - \delta(y - x).$$

Тогда справедливо соотношение

$$G(x', x; k) + \int_{\mathfrak{D}} G(x', y; k) K(y, x; k) dy = Q(x', x; k), \quad (177)$$

которое рассматривается как интегральное уравнение для $G(x', x; k)$ при фиксированном x' . Оператор K оказывается при $k \rightarrow \infty$ малым в некотором пространстве, что и приводит к оценке разности $G(x', x; k) - Q(x', x; k)$ во всей области $\mathfrak{D}$. При исследовании оператора K используются многие свойства контурных интегралов, изученных в работах В. А. Фока.

В работе В. М. Бабича рассматривается указанная выше задача с той лишь разницей, что в предельном условии на l функция G заменена ее нормальной производной. Асимптотика на l выражается через решение задачи (176) для внешности круга, и для значения искомой



В. П. Маслов.

функции Грина на l получается интегральное уравнение, аналогичное (177), но с интегрированием по l . Это приводит окончательно к оценкам в любой конечной замкнутой области, лежащей строго внутри освещенной части или зоны тени. Исследования Бабича были продолжены для зоны тени в совместной работе В. М. Бабича и И. В. Олимпиева. Интегральное уравнение, подобное рассмотренному в работе Бабича, ранее изучалось английским ученым Ф. Эрселлом.

В. П. Маслову принадлежит большая серия работ по квазиклассическому приближению в квантовой механике и коротковолновому приближению в теории гиперболических уравнений. В частности, ему удалось построить явные формулы для волнового поля в том случае, когда поле лучей имеет огибающую (так называемую каустику). Огибающая может содержать особые линии, вырождаться в точку и т. п. — формулы Маслова охватывают все эти случаи. Построенный им аналитический аппарат позволил решить «в большом» задачу о построении коротковолновой асимптотики решения задачи Коши для гиперболического уравнения с быстро осциллирующими начальными условиями и строго оправдать эту асимптотику. В. П. Маслов получил еще ряд других интересных результатов, в частности об асимптотике собственных чисел и функций эллиптических дифференциальных операторов.

3

Теория нестационарных волн

В настоящее время имеется обширная отечественная литература по теории различного рода волновых процессов, зависящих от времени произвольным образом. Мы коснемся лишь той части работ, которая носит чисто теоретический характер.

Это направление было заложено у нас в работах теоретического отдела Сейсмологического института Академии наук. Оно относится к началу 30-х годов. В 1932 г. В. И. Смирнов и С. Л. Соболев разработали новый метод решения динамических задач теории упругости. Он был основан на некотором легко проверяемом свойстве волнового уравнения на плоскости с постоянным коэффициентом c :

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0. \quad (178)$$

Если $\Theta(x, y, t)$ — решение уравнения

$$t - \Theta x \pm y \sqrt{\frac{4}{c^2} - \Theta^2} + p(\Theta) = 0, \quad (179)$$

где $p(\Theta)$ — произвольная (аналитическая) заданная функция, то любая дифференцируемая функция $f(\Theta)$ является решением уравнения (178). Если в некоторой области переменных (x, y, t) величина Θ не вещественна, то функция $f(\Theta)$ должна быть, естественно, аналитической. Эти так называемые функционально-инвариантные решения были широко использованы в теории упругих волн. Связующим зве-

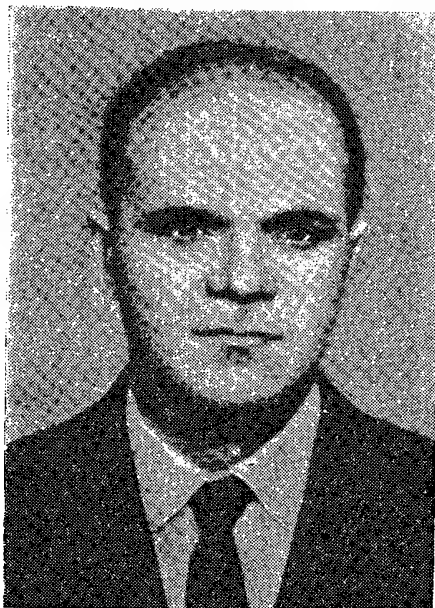
ном между волновыми уравнениями и динамическими задачами теории упругости служит известная формула, выражающая вектор смещения через скалярный потенциал продольных волн и векторный потенциал поперечных волн. Отметим при этом, что при некоторой суперпозиции функционально-инвариантных решений уравнения (178) получаются решения волнового уравнения в пространстве, которые обладают осевой симметрией. Основное значение для метода функционально-инвариантных решений имели следующие два факта: во-первых, рассматриваемый класс решений оказался достаточно широким и охватывал наиболее важные случаи точечных источников волн; во-вторых, поля отраженных и преломленных волн удастся представить через функции того же класса.

С помощью указанного метода удалось в простой форме решить задачу Лэмба и вообще динамические задачи для упругого полупространства при заданных напряжениях на его границе. Этим же методом Соболев решил задачу о дифракции плоской акустической волны с фронтом $t = ax + by$ на прямолинейном экране ($y = 0, x \geq 0$) и на угле. Главные результаты, полученные В. И. Смирновым, С. Л. Соболевым и Е. А. Нарышкиной до 1937 г., излагаются в известной книге Франка и Мизеса «Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики», в двенадцатой главе, написанной С. Л. Соболевым.

В указанную книгу не вошли результаты, полученные в работе Е. А. Нарышкиной, в которой решается динамическая задача о контакте упругого полупространства с жидким, и работе В. И. Смирнова о сингулярных решениях волнового уравнения и уравнений теории упругости. В конце сороковых годов М. И. Фридман, применяя метод функционально-инвариантных решений и сингулярные интегральные уравнения, решил задачу о дифракции плоской упругой волны на полубесконечной жестко заделанной щели. В. А. Свекло исследовал методом функционально-инвариантных решений задачу о колебаниях однородной анизотропной полуплоскости. Этот же метод применялся в пятидесятых годах Н. В. Зволинским и его сотрудниками к решению различных динамических задач теории упругости. В нескольких статьях под общим заглавием «Отраженные и головные волны, возникающие на плоской границе раздела двух упругих сред» Зволинский исследовал волновые поля, порожденные точечным источником, в двух упругих полупространствах с жестким контактом вдоль их границы. Из точных решений им были получены асимптотические формулы, описывающие волновые поля в прифронтных зонах. Эти



Е. А. Нарышкина.



Г. И. Петрашень.

исследования Зволинского получили развитие в статьях Г. С. Подъяпольского, который рассмотрел многослойную упругую среду, сосредоточив свое внимание на изучении волнового поля элементарных волн. В работах Л. М. Флитмана рассматриваются действия гладкого штампа на упругое полупространство и родственные задачи. Метод исследования отличен от метода предыдущих работ. Применяется одностороннее преобразование Лапласа по времени и двустороннее по пространственной координате, а далее используется метод Винера — Хопфа — Фока.

С методом функционально-инвариантных решений несколько связан метод В. А. Боровикова исследования задачи о дифракции плоской волны на многогранном угле и конусе. Используя решение задачи о дифракции, возникшей от точечного источника на угле, и конечную

скорость распространения волн, Боровиков исследовал задачу о дифракции произвольной акустической волны на многоугольнике. В том же порядке идей решается задача о дифракции произвольной волны на многограннике. Этим вопросам посвящена монография В. А. Боровикова «Дифракция на многоугольниках и многогранниках» (1966 г.).

Другой большой цикл работ по теории нестационарных волн начался с работ В. И. Смирнова, в которых рассматриваются по методу неполного разделения переменных смешанные задачи для круга и сферы в случае волнового уравнения и уравнений теории упругости. В случае, например, волнового уравнения и сферы решения искались в виде произведения сферической функции на функцию r и t , и нахождение этой последней функции приводилось к интегральному уравнению Вольтерра с ядром, зависящим от разности.

С начала сороковых годов появляется в печати серия работ Г. И. Петрашеня, посвященных колебаниям упругой сферы. В них вводится понятие о шаровом векторе — векторном аналоге сферической функции — и успешно используется при решении ряда конкретных задач. В работе Г. И. Петрашеня, Г. И. Марчука и К. И. Огурцова рассмотрена задача Лэмба для полупространства в плоском и трехмерном случаях. По пространственным переменным делается преобразование Фурье (Фурье — Бесселя в осесимметрическом случае), по времени — преобразование Лапласа. После этого задача сводится к одномерной и легко решается. С помощью метода перевала были получены выражения для вектора смещений в окрестности поверхностей разрыва (так называемых волновых фронтов). Развитыми в этой работе методами Г. И. Петрашень вместе со своими учениками

К. И. Огурцовым, А. С. Алексеевым и другими рассмотрел большое количество задач, в которых задача Лэмба обобщалась на случай линейно неоднородного пространства, касательного воздействия и т. д. Несколько позднее Г. И. Петрашень совместно с И. Н. Успенским и со своими сотрудниками Л. А. Молотковым и П. В. Крауклисом аналогичными методами исследовали распространение волн в упругих слоях с плоско-параллельными границами раздела. Ими же были изучены интерференционные явления, имеющие место в системах, содержащих тонкие слои. Г. И. Петрашень и Л. А. Молотков уделили также много внимания обоснованию инженерных уравнений тонких пластин, которое достигалось на основании анализа решений точных уравнений теории упругости для пластин.

Задачи, связанные с распространением нестационарных колебаний в средах со сферическими и цилиндрическими границами раздела, изучались в том же порядке идей Г. И. Петрашнем и группой его сотрудников — Г. И. Макаровым, Б. Я. Гельчинским, Н. С. Смирновым, В. С. Булдыревым, Л. А. Молотковым. В большинстве их работ исследовалось отражение, преломление и дифракция волн, возникающих от точечных источников.

С математической точки зрения решения таких задач — либо сами функции Грина соответствующих смешанных задач для гиперболических уравнений, либо легко выражаются через них. Для приложений большую роль играет изучение так называемых быстро меняющихся частей поля в окрестности волновых фронтов — поверхностей, где волновое поле имеет особенность. Это исследование представляет собою с математической точки зрения исследование аналитических свойств функции Грина в окрестности поверхностей, на которых аналитичность функции Грина нарушается. В задачах дифракции с цилиндрическими и сферическими границами раздела такое исследование проведено В. С. Булдыревым. Было получено обоснование лучевого метода (см. ниже) в рассматриваемом классе задач. В. С. Булдырев и Л. А. Молотков исследовали также в различных задачах аналитические свойства волнового поля в зоне тени. Ими было показано, что в тени функция Грина остается непрерывной вместе со всеми производными, тем не менее ее аналитический характер нарушается на так называемых фронтах соскальзывания. А. Г. Аленицын, соединив методы Г. И. Петрашнего с методами нахождения асимптотики решений обыкновенных дифференциальных уравнений, исследовал аналитический характер волнового поля в окрестности фронтов в тех случаях, когда решение задачи не выражается через известные специальные функции.

Поведение вектора смещения в окрестности волновых фронтов в большинстве случаев можно выяснить не решая в явном виде уравнений, описывающих волновые процессы. Существует детально разработанная процедура, называемая лучевым методом, позволяющая находить и волновые фронты, и аналитический характер волнового поля в их окрестности. Для случая установившихся колебаний мы говорили о лучевом методе выше.

Поясним основную идею лучевого метода на примере волнового уравнения для неоднородной среды, которое мы рассматривали в разделе IV:

$$\frac{1}{c^2(x, y, z)} u_{tt} - \Delta u = 0. \quad (180)$$

Пусть уравнение волнового фронта в момент времени t можно записать в виде

$$t = \tau(x, y, z).$$

Считаем, что в окрестности этой движущейся поверхности функция u представляется в виде

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x, y, z) f_k(t - \tau). \quad (181)$$

Функции $f_k(v)$ имеют особенность только при $v = 0$ и представляют собой последовательные интегралы

$$f_1(v) = \int f_0(v) dv, \quad f_2(v) = \int f_1(v) dv \text{ и т. д.}$$

В случае особенностей «обычного» вида чем больше номер функции k , тем она более гладкая. Таким образом, при достаточно «хорошем» типе сходимости ряда (181) аналитический характер u при $t - \tau \sim 0$ определяется слагаемым $u_0 f_0(t - \tau)$. Подставляя ряд (181) в уравнение (180), получим для $\tau(x, y, z)$ уравнение эйконала (ср. § 2):

$$(\text{grad } \tau)^2 = \frac{1}{c^2(x, y, z)}, \quad (182)$$

которое является уравнением характеристик уравнения (180), а характеристики уравнения (182) (лучи) суть экстремали функционала (172). Для функции u_0 получаем дифференциальное уравнение вдоль лучей (см. § 2)

$$\frac{2}{c^2} \cdot \frac{du_0}{ds} + u_0 \Delta \tau = 0.$$

Разработаны приемы нахождения начальных данных для него, и в некотором смысле оно явно решено: В. М. Бабичем и А. Ф. Филипповым проведены аналогичные построения для случая неоднородной изотропной упругой среды. Группой ленинградских математиков лучевым методом получено решение ряда задач теории упругости. А. С. Алексеев и Б. Я. Гельчинский рассматривали задачу о головных волнах. В. М. Бабич распространил формулы лучевого метода и на случай анизотропной среды и исследовал задачу о каустиках. В. М. Бабичем и Н. Я. Русаковой нестационарный вариант лучевого метода перенесен на случай волн Рэлея.

Несмотря на то что формальная сторона лучевого метода разработана достаточно детально, строго математически он не обоснован (математически — это задача об исследовании особенности задачи Коши с разрывными начальными данными). Это можно сделать или в том случае, когда известно точное решение, или при отсутствии границ (в неоднородной среде). Если же есть отражающие и преломляющие границы, но поле лучей при $t \leq t_0$ сохраняет регулярность, то лучевой

метод также может быть оправдан при $t \leq t_0$. Кроме этих случаев известна смешанная задача, в которой исследование особенностей проведено до конца. Это задача о точечном источнике колебаний, помещенном внутри выпуклой области с достаточно гладкой границей — задача, рассмотренная А. Я. Повзнером и И. В. Сухаревским.

С. Л. Соболевым было доказано, что волновое уравнение на плоскости не имеет никаких функционально-инвариантных решений кроме указанных выше. Это утверждение уже не будет верным для пространств с большим числом измерений. Для случая волнового уравнения в трехмерном пространстве вопрос был до конца исследован Н. П. Еругиным, а для случая четырех пространственных координат — М. М. Смирновым. Смирнов исследовал функционально-инвариантные решения гипербола-параболических уравнений. Функционально-инвариантным решениям в различных аспектах посвящены также работы Л. М. Галонен. Линейные уравнения эллиптического типа с переменными коэффициентами (главная часть — оператор Лапласа) исследовались в этом направлении В. И. Смирновым и Б. В. Русановым.

4

Движение вязкой несжимаемой жидкости

Настоящий параграф посвящен работам, где рассматривается решение различных задач для уравнений Навье — Стокса, определяющих движение вязкой несжимаемой жидкости, при задании условий несжимаемости, предельных условий на границе S области D и начальных условий:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\vec{v} &= \vec{v}_t - \nu \Delta \vec{v} + v_k \vec{v}_{x_k} = -\text{grad } p + \vec{f}, \\ \text{div } \vec{v} &= 0, \quad \vec{v}|_S = \vec{a}, \quad \vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_0(x). \end{aligned} \quad (183)$$

Если область D содержит бесконечно далекую точку, то присоединяется еще условие на бесконечности, которое обычно сводится к заданию вектора скорости $\vec{v} = \vec{v}_\infty$. Неизвестными в этой задаче являются вектор скорости $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ и давление p , которые предполагаются зависящими от $x(x_1, x_2, x_3)$ и t (в плоском случае от x_1, x_2 и t). В граничном условии задачи (183) обычно считают $\vec{a} = 0$ (условие прилипания).

В стационарном случае все функции считаются независимыми от t , а для $\vec{v}$ и p граничная задача определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\vec{v} &= -\nu \Delta \vec{v} + v_k \vec{v}_{x_k} = -\text{grad } p + \vec{f}, \\ \text{div } \vec{v} &= 0, \quad \vec{v}|_S = \vec{a}(x). \end{aligned} \quad (184)$$

Линеаризованные задачи (183) и (184) получаются отбрасыванием в основном уравнении нелинейных членов $v_k \vec{v}_{x_k}$ (линеаризация по Стоксу). В дальнейшем будет упомянут и другой способ линеаризации по Озейну.

Строго математическое исследование указанных задач началось в конце 20-х — начале 30-х годов в работах Лихтенштейна, Одквиста и Лерэ, а в Советском Союзе — в 50-х годах.

Начнем с общей задачи (183). О. А. Ладыженская доказала однозначную разрешимость этой задачи «в целом», т. е. при всех t в плоском и осесимметрическом случаях (ось симметрии не принадлежит области, заполненной жидкостью) при предположениях лишь некоторой гладкости о данных задачи. Это же сделано ею для задачи Коши в осесимметрическом случае. Решение определяется интегральным тождеством, и классические решения входят в этот класс обобщенных решений. Для общего трехмерного случая однозначная разрешимость при всех t доказана в совместной работе О. А. Ладыженской и А. А. Киселева, если вектор внешней силы $\vec{f}$ потенциален и некоторое «обобщенное число Рейнольдса» меньше единицы в начальный момент времени. Без указанных предположений однозначная разрешимость доказана ими на конечном промежутке $(0, T)$ вблизи гладких начальных данных, причем T оценивается снизу через данные задачи. Ладыженская исследовала также вопросы гладкости полученных ею обобщенных решений и описала классы единственности для общей трехмерной задачи. П. Е. Соболевский дал другое доказательство указанных выше результатов по обобщенным решениям, касающихся плоской и трехмерной задач на основе своих результатов и результатов М. А. Красносельского,

С. Г. Крейна по задаче Коши для абстрактных уравнений $\frac{dx}{dt} + Ax = f(x, t)$ (см. раздел I). Решение этой задачи Коши и считается решением соответствующей задачи (183). Функциональные пространства, в которых находятся решения задачи, в работе П. Е. Соболевского отличны от пространств работы О. А. Ладыженской и А. А. Киселева.

В. И. Юдович установил наличие периодических решений системы у задачи (183) без начального условия при $\vec{a} = 0$, если $\vec{f}(x, t)$ периодическая. О. А. Ладыженская и К. К. Головкин доказали для общей трехмерной задачи, что любое «слабое» решение Хопфа имеет все производные, входящие в систему задачи (183), суммируемые по Q_T со степенью $5/4$, причем это решение удовлетворяет уравнению системы почти везде. Ладыженская доказала во всех рассмотренных ею случаях непрерывную зависимость решений задачи (183), в определенных нормах, от $\vec{f}$ и $\vec{v}_0(x)$ при $\vec{a} = 0$. Она установила также, что решение задачи (183) при $\vec{a} = 0$ и $\vec{f} = \vec{f}(x)$ стремится при $t \rightarrow \infty$ к решению стационарной задачи (184) с тем же $\vec{f}(x)$, если обобщенное число Рейнольдса задачи (184) меньше единицы. Это будет иметь место при любом начальном данном в задаче (183). К. К. Головкин, А. И. Крылов и Н. Н. Брушлинская исследовали вопросы неустойчивости решений систем уравнений задачи (183) при больших числах Рейнольдса. В работе А. Кржиwickого и О. А. Ладыженской построена сходящаяся разностная схема для общей нестационарной задачи (183).

Задача (184) исследовалась для ограниченных и неограниченных областей О. А. Ладыженской, которая доказала разрешимость этой задачи при любых числах Рейнольдса, если общий поток через каждую ограничивающую $\mathfrak{D}$ поверхность равен нулю (задача обтекания). Границы обтекаемых тел, а также $\vec{a}$ и f могут быть и негладкими. Ладыженская отметила также, что разрешимость задачи (184) при гладких данных можно получить, опираясь на результаты 30-х годов Лерэ по априорным оценкам для задачи (184), на ряд неравенств типа теорем вложения и теорему Лерэ — Шаудера о неподвижных точках вполне непрерывных преобразований. Исследованиями задачи (184) как в нелинейном, так и в линеаризованном случае занимались также И. И. Ворович и В. И. Юдович. Ими доказана сходимость метода Галеркина.

Для решений линеаризованной задачи (183) (линеаризация может быть любая) В. А. Солонников получил предельно точные оценки в пространствах $W_p^{l,l/2}(Q_T)$, $p > 1$, и $C^{l,l/2}(\bar{Q}_T)$. К. К. Головкин и В. А. Солонников построили теорию нестационарных гидродинамических потенциалов, с их помощью дали представление для решений линеаризованной задачи (183), исследовали разрешимость системы интегральных уравнений для плотностей этих потенциалов и исследовали дифференциальные свойства решений линейной и нелинейной задачи (183).

Для решений линеаризованной задачи (184) В. А. Солонников получил предельно точные оценки в пространствах $W_p^{(l)}(\mathfrak{D})$, $p > 1$, $l \geq 2$, и $C^{2+\alpha}(\bar{\mathfrak{D}})$, $\alpha > 0$. О. И. Панич провел метод гидродинамических потенциалов для задачи (184), линеаризованной по Озейну. При линеаризации по Стоксу этот метод был исследован в начале 30-х годов Лихтенштейном и Одквистом, а в начале 50-х годов — С. Г. Крейном с точки зрения теории самосопряженных расширений полуограниченных операторов по Фридрихсу.

Основные из перечисленных выше результатов нашли отражение в книге О. А. Ладыженской «Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости» (1961 г.).

О. А. Ладыженская и В. А. Солонников исследовали разрешимость различных граничных задач (стационарных и нестационарных) магнитной гидродинамики.

Отметим в заключение некоторые недавно полученные результаты. О. А. Ладыженская предложила для описания движений вязких несжимаемых жидкостей уравнения, которые мало отличаются от уравнений Навье — Стокса при ограниченных градиентах $|\vec{v}_x|$ вектора скорости $\vec{v}$, но ведут себя иначе при $|\vec{v}_x| \rightarrow \infty$.

В общем случае они имеют вид

$$v_{ii} - \frac{\partial}{\partial x_h} T_{ik}(v_{jl}) + v_h v_{ih} = -q_{xi} + f_i, \quad (185)$$

$$i = 1, 2, 3,$$

где $v_{ik} = v_{ix_k} + v_{kx_i}$, $q = p - \frac{\vec{v}^2}{2}$, а тензор напряжений обладает следующими свойствами:

1) $T_{ik} = T_{ki}$; $T_{ik}(v_{jl})$ — суть непрерывные функции v_{jl} , $j, l = 1, 2, 3$,

$$|T_{ik}(v_{jl})| \leq c(1 + |\hat{v}|^{2\mu})|\hat{v}|, \quad |\hat{v}| = \left(\sum_{i,k=1}^3 v_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

2) $T_{ik}(v_{jl})v_{ik} \geq |\hat{v}|^2(v_1 + \varepsilon|\hat{v}|^{2\mu})$, $v_1, \varepsilon > 0$;

3) для произвольных гладких соленоидальных векторов $\vec{v}'$ и $\vec{v}''$, совпадающих на границе $\mathfrak{D}$,

$$\int_{\mathfrak{D}} [T_{ik}(v'_{jl}) - T_{ik}(v''_{jl})](v'_{ik} - v''_{ik}) dx \geq v_2 \int_{\mathfrak{D}} \sum_{i,k=1}^3 (v'_{ik} - v''_{ik})^2 dx, \quad v_2 > 0.$$

Частным случаем таких T_{ik} является

$$T_{ik}(v_{jl}) = (v_1 + \varepsilon|\hat{v}|^2)v_{ik} \quad (\text{для него } \mu = 1).$$

Для последнего «коэффициентом вязкости» служит величина $v_1 + \varepsilon|\hat{v}|^2$. Вид тензора $T_{ik}(v_{jl})$ зависит от исследуемой среды. Ладыженская сформулировала положения об определении вида $T_{ik}(v_{jl})$, исходя из модели соударений частиц, лежащей в основе вывода статистических уравнений Максвелла — Больцмана. Ею доказана для систем (185) однозначная разрешимость «в целом» и устойчивость на любом конечном интервале времени начально-краевой задачи и разрешимости «в целом» стационарных задач (причем не только задач обтекания), если только в условиях (1) — (3) $\mu \geq \frac{1}{4}$. Такие же результаты получены ею и для систем

$$\vec{v}_t - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(v_1 + \varepsilon \int_{\mathfrak{D}} \vec{v}_y^2(y, t) dy \right) \vec{v}_{x_k} \right] + v_k \vec{v}_{x_k} = -\text{grad } p + \vec{f}, \quad v_1, \varepsilon > 0, \quad (186)$$

и

$$\vec{v}_t + \text{rot}[(v_1 + \varepsilon|\text{rot } \vec{v}|^2)\text{rot } \vec{v}] + v_k \vec{v}_{x_k} = -\text{grad } p + \vec{f}. \quad (187)$$

Система (187) была предложена для описания вязких жидкостей независимо от Ладыженской К. К. Головкиным. Им доказана для нее однозначная разрешимость «в целом» начально-краевой задачи.

Переходим к работам О. А. Олейник, касающимся математического исследования теории пограничного слоя. В 1904 г. Л. Прандтль, рассматривая задачу обтекания тела потоком вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса и предполагая, что существует решение этой задачи с более или менее естественными свойствами, получил систему уравнений пограничного слоя, описывающих движение жидкости в весьма тонком слое вблизи части поверхности обтекаемого

тела, обращенной к набегающему потоку. Эта система для случая плоского движения имеет вид

$$u_t + uu_x + vu_y = -p_x + \nu u_{yy}; \quad u_x + u_y = 0. \quad (188)$$

Здесь t — время; x — длина дуги обтекаемого профиля, отсчитываемая от некоторой начальной точки; y — расстояние по нормали от профиля до данной точки; u, v — составляющие вектора скорости в криволинейной системе координат (x, y) ; давление $p(t, x)$ считается известной функцией и связано со скоростью (на обтекаемом профиле) внешнего потенциального потока $U(t, x)$ законом Бернулли

$$-p_x = U_t + UU_x.$$

Для системы (188) принято ставить следующие условия:

- 1) $v|_{y=0} = v_0(t, x)$; 2) $u|_{x=0} = u_1(t, y)$, $u|_{y=0} = 0$,
3) $u|_{y=\infty} = U(t, x)$; 4) $u|_{t=0} = u_0(x, y)$.

Здесь v_0, u_1, u_0 — заданные функции. Условия 1) характеризуют некоторый вдув (или отсос) жидкости через обтекаемый профиль (при $v_0 = 0$ — прилипание жидкости). Условие 3) обеспечивает непрерывность скорости жидкости при переходе из пограничного слоя во внешний потенциальный поток.

Из физических соображений можно ожидать, что решение будет существовать, вообще говоря, лишь при ограниченных значениях x : $0 \leq x \leq x_0$, после чего наступает отрыв пограничного слоя.

Этой задачей занимались как с точки зрения построения различных частных и приближенных решений, так и по линии общего математического изучения системы (188). Мизесом, например, эта задача в стационарном случае была сведена к начально-краевой задаче:

$$\omega_x + v_0(x) \omega_\psi = \nu \sqrt{\omega} \omega_{\psi\psi} - 2 \frac{dp(x)}{dx},$$

$$\omega|_{x=0} = \omega_0(x), \quad \omega|_{\psi=0} = 0, \quad \omega|_{\psi=\infty} = u^2(x) \quad (189)$$

для одного параболического уравнения с одной неизвестной функцией ω . Крокко свел общую задачу (188) с условиями 1)–4) также к определению одной функции ω из уравнения

$$\omega_\tau + \eta \omega_\xi - p_x \omega_\eta - \nu \omega^2 \omega_{\eta\eta} = 0, \quad (190)$$

начального условия при $\tau = 0$, граничных значений ω при $\xi = 0$ и $\eta = U(\tau, \xi)$ и граничного условия

$$\nu \omega \omega_\eta - v_0 \omega - p_x|_{\eta=0} = 0.$$

Немецкие математики Никель и Вельте доказали для этих задач теоремы единственности. В направлении их разрешимости наиболее полные к настоящему времени результаты получены в ряде работ О. А. Олейник, которая использовала только что описанные сведения задач для (185) к определению одной функции ω . Для стационарного случая Олейник доказала однозначную разрешимость задачи для случая достаточно малого интервала изменения $x \in [0, A]$. Ею указаны

случаи, когда разрешимость имеет место при любом A . Аналогичный результат получен ею и для нестационарной задачи. В следующей работе рассматривается установление стационарного течения в пограничном слое в результате развития такого нестационарного течения, при котором данные задачи стабилизируются при $t \rightarrow \infty$. При некоторых предположениях о характере стабилизации данных задачи доказывается установление стационарного режима.

В двух последних работах (1967 г.) О. А. Олейник рассматриваются вопросы сходимости численных методов интегрирования уравнений пограничного слоя. В одной из них предлагаются две конечно-разностные схемы, пригодные для решения задачи (188), 1) — 4), причем одна из них (неявная) обеспечивает сходимость процесса при любых соотношениях шагов по временной и пространственным координатам. В другой работе доказывается сходимость известного метода прямых не только в плоском случае, но и для трехмерного осесимметричного пограничного слоя. В осесимметричном случае, как известно, задача приводится к уравнению вида

$$v\omega^2\omega_{\eta\eta} - \omega_{\tau} - \eta U\omega_{\xi} + A\omega_{\eta} + B\omega = 0$$

с условиями при $\tau = 0$, $\eta = 0$ и $\eta = 1$. Используется метод прямых и получается система обыкновенных дифференциальных уравнений по η , а к переменным τ и ξ применяется конечно-разностная схема.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Как известно, в вариационном исчислении рассматриваются различные методы нахождения наибольших и наименьших значений функционалов, т. е. переменных величин, значения которых определяются выбором одной или нескольких функций, одной или нескольких переменных. Точнее $V[y(x)]$ называется функционалом, если каждой функции (или вектор-функции) $y(x)$ из некоторого множества функций (на которых задан этот функционал) поставлено в соответствие некоторое число $V[y(x)]$. Примерами функционалов могут служить: длина дуги кривой, соединяющей две заданные точки, площадь некоторой поверхности, натянутой на заданный контур, интегралы

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx, \quad \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x)) dx,$$

$$\iint_D F\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy,$$

где F — заданные функции, а выбор функции $y(x)$ или функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$, или функции $z(x, y)$ определяет значение этих интегралов.

Можно считать, что вариационное исчисление начало развиваться с 1696 г., когда в журнале «Acta eruditorum» И. Бернулли опубликовал вариационную задачу, получившую в дальнейшем название задачи о брахистохроне: среди всех кривых, соединяющих две заданные точки A и B , не лежащие на одной вертикальной прямой, найти ту кривую, по которой материальная точка под влиянием силы тяжести (без учета трения) скатится из точки A в точку B в кратчайшее время. Оказалось, что искомой кривой — брахистохроной — является циклоида.

После фундаментальных исследований Эйлера вариационное исчисление оформилось в самостоятельную математическую дисциплину с собственными, своеобразными методами исследования. Большой вклад

в развитие этой области математики был сделан также Лагранжем, разработавшим основной метод классического вариационного исчисления — метод вариаций. Этот метод заключается в том, что вводится понятие вариации функционала, аналогичное понятию дифференциала функции, указываются методы вычисления вариаций и доказывается, что на кривой, на которой достигается экстремум функционала, вариация обращается в нуль. Применяя, например, метод вариаций к функционалу

$$V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx,$$

получим дифференциальное уравнение

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0.$$

Этому уравнению должна удовлетворять функция $y(x)$, на которой может достигаться экстремум рассматриваемого функционала. Полученное уравнение называется уравнением Эйлера, а его решения — экстремалими.

Необходимые условия экстремума для более сложных вариационных задач были получены Эйлером, Лагранжем, Пуассоном, М. В. Остроградским, Гауссом. Достаточные условия в простейшей вариационной задаче были указаны Лежандром, но они содержали неточность, исправленную Якоби. С иной более общей точки зрения достаточные условия изучались Вейерштрассом и Гильбертом. К началу XX в. были исследованы также основные задачи на условный экстремум, некоторые вариационные задачи в классе кусочно-гладких функций, многие механические и физические задачи, сформулированы основные вариационные принципы механики и физики. Совокупность упомянутых выше результатов, дополненная более поздними исследованиями Больца, Мейера, Кнезера, Клебша, Блисса и многих других математиков, образует ту часть вариационного исчисления, которую обычно называют классическим вариационным исчислением.

1

Классические методы и идеи

Классические методы вариационного исчисления развивались в СССР в основном по двум направлениям: а) изучения разрывных решений, б) изучения многомерных вариационных задач и связанных с ними краевых задач.

В области изучения разрывных решений прежде всего следует отметить работы (1922—1925 гг.) А. М. Размадзе, который рассматривал кусочно-гладкие и кусочно-непрерывные решения вариационных задач. Им получены необходимые условия экстремума в точках разрыва и указана совокупность достаточных условий. В том же направлении вели исследования Г. Н. Николадзе (1923 г.) и К. С. Ермилин (1941 г.). Построенная более 40 лет тому назад Размадзе теория разрывных реше-

ний не только не потеряла своего значения до настоящего времени, но стала даже более актуальной, так как в очень многих практических задачах оптимального регулирования экстремум достигается на разрывных решениях. В работах М. К. Керимова рассматриваются условия Якоби для кусочно-гладких решений вариационных задач с подвижными границами (1951—1952 гг.).

В теории многомерных вариационных задач в течение длительного времени не было значительного прогресса. Еще Эйлер получил уравнение экстремальных поверхностей в вариационной задаче для двойного интеграла, распространенного на прямоугольную область интегрирования, а М. В. Остроградский существенно обобщил (1834 г.) эти результаты на более сложные области и многомерные интегралы, причем он рассматривал и задачи с подвижными границами.

Вскоре были получены еще некоторые необходимые условия экстремума в многомерных задачах с неподвижной и подвижной границами, но до создания полной теории необходимых и достаточных условий существования экстремума было еще далеко. Более того, не осознавалась еще даже необходимость доказательства существования решения вариационных задач. Лишь критика Вейерштрассом принципа Дирихле, попытки обоснования этого принципа Риманом и, наконец, обоснование его в работах Гильберта и Лебега привели к отчетливому пониманию необходимости доказательства существования решения вариационных задач и выяснения дифференциальных свойств этих решений, если они существуют.

Гильберт в качестве одной из важнейших проблем предложил доказать, что регулярные вариационные задачи имеют решение в некотором определенном классе функций. Регулярность для функционала

$$\iint_D F(x, y, z, p, q) dx dy, \quad (1)$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

понималась Гильбертом в смысле выполнения условия

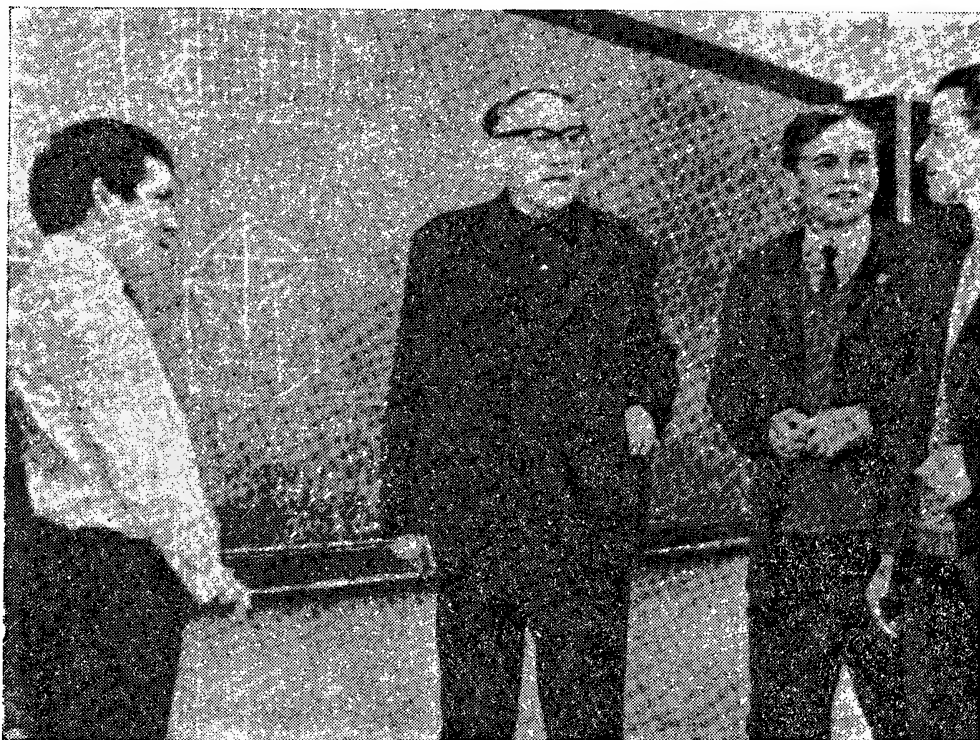
$$F_{pp}F_{qq} - F_{pq}^2 > 0.$$

Весьма значительных успехов в решении этой проблемы добился

С. Н. Бернштейн (1928 г.), доказав, что при $\alpha \leq 2$, $F \geq c(p^2 + q^2)^{\frac{\alpha}{2}}$, где α и c — положительные постоянные, функционал (1) может не иметь минимума в классе дважды дифференцируемых функций, а при $\alpha > 2$ указав условия существования абсолютного минимума в классе аналитических функций. Еще более детально он исследовал случай функционала

$$\iint_D F(p, q) dx dy.$$

Работы иностранных ученых Хаара, Морри, Тонелли, Куранта, Макштейна, Радо, Чезари, Дугласа и других, рассматривавших



Обсуждение доклада на заседании научного семинара акад. М. А. Лаврентьева.

как задачу о минимуме функционала (1), так и аналогичную задачу в параметрической форме, существенно продвинули решение проблемы Гильберта.

В нашей стране, кроме С. Н. Бернштейна, вопросами, связанными с решением проблемы Гильберта, занимались в 20-х годах М. А. Лаврентьев и Н. Н. Боголюбов.

Исследования (1926 г.) М. А. Лаврентьева тесно примыкают к работам итальянского математика Тонелли, который расширил результаты Гильберта и, пользуясь интегралом Лебега, построил теорию абсолютного экстремума вариационных задач в обыкновенной форме

$$V[y(x)] = \int_x^{x_1} F(x, y, y') dx, \quad (2)$$

принимая за класс допустимых линий множество абсолютно непрерывных функций. М. А. Лаврентьев показал невозможность распространить теорию Тонелли, если за класс допустимых линий принять множество функций с ограниченным изменением. Он выяснил природу компактности и замкнутости некоторых классов непрерывных функций и установил для этих классов аналог теоремы Пеано: строится непрерывная функция $\Phi(x, \alpha)$, такая, что функция $x, \Phi(x)$ при изменении параметра $\alpha, |\alpha| < 1$ заполняет область функционального пространства, состоящую из всех функций данного класса. Последний результат позволил Лаврентьеву дать новый подход к доказательству существо-

вания абсолютного экстремума. М. А. Лаврентьев указал достаточное условие для того, чтобы точная нижняя грань множества значений интеграла

$$\int_0^1 F(x, y, y') dx$$

для абсолютно непрерывных функций совпадала с точной нижней гранью множества значений того же интеграла для гладких функций. Таким условием оказалась ограниченность производной $\frac{\partial F}{\partial y}$.

Н. Н. Боголюбов решил (1930 г.) проблему разыскания абсолютного минимума интеграла (2), когда за класс допустимых линий принимается множество абсолютно непрерывных функций. Он показал, что абсолютный минимум интеграла (2) существует тогда и только тогда, когда среди класса допустимых линий существует кривая, которая доставляет абсолютный минимум интегралу (2) и которая не содержит никакой псевдодуги меры большей нуля, принадлежащей особой линии¹.

Наиболее полное решение проблемы Гильберта в двумерном случае было дано лишь в работах А. Г. Сигалова (1948—1957 гг.). В этих работах для параметрической задачи было доказано существование непрерывного решения в весьма широких предположениях (допускались поверхности различных топологических типов, граничное условие задавалось конечной системой замкнутых кривых). В непараметрической задаче (1) Сигалов детально изучил случай $\alpha < 2$ и наиболее сложный случай $\alpha = 2$. Для строго регулярных задач были указаны достаточные условия существования дважды дифференцируемых решений. Некоторые результаты Сигалова были обобщены Г. И. Шиловой на n -мерный случай (1960 г.).

К тому же кругу вопросов относятся также работы В. И. Плотникова, Ю. В. Глебского и В. И. Казиминова. В цикле работ О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой, подытоженных в их монографии «Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа» (1964 г.), рассматриваются вариационные задачи в n -мерном случае. В них доказано существование классических и обобщенных решений широкого класса вариационных задач. Большинство упомянутых выше результатов были получены прямыми методами, т. е. методами, в которых фактически строилась минимизирующая последовательность функций, сходящаяся в некотором пространстве к решению вариационной задачи, или лишь доказывалось существование такой последовательности.

¹ Под псевдодугой понимается некоторое множество, принадлежащее кривой из класса допустимых линий. Данная кривая является особой, если вдоль нее имеем $F''_{y'y'} = 0$.



А. Г. Сигалов.

2

Прямые методы в вариационных задачах

В своих первых работах по вариационному исчислению Эйлер применял метод, называемый теперь конечно-разностным прямым методом. При применении этого метода к функционалу

$$V[y(x)] = \int_{x_0}^a F(x, y(x), y'(x)) dx,$$
$$y(x_0) = y_0, \quad y(a) = b$$

последний рассматривается в начале лишь на ломаных с некоторым числом n прямолинейных звеньев. Если абсциссы x_k угловых точек известны (обычно это точки вида $x_0 + kh$, $k = 1, 2, \dots, (n-1)$, где h — шаг сетки), то функционал превращается в функцию $\Phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ ординат угловых точек. Эта функция Φ исследуется на экстремум (при этом обычно предварительно интеграл приближенно заменяется интегральной суммой) и предельным переходом при $n \rightarrow \infty$ получается решение вариационной задачи.

После опубликования работ Эйлера этот довольно громоздкий метод долгое время не применялся и лишь в работах И. Г. Петровского и Л. А. Люстерника он опять с большим успехом был применен к более сложным функционалам.

Ритц предложил другой прямой метод, который применяется к функционалу

$$V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

таким образом, что выбирается некоторая так называемая координатная последовательность функций

$$w_1(x), \quad w_2(x), \quad \dots, \quad w_n(x), \quad \dots$$

и функционал V рассматривается не на произвольных допустимых кривых данной вариационной задачи, а лишь на всевозможных линейных комбинациях с постоянными коэффициентами n первых функций координатной последовательности

$$y_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k w_k(x).$$

На этих линейных комбинациях функционал V превращается в некоторую функцию коэффициентов α_k ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$V[y_n] = \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ выбираются так, чтобы функция Φ достигала экстремума (т. е. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ определяются из системы уравнений $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$). Затем предельным переходом при $n \rightarrow \infty$ иногда удается получить точное решение вариационной задачи.

Метод Ритца и различные его модификации до настоящего времени с успехом применяются для точного и особенно для приближенного решения самых разнообразных вариационных задач.

В теории метода Ритца, как впрочем и в теории других прямых методов, возникают два основных вопроса:

1) как оценить погрешность метода, если ограничиться вычислением y_n при произвольном выборе координатных функций или хотя бы для наиболее употребительных последовательностей координатных функций;

2) доказать сходимость приближений y_n к точному решению вариационной задачи в некотором функциональном пространстве.

Большой вклад в теорию метода Ритца был внесен трудами Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова (1930—1933 гг.), которые для различных функционалов и различных систем координатных функций дали весьма точные оценки погрешности метода и тем самым в значительной мере ответили на первый из поставленных выше вопросов. Второму вопросу были посвящены работы Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова, М. В. Келдыша (1942 г.), С. Г. Михлина (1950 г.), М. А. Красносельского (1956 г.). Этим авторам удалось указать весьма широкие условия сходимости метода Ритца (рассматривались и другие прямые методы) к точному решению.

Несколько иной прямой метод был разработан в трудах Л. В. Канторовича (1941—1942 гг.). Этим методом, применяемом в многомерном случае, приближенное решение ищется, как и методом Ритца, в виде

$$z_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k w_k(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

но в отличие от метода Ритца α_k здесь не постоянные, а являются функциями одной из переменных, например x_m , $\alpha_k = \alpha_k(x_m)$. При этом рассматриваемый функционал $V(z)$ на функциях вида z_n становится функционалом, зависящим от функций $\alpha_k(x_m)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) одной переменной:

$$V[z_n] = V_1[\alpha_1(x_m), \dots, \alpha_n(x_m)],$$

который и исследуется на экстремум обычными методами. Упрощение заключается в том, что взамен решения краевой задачи для уравнения в частных производных для определения $\alpha_k(x_m)$ приходится интегрировать систему обыкновенных уравнений. Этот метод обычно применяется лишь как приближенный метод решения вариационных задач.

Прямые методы с успехом применяются и для доказательства существования решения различных вариационных задач. При этом уже нет необходимости фактически строить минимизирующую последовательность, а достаточно доказать ее существование и существование допустимой предельной функции (или вектор-функции), дающей решение рассматриваемой вариационной задачи.

3

Качественные методы

Одним из основных вопросов при изучении некоторой вариационной задачи является вопрос о числе ее решений. В решении этой проблемы, которой занимались многие известные математики, большие сдвиги произошли в 1924—1930 гг., когда Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман, а также М. Морс (США) разработали топологические методы оценки числа решений различных экстремальных задач.

Вначале рассматривались экстремальные задачи для функций конечного числа переменных, а затем разработанные методы были перенесены и на функциональный случай. Рассматривались дважды непрерывно дифференцируемые функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданные на дифференцируемом многообразии M^n . Минимальное число критических точек функции f (т. е. точек, в которых $df = 0$) определяется топологическим свойством многообразия M^n . Например, на сфере легко задать функцию, имеющую лишь две критические точки — точку минимума и точку максимума, но на торе или на проективной плоскости любая дважды непрерывно дифференцируемая функция имеет не менее трех критических точек. В работах Морса (1925—1930 гг.) оценивалось число невырожденных критических точек, т. е. точек, в которых определитель $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|$ отличен от нуля. Если же точки были вырожденными, то им приписывалась некоторая кратность. Тем самым оценивалось не число геометрически различных критических точек, а сумма их кратностей — число аналитически различных критических точек. Оказалось, что число аналитически различных критических точек не меньше суммы чисел Бетти mod 2 многообразия M^n .

Были даны также оценки числа точек различных типов, причем критической точкой типа k называлась точка, в которой приведенная к каноническому виду квадратичная форма

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j$$

имеет k отрицательных членов. Оказалось, что числа Бетти mod 2, p^k и числа m^k , где m^k — число невырожденных точек типа k , связаны неравенствами

$$\begin{aligned} m^0 &\geq p^0, \\ m^1 - m^0 &\leq p^1 - p^0, \\ m^2 - m^1 + m^0 &\geq p^2 - p^1 + p^0, \\ &\vdots \\ \sum_{i=0}^n (-1)^i m^i &\geq \sum_{i=0}^n (-1)^i p^i. \end{aligned}$$

В дальнейшем Морс перенес эти результаты на функциональный случай и получил оценки числа аналитически различных решений многих вариационных задач.

В СССР работа велась в основном в направлении оценки числа геометрически различных критических точек и геометрически различных решений вариационных задач. Первые и основополагающие результаты были получены Л. А. Люстерником и Л. Г. Шнирельманом (1924—1928 гг.). С помощью введенного ими топологического инварианта категории² они оценили снизу число геометрически различных критических точек. Оказалось, что категория многообразия M^n относительно M^n не меньше числа геометрически различных критических точек любой дважды непрерывно дифференцируемой на M^n функции, причем если число различных значений принимаемых функцией в критических точках меньше категории, то, по крайней мере, одному из этих значений соответствует континуум P критических точек.

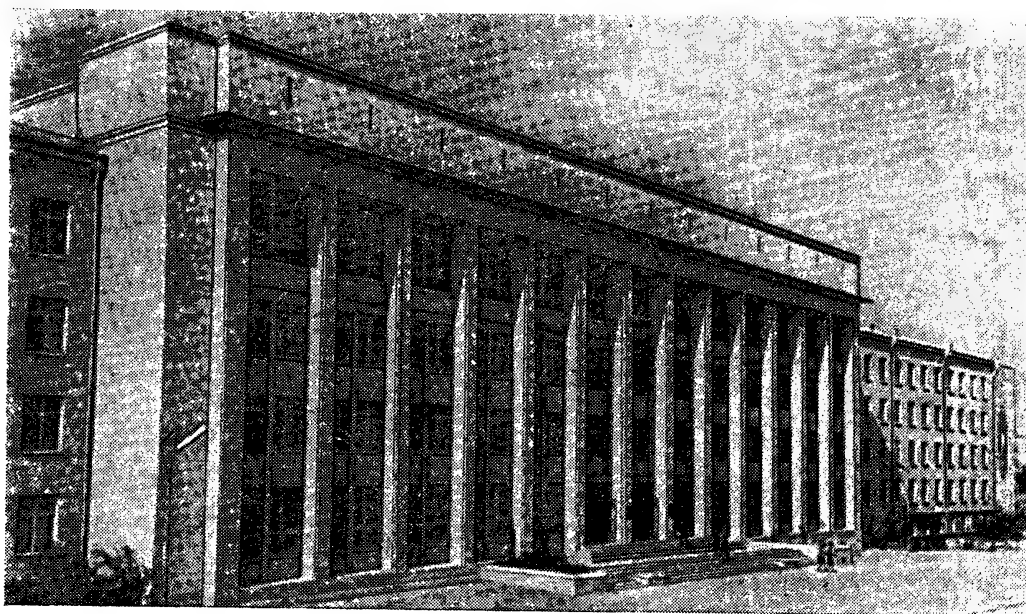
Были также доказаны различные свойства категории, указана оценка категории упомянутого выше континуума P , введены топологические инварианты — комбинаторная категория и ранг, оценивающие снизу категорию, а также вычислена категория многих пространств. Оказалось, например, что категории n -мерного тора и n -мерного проективного пространства равны $n + 1$ и, следовательно, любая заданная на этих пространствах дважды непрерывно дифференцируемая функция имеет не меньше $n + 1$ геометрически различных критических точек.

Перенеся эти результаты на функциональный случай Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман получили возможность оценивать число решений различных вариационных задач. В частности, ими была решена известная проблема о трех геодезических линиях. Они доказали, что на всякой трижды дифференцируемой, топологически эквивалентной сфере поверхности S^2 существуют, по крайней мере, три замкнутые самонепересекающиеся геодезические линии различной длины, совпадение длин которых возможно лишь при появлении континуума геодезических линий той же длины. Например, на эллипсоиде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

при различных a , b и c замкнутыми геодезическими различной длины будут сечения эллипсоида координатными плоскостями. Если $a = b \neq c$, то появляется континуум геодезических равной длины (сечения эллипсоида плоскостями, проходящими через ось OZ), причем через каждую точку эллипсоида проходит, по крайней мере, одна геодезическая линия. В этом случае говорят, что семейство покрывает рассматриваемую поверхность. Если же $a = b = c$, то эллипсоид превращается в сферу, на которой каждая окружность большого круга является замкнутой геодезической. Это семейство геодезических линий равной длины

² Категорией замкнутого множества A относительно содержащего это множество пространства M называется наименьшее число замкнутых множеств из M , сумма которых содержит A , причем каждое из этих множеств стягивается в точку с помощью непрерывной деформации в M .



Азербайджанский государственный университет им. С. М. Кирова.

дважды покрывает сферу, т. е. через любые две точки сферы проходит, по крайней мере, одна замкнутая геодезическая.

В процессе решения проблемы трех геодезических Л. А. Люстерник ввел понятие базиса гомотопий некоторого множества линий на данном многообразии M^n , т. е. таких простейших семейств линий, к которым непрерывной деформацией в M^n можно свести все рассматриваемое множество линий. Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман вычисляли базисы гомотопий множеств самонепересекающихся замкнутых линий на всех двумерных двусторонних поверхностях, и в частности на сфере. Оказалось, что базисом гомотопии самонепересекающихся замкнутых кривых ограниченной длины на сфере является семейство окружностей.

В 1935—1941 гг. идеи Л. А. Люстерника и Л. Г. Шнирельмана получили развитие в работах И. И. Гордона, С. В. Фролова, Г. С. Чогошвили, Л. Э. Эльсгольца, а несколько позднее в работах Е. А. Барбашина, Д. П. Гросмана, В. И. Соболева, Э. С. Цитланадзе. Эти авторы доказали многие свойства категории, ввели ряд новых топологических инвариантов для оценки числа критических точек, обобщили ряд теорем на более широкие классы пространств, в некоторых случаях уточнили или дополнили ранее доказанные теоремы.

Среди вновь введенных инвариантов, оценивающих число критических точек, особенно удобным оказалась длина множества³. Этот

³ Длиной цикла Z , расположенного в многообразии M^n , называется максимальное число l отличных от M^n циклов Z_i многообразия M^n , таких, что пересечение

$$Z \cdot Z_1 \cdot Z_2 \dots Z_l \neq 0.$$

инвариант, связанный с теорией пересечения классов гомологий и сравнительно легко вычисляемый, дал возможность сделать следующий большой шаг в оценке числа решений вариационных задач.

В 1940—1943 гг. Л. А. Люстерник с помощью созданной Колмогоровым и Александром теории верхних гомологий определил основные понятия теории пересечений и понятие длины множества в бесконечномерных пространствах. В то время как в конечномерном случае группы гомологий верхних циклов (∇ -циклов) могут быть выражены через группы гомологий нижних циклов (Δ -циклов), в бесконечномерных пространствах группы верхних гомологий дают существенно новые инварианты, позволяющие изучать, так сказать, $\infty - k$ -мерные циклы (циклы дополнительной размерности k), выделяемые из всего пространства k независимыми уравнениями.

Длиной некоторого Δ -цикла Z Л. А. Люстерник называет максимальное число ∇ -циклов $X_1, X_2, \dots, X_l$, таких, что пересечение

$$(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdots X_l) \times Z \neq 0.$$

С помощью теоремы П. С. Александрова «о снятии цикла», являющейся обобщением одноименной теоремы Л. С. Понтрягина для Δ -циклов в n -мерном многообразии, Люстерник доказал, что длина рассматриваемого пространства $n + 1$ оценивает снизу категорию, а следовательно, оценивает снизу и число геометрически различных решений вариационных задач. Весьма значительные трудности пришлось преодолеть ему при фактическом вычислении и оценке длины конкретных функциональных пространств.

Оценка длины пространства замкнутых самонепересекающихся кривых на поверхностях, гомеоморфных n -мерным сферам S^n , дала возможность Л. А. Люстернику проще доказать теорему о существовании трех замкнутых самонепересекающихся геодезических на поверхностях, гомеоморфных S^2 , и доказать существование $n + 1$ замкнутых самонепересекающихся геодезических на поверхностях, гомеоморфных S^n , при метрических ограничениях Морса. Исследования результатов Л. С. Понтрягина при $n = 2^k$ позволили ему усилить эту теорему и доказать существование в этом случае $2n - 1$ замкнутых самонепересекающихся геодезических на поверхностях, гомеоморфных S^n . Аналогичными методами Л. А. Люстерник получил и усилил некоторые результаты Морса о существовании бесконечного множества геодезических, проходящих через две заданные точки на поверхностях, гомеоморфных сферам.

В последующие годы в этом направлении интересные результаты получили А. И. Фет (1949—1953 гг.), доказавший существование двух замкнутых геодезических линий на каждом замкнутом дифференцируемом n -мерном многообразии, С. И. Альбер (1957—1964 гг.), изучивший кольцо гомологий в пространстве окружностей на сфере S^m , что

Длиной замкнутого множества называется максимальная длина цикла, лежащего в этом множестве или в его сколь угодно малой окрестности.

позволило улучшить оценку числа замкнутых геодезических на многообразиях гомеоморфных S^m , а также вычисливший в S^m базисную систему циклов пространства неориентированных петель на S^m , что дало возможность оценить число геодезических петель различных типов, А. С. Шварц, доказавший, в частности, что на всяком замкнутом многообразии M^n имеется счетное множество геодезических дуг, соединяющих две произвольные его точки, причем порядок роста их длин есть порядок арифметической прогрессии — уточнение теоремы Серра. В работе С. И. Альбера «Многомерные задачи вариационного исчисления в целом» (1964 г.) дан подход к оценке числа решений многомерных вариационных задач.

4

Оптимальные задачи

За последние годы необычайное развитие получила теория «оптимальных процессов».

Простейшая задача теории оптимального регулирования заключается в следующем: надо найти функцию или вектор-функцию $u(t)$, на которой функционал

$$V[x(t), u(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), u(t)) dt \quad (3)$$

достигает максимума или минимума (так называемую управляющую функцию или вектор-функцию), причем

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)); \quad (4)$$

задаются еще некоторые граничные условия.

На первый взгляд эта задача не отличается от обычной задачи на условный экстремум с неголономными связями и может быть решена методами, разработанными еще в XVIII веке, однако решение ее сопряжено с некоторыми специфическими трудностями:

1) подынтегральная функция функционала V обычно не содержит $\dot{u}(t)$ и $\dot{x}(t)$ и, следовательно, здесь приходится иметь дело с вырожденной вариационной задачей, а такие задачи до последнего времени были изучены весьма слабо;

2) управляющая функция $u(t)$ в практических задачах обычно является лишь кусочно-непрерывной;

3) допустимые управления обычно расположены в замкнутой области, например, подчинены условию

$$|u(t)| \leq M.$$

Каждая из этих трудностей уже встречалась на различных этапах развития вариационного исчисления. Вырожденные задачи подвергались исследованию, хотя и не очень детально; разрывными решениями занимался еще в 1922—1925 гг. А. М. Размадзе, с замкнутостью области

определения функционала встречались в задачах на односторонние вариации, а в последнее время научились во многих задачах переходить от замкнутых областей к открытым (стал уже употребляться термин «раскрыть» область определения). Однако нагромождение всех этих трудностей в одной задаче настолько ее осложняет, что классические методы часто становятся совершенно неэффективными.

Наиболее значительный вклад в теорию оптимальных процессов сделали Л. С. Понтрягин (1958—1960 гг.) и Р. Беллман (1952—1960 гг.). Л. С. Понтрягин разработал весьма общий принцип максимума, позволяющий решать широкие классы оптимальных задач, и вместе с В. Г. Болтянским, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко рассмотрел многочисленные приложения и частные случаи этого общего принципа (1961 г.)⁴. Р. Беллман предложил совсем иной метод решения оптимальных задач — динамическое программирование. В последние годы этот метод с успехом разрабатывается и в СССР.

Наряду с указанной основной задачей оптимального регулирования возникли многочисленные смежные задачи, а также усложненные схемы основной задачи.

В задачах теории регулирования управляющую функцию часто надо искать не как функцию t , а как функцию $x(t)$ — возникает так называемая задача синтеза. В системах автоматического регулирования с обратной связью из-за затраты времени на формирование управляющего сигнала в уравнение входит запаздывание $\tau(t)$ или даже $\tau(t, x(t))$ и уравнение связи (4) заменяется уравнением с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t)), u(t)).$$

Такие задачи рассматривали Н. Н. Красовский (1962—1964 гг.), Г. Л. Харатишвили (1961 г.), Р. Габасов (1962 г.), И. А. Ожиганова (1963—1965 гг.).

В задачах программного движения обычно надо выбирать управляющие функции так, чтобы обеспечить асимптотически устойчивое движение по заданной траектории (стабилизировать движение) и минимизировать некоторый функционал. В связи с этим возникают вопросы о стабилизируемости движения. Эти вопросы рассматривали А. С. Галиуллин, Н. Н. Красовский (1965 г.), Ю. С. Осипов (1965 г.).



Р. В. Гамкрелидзе.

⁴ В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягин, Математическая теория оптимальных процессов, 1961 г.

Почти в каждой задаче оптимального регулирования возникает вопрос: существует ли хотя бы одна управляющая функция, удовлетворяющая всем условиям задачи, кроме требования оптимальности, например управляющая функция, переводящая точку из одного заданного положения в другое, также заданное, т. е. возникает вопрос об управляемости с помощью функции $u(t)$ рассматриваемого процесса. Если наличие некоторой неизвестной нам функции $u(t)$ в уравнении может оказать вредное влияние на рассматриваемый процесс, то представляет интерес нахождение условий независимости процесса от выбора функции $u(t)$ — условий инвариантности и попытки реализовать реальную систему так, чтобы эти условия удовлетворялись. Теория управляемости и теория инвариантности разрабатывалась Н. Н. Красовским и Л. И. Розоноэром (1963 г.).

Задачи оптимального регулирования часто осложняются наличием в уравнении (4), а иногда и под знаком интеграла в формуле (3) случайных функций. Такая стохастическая постановка оптимальных задач рассматривалась Н. Н. Красовским, Э. А. Лидским (1962 г.) и др.

Изучались также задачи на оптимальное управление с несколькими управляющими функциями, часть из которых может быть выбрана так, чтобы удовлетворить граничным условиям и оптимизировать данный функционал, а другая часть функций неизвестна; более того, может оказаться выбранной наименее благоприятным для осуществления поставленной оптимальной задачи способом (так называемые дифференциальные игры).

Возникает вопрос о наиболее целесообразном выборе известной части управляющих функций. Конечно, и эта задача может осложняться эффектом запаздывания и наличием случайных функций. Подобные задачи рассматривались Н. Н. Красовским, Л. С. Понтрягиным (1966 г.), Л. А. Петросяном и др.

Нельзя не упомянуть о плодотворном направлении исследований, так называемом аналитическом конструировании регуляторов, связанном в основном с работами А. М. Летова (1960—1962 гг.), Н. Н. Красовского (1962 г.).

В последнее время появились также интересные работы по многомерным оптимальным задачам, а также по оптимальным задачам в банаховых пространствах (Т. К. Сиразетдинов, 1963 г.; Ю. В. Егоров, 1964—1965 гг.; А. Г. Бутковский, 1965 г.).

Б

Более общие постановки вариационных задач

Вариационное исчисление является одним из разделов функционального анализа, изучающим экстремумы функционалов. Этот раздел начал развиваться значительно раньше других разделов функционального анализа и даже после разработки основ функционального анализа; в первое время его идеи лишь в малой сте-

пени влияли на развитие вариационного исчисления. Только бурное развитие функционального анализа в последние 20—25 лет привело, наконец, к значительной перестройке многих разделов вариационного исчисления.

Если ранее рассматривались в основном экстремумы интегралов определенного вида, заданных на непрерывно дифференцируемых или кусочно-дифференцируемых функциях, то теперь рассматриваются любые функционалы, обладающие лишь некоторыми весьма общими свойствами, заданные в самых разнообразных пространствах. Для возможности перенесения на такие функционалы основных понятий экстремума функций чаще всего рассматривают линейные или хотя бы локально линейные пространства и предполагают, что функционал f обладает дифференциалом в каком-нибудь обобщенном смысле. Например, пусть E — линейное нормированное пространство, E^* — сопряженное к E пространство. Если

$$(F(x), h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

(где $h \in E$) является линейным относительно h функционалом, то естественно считать $df = (F(x), h)$ и оператор $F(x)$ называть градиентом $f(x)$. Если оператор $F(x)$ является градиентом $f(x)$, то $F(x)$ называется потенциальным оператором, а $f(x)$ — потенциалом $F(x)$.

Были найдены различные необходимые и достаточные условия потенциальности операторов. Точки, в которых $df = 0$, называются критическими. Точки максимума и минимума функционала являются критическими, но, конечно, существуют критические точки и иных типов. Вследствие отсутствия локальной компактности у многих важных классов пространств часто возникают значительные трудности при доказательстве существования или при оценке числа критических точек.

Оценка числа решений какого-нибудь уравнения $\Phi(x) = 0$ с потенциальным оператором $\Phi(x)$ сводится к оценке числа критических точек потенциала $f(x)$. Если же $\Phi(x)$ не является потенциальным оператором, то часто удается построить потенциальный оператор $F(x)$, для которого уравнение $F(x) = 0$ эквивалентно уравнению $\Phi(x) = 0$. Также можно оценивать число решений уравнений $\Phi(x, \lambda) = 0$, зависящих от параметра λ , и, в частности, находить точки ветвления решений.

В столь же общем виде могут быть сформулированы и различные задачи на условный экстремум, в том числе некоторые задачи теории оптимального регулирования. При этом удается доказать обобщенное правило множителей Лагранжа и некоторые обобщения принципа максимума Понтрягина.

В разработку абстрактной теории вариационного исчисления большой вклад внесли Л. А. Люстерник, М. М. Вайнберг (1954—1957 гг.), М. А. Красносельский (1952—1956 гг.), Ю. Г. Борисович (1955—1957 гг.), С. Г. Михлин (1957 г.), Э. С. Цитланидзе (1947—1952 гг.), а в последнее время в этом направлении работали: И. М. Лаврентьев, Б. Т. Поляк, Е. С. Левитин, А. М. Рубинов (1964 г.),



М. М. Вайнберг.

относятся работы Л. А. Люстерника (1929—1930 гг.), В. В. Немыцкого, М. А. Красносельского (1956 г.), М. М. Вайнберга (1954—1957 гг.), В. И. Соболева (1941 г.), Э. С. Цитладзе (1947 г.), Ю. Г. Борисовича, А. И. Поволоцкого, Е. П. Воскресенского, Я. В. Быкова. Наконец, интересными работами последних лет являются работы Ю. Л. Далецкого, изучавшего уравнения в вариационных производных первого порядка (теория характеристик, аналог теории Гамильтона — Якоби), а также параболические уравнения второго порядка.

В. Ф. Демянов (1964 г.), К. Е. Цкирия, А. А. Каплан, Л. Я. Лейсфман, В. А. Балабанов, Я. Л. Энгельсон и др.

В работах А. А. Милютина и А. Я. Дубовицкого (1965 г.) из общих функционально аналитических соображений получены и многие классические предложения вариационного исчисления и принцип максимума Понтрягина.

Значительными являются также достижения в вариационной теории собственных значений. Рассматривая собственные значения λ некоторого потенциального оператора $F(x)$ в гильбертовом пространстве как критические точки функционала f , заданного на сфере или гиперboloиде, можно получить оценку числа собственных значений и высказать некоторые суждения об их распределении. Возможны и различные обобщения этой задачи. К этому кругу вопросов

6

Другие направления исследований

В заключение рассмотрим еще два направления исследований в вариационном исчислении — вариационные задачи с отклоняющимся аргументом и корректизация оптимальных задач.

Как уже упоминалось нами в § 3, вариационные задачи, связанные с теорией регулирования, нередко осложняются эффектом запаздывания, возникающим в связи с затратой времени на формирование управляющего сигнала. При этом иногда возникают типичные задачи оптимального регулирования, требующие для своего решения применения принципа максимума или методов динамического программирования. Однако нередко вопрос сводится и к классическим вариационным задачам, осложненным наличием постоянного или переменного

отклонения аргумента, например, к задаче об экстремуме интеграла

$$V[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), x(t-\tau), \dot{x}(t), \dot{x}(t-\tau)) dt \quad (5)$$

с некоторыми граничными условиями.

Такие вариационные задачи исследованы пока весьма слабо. Так, например, для функционала (5) получено лишь уравнение экстремалей (при постоянном τ оно имеет вид

$$\left(F'_x - \frac{d}{dt} F'_{\dot{x}}\right)_t + \left(F'_{x_\tau} - \frac{d}{dt} F'_{\dot{x}_\tau}\right)_{t+\tau} = 0,$$

где $x_\tau = x(t-\tau)$, $\dot{x}_\tau = \dot{x}(t-\tau)$), получен аналог условия Лежандра, найдены аналоги условий трансверсальности, начато исследование задач на условный экстремум. Получены некоторые результаты и для более сложных функционалов.

Дальнейшее развитие этой теории тормозится тем, что краевые задачи для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа изучены слабо.

За последние 5—6 лет очень повысился интерес к некорректным задачам. В этой области особенно больших успехов добился А. Н. Тихонов. В серии его работ, посвященных корректизации различных некорректных задач, есть также статья о корректизации некоторых оптимальных задач. По-видимому, методами А. Н. Тихонова могут быть корректизированы также многие некорректные оптимальные задачи с отклоняющимся аргументом.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Общий обзор

Функциональный анализ является областью математики, в которой функции рассматриваются как точки или векторы, совокупности функций — как функциональные пространства, операции над функциями, применяемые в математическом анализе, — как преобразования множеств в этих пространствах (операторы), функционалы, связывающие с каждой функцией число, — как функции, заданные на пространстве. В функциональном анализе изучаются общие свойства функциональных пространств (чаще всего, бесконечномерных), взаимные связи между этими пространствами, функционалы и операторы в них и методы решения уравнений, содержащих операторы. Для функционального анализа характерно широкое использование геометрических представлений, почерпнутых из обычного трехмерного пространства, и глубокое применение алгебраических методов исследования.

Идеи, которые привели к созданию функционального анализа, начали созреть в XIX в. К ним относятся: окончательная кристаллизация определения и детальное изучение равномерной сходимости последовательности функций, создание понятия аналитической функции как единого целого, глубокие аналогии, выявленные еще Бернулли, между конечномерными и бесконечномерными объектами в задаче о колебаниях струны, а также возникшая в связи с этим теория разложений произвольных функций в ряды Фурье и в ряды по другим ортогональным системам, разработка теории наилучших равномерных и среднеквадратичных приближений функций (здесь следует отметить большое значение работ П. Л. Чебышева и его учеников). Значительную роль сыграло углубление геометрических представлений под влиянием работ Н. И. Лобачевского, Гаусса, Римана. Создание Кантором абстрактной теории множеств привело к осознанию возможности применения математического анализа к исследованию множеств разнообразной конкретной природы (множества кривых, множества функций). Наконец, последние годы XIX в. охарактеризовались созданием ряда дисциплин, которые часто включают в функциональный анализ. Здесь в первую оче-

редь следует назвать построение теории интегральных уравнений Фредгольма и выяснение ее связей с теорией линейных уравнений; создание Д. Гильбертом и Э. Шмидтом теории интегральных уравнений с симметрическим ядром и введение понятия гильбертова пространства; разработку прямых методов вариационного исчисления.

Интенсивная разработка языка и основных понятий функционального анализа началась в конце первого десятилетия XX в. в работах немецкого математика Э. Шмидта, французского ученого М. Фреше и венгерского математика Ф. Рисса. Ряд основных понятий функционального анализа можно найти также в работах С. Н. Бернштейна. Сюда относится изучение геометрии гильбертова пространства, установление общего вида линейных функционалов в нем, выяснение его сепарабельности и полноты, доказательство изометричности пространства L_2 и l_2 , введение понятия нормы. Рисс нашел общий вид линейного функционала в пространстве C , ввел в рассмотрение пространства L_p . В 1918 г. он построил теорию вполне непрерывных операторов, глубоко обобщающую теорию интегральных уравнений Фредгольма.



С. Банах.

Общее определение нормированных пространств было дано в начале двадцатых годов Банахом, Винером, Ханом и Хелли. Так же как понятие гильбертова пространства является обобщением понятия пространства Евклида, так и понятие нормированного пространства является обобщением понятия n -мерных пространств Минковского. Изучаются выпуклые множества и линейные функционалы. Вводится в рассмотрение и изучается сопряженное пространство. Банахом, Ханом, Штейнгаузом и Шаудером устанавливаются основные принципы функционального анализа: теорема о расширении линейного функционала, принцип равномерной ограниченности, принцип открытости отображения, теорема о замкнутом графике. Выход в свет монографии Банаха «Теория линейных операций» (1932 г., Варшава) ознаменовал собою завершение первого этапа в создании функционального анализа. Примерно в это же время (после работ Т. Карлемана) фон Нейманом и Стоуном заканчивается построение теории абстрактных гильбертовых пространств и самосопряженных и унитарных операторов, действующих в них, изложенной в монографии М. Стоуна «Линейные операторы в гильбертовом пространстве и их приложения к анализу» (1932 г.).

В дальнейшем идеи и методы функционального анализа начинают быстро распространяться. Язык функционального анализа проникает почти во все разделы математики, в механику и теоретическую физику.



Д. А. Граве, Н. Г. Чеботарев, М. Г. Крейн, Н. И. Ахиезер.

В настоящее время этот процесс зашел настолько далеко, что порой трудно и даже невозможно определить, принадлежит данная работа к функциональному анализу или к другой области математики. Конечно, проникновение понятий функционального анализа в другие области науки не является односторонним. При этом процессе функциональный анализ в свою очередь обогащается новыми постановками задач. Особо большое влияние на развитие функционального анализа в последние годы оказали теория аналитических функций, теория уравнений в частных производных, механика и теоретическая физика.

Говоря о бурном развитии функционального анализа, мы в основном имели в виду линейный функциональный анализ. В нелинейном функциональном анализе есть ряд фундаментальных принципов, относящихся к нелинейным операторам, которые действуют в линейных пространствах. Впервые эти принципы были изложены в работах А. М. Ляпунова и Э. Шмидта (начало XX века), а также С. Банаха, Ж. Лерэ и Ю. Шаудера, Л. А. Люстерника и Л. Г. Шнирельмана (выполненных в первой половине 30-х годов). По-видимому, дальнейшее развитие приведет к глубокому синтезу идей функционального анализа, алгебраической топологии, теории функций многих комплексных переменных и современной алгебры.

В Советском Союзе исследования по функциональному анализу начались в основном в конце 20-х годов под влиянием московской топологической школы. Этим, пожалуй, и объясняется то, что они были посвящены нелинейным задачам. Сюда относятся исследования П. С. Александрова, В. В. Немыцкого, А. Н. Тихонова по принципам неподвижных точек. В 1928—1930 гг. появились результаты Л. А. Лю-

стерника и Л. Г. Шнирельмана по топологическим методам вариационного исчисления, связанные с изучением гомологической структуры функциональных пространств.

В начале 30-х годов появляются работы по теории линейных нормированных и топологических пространств — исследования А. Н. Колмогорова в Москве, Г. М. Фихтенгольца, Л. В. Канторовича и Б. З. Вулиха в Ленинграде. К 1935 г. относится работа С. Л. Соболева, в значительной степени предвосхитившая пути применения функционального анализа в теории уравнений в частных производных. В ней впервые введено понятие обобщенной функции как линейного функционала.

Во второй половине 30-х годов число работ по функциональному анализу быстро растет. В 1936 г. появляются исследования И. М. Гельфанда. С 1937 г. в Одессе создается школа функционального анализа под руководством М. Г. Крейна. Н. Н. Боголюбов и Н. М. Крылов в Киеве пропагандируют и применяют идеи и методы функционального анализа. А. И. Плеснер привлекает к разработке широкого круга проблем функционального анализа большой коллектив молодых московских математиков. В 1937 г. в Москве была проведена первая конференция по функциональному анализу, а в 1940 г. в Киеве — вторая. В работе второй конференции приняли участие коллективы математиков Москвы, Ленинграда, Одессы, Киева и Харькова, выполнившие к тому времени ряд больших исследований, а также львовские математики, в том числе С. Банах, Ю. Шаудер, С. Мазур и др.

К началу Великой Отечественной войны по функциональному анализу в нашей стране было получено много новых результатов, из которых наиболее важными являются:

- 1) исследования Н. Н. Боголюбовым и Н. М. Крыловым инвариантных мер в динамических системах;
- 2) создание И. М. Гельфандом теории нормированных колец (И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шиллов и др.);
- 3) разработка Л. В. Канторовичем (параллельно с Г. Фройденталем) теории полуупорядоченных пространств (Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер и др.);
- 4) создание М. Г. Крейном теории конусов (М. Г. Крейн, Ю. И. Гросберг, С. Г. Крейн, М. А. Рутман и др.);
- 5) построение гармонического анализа на коммутативных группах (И. М. Гельфанд, М. Г. Крейн, Д. А. Райков, А. Я. Повзнер и др.);
- 6) построение теории обобщенных спектральных функций (М. А. Наймарк, А. И. Плеснер);
- 7) проведение исследований по геометрии и топологии банаховых пространств и линейных топологических пространств (А. Н. Колмогоров, М. Г. Крейн, Д. П. Мильман, Ю. Ф. Сирвинт, В. Л. Шмульян и др.);
- 8) аналитическое представление операторов и функционалов (Б. З. Вулих, М. К. Гавурин, И. М. Гельфанд, Л. В. Канторович, А. А. Марков, Ю. Ф. Сирвинт, Г. М. Фихтенголец, Г. А. Сухомлинов и др.);

- 9) исследование локально линейных пространств (Л. А. Люстерник);
10) введение С. Л. Соболевым пространств W_p^l и получение первых теорем вложения (С. Л. Соболев).

Во время войны (1941—1945 гг.), несмотря на то что количество работ по функциональному анализу уменьшилось, был получен ряд результатов, которые позже стали началом целых направлений:

1) И. М. Гельфанд и Д. А. Райков доказали существование полной системы неприводимых унитарных представлений у локально бикомпактной группы. Затем И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк начали работы по построению унитарных представлений групп Ли;

2) М. Г. Крейн вместе с М. С. Лившицем построил теорию симметрических операторов с конечным индексом дефекта, нашедшую применение в проблеме моментов и близких вопросах. Эта теория сомкнулась с теорией А. Н. Колмогорова винтовых линий в гильбертовом пространстве, созданной в начале 40-х годов в связи с проблемами стационарных случайных процессов;

3) Л. С. Понтрягин получил фундаментальную теорему теории самосопряженных операторов в пространствах с индефинитной метрикой;

4) Л. В. Канторович начал цикл работ по применению функционального анализа в вычислительной математике;

5) Л. А. Люстерник с учениками разработал вариационные методы в задачах о собственных числах нелинейных операторов.

В послевоенные годы возникло несколько крупных новых направлений: 1) спектральный анализ дифференциальных операторов; 2) применение функционального анализа в теории краевых задач; 3) теория несамопряженных операторов в гильбертовом пространстве; 4) теория обобщенных функций; 5) теория нелинейных операторных уравнений и ее применение к нелинейным проблемам механики. Теория представлений групп разрослась в самостоятельную область математики с многочисленными ветвями и направлениями. В то же время по некоторым направлениям работа была ослаблена, например по общей теории банаховых пространств, теории линейных топологических пространств и теории нормированных колец. В каком-то смысле это можно объяснить тем, что во время войны значительная часть ведущих математиков занималась в основном приложениями математики, в связи с чем наиболее интенсивно развивались разделы функционального анализа, связанные с математической и теоретической физикой, механикой и вычислительной математикой.

В послевоенные годы проводятся конференции, совещания по функциональному анализу. В работе 3-й Всесоюзной конференции по функциональному анализу (Москва, 1956 г.) принимало участие 600 математиков.

После 3-й конференции по функциональному анализу и III Всесоюзного математического съезда (1956 г.), где секция функционального анализа была представлена 41 докладом, состоялся ряд более узких совещаний. В 1957 г. проходил симпозиум при Воронежском семинаре по функциональному анализу по вопросам применения методов функционального анализа в теории дифференциальных уравнений, а затем



Воронежский семинар по функциональному анализу. 1-й ряд (слева направо): А. И. Перов, И. А. Киприянов, Ю. Г. Борисович, И. А. Бахтин, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутицкий, В. Ф. Субботин, М. А. Красносельский; 2-й ряд: В. Я. Стеценко, А. Ю. Левин, В. В. Стрыгин, Д. В. Салехов, Е. М. Семенов, И. С. Иохвидов, Ю. И. Петунин, П. Е. Соболевский, А. В. Кибенко; 3-й ряд: Э. Мухамадиев, Е. А. Лифшиц, Т. Сабилов, Ю. В. Покорный, Ю. С. Колесов, В. Ш. Бурд. 1968 г.

через год на ту же тему состоялся симпозиум в Харькове. Осенью 1958 г. в Одессе была созвана IV межвузовская конференция по функциональному анализу. В конференции приняло участие 140 человек (88 докладов). V Всесоюзная конференция по функциональному анализу работала в Баку в сентябре — октябре 1959 г., причем в ней приняло участие свыше 200 человек и было зачитано 112 докладов. Наконец, на IV Всесоюзном математическом съезде (Ленинград, 1961 г.) было заслушано 125 докладов по функциональному анализу. Вообще специалисты по функциональному анализу встречались довольно часто (иногда по два раза в год), что способствовало развитию интенсивной исследовательской деятельности в этой области.

Укажем теперь основные научные центры, разрабатывающие проблемы функционального анализа.

Крупным научным коллективом является коллектив московских математиков, группирующийся вокруг семинара И. М. Гельфанда, где возникло много идей и направлений современного функционального анализа; этот семинар стал одним из центров, вокруг которого сплотились математики разных стран. Во время его деятельности возник ряд ответвлений при МГУ и некоторых других вузах Москвы. Кроме того, в Москве есть коллективы по отдельным большим направлениям,



С. Г. Крейн.

например по нелинейному функциональному анализу (Л. А. Люстерник, В. В. Немыцкий, М. М. Вайнберг), в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР — по спектральному анализу и теории представлений (М. А. Наймарк и др.), по функциональным пространствам (С. М. Никольский и др.).

Ленинградский коллектив специалистов по функциональному анализу, состоящий из учеников и последователей В. И. Смирнова, Л. В. Канторовича, С. Г. Михлина, Б. З. Вулиха, имеет прочные научные традиции.

В начале 50-х годов был создан новый научный центр по функциональному анализу в Воронеже. В 1952 г. туда переехал М. А. Красносельский, а затем через два года — С. Г. Крейн. Они вместе с В. И. Соболевым организовали семинар по функциональному анализу, в котором воспи-

тывалось много молодых математиков. Семинар поддерживает связи с другими научными коллективами нашей страны, работающими в области функционального анализа.

После создания Сибирского отделения АН СССР в Новосибирск переехали С. Л. Соболев и Л. В. Канторович, вокруг которых группируются коллективы математиков, занимающихся функциональным анализом и его приложениями.

Успешно работает также коллектив одесских математиков под руководством М. Г. Крейна.

В Харькове под общим руководством Н. И. Ахиезера был создан коллектив, куда входили такие крупные специалисты, как И. М. Глазман, Б. Я. Левин, М. С. Лившиц, В. А. Марченко, Ю. И. Любич и др. Работы этого коллектива в ряде областей функционального анализа пользуются всеобщей известностью.

Неровно развивался функциональный анализ в Киеве. В последние годы благодаря в основном усилиям Ю. М. Березанского и О. С. Парасюка создан коллектив математиков, успешно занимающихся функциональным анализом и его приложениями.

В Баку в Институте математики и механики АН Азерб.ССР успешно работает отдел функционального анализа,



Ю. Ф. Коробейник.

созданный Э. И. Халиловым. Большая группа специалистов по функциональному анализу работает и в Азербайджанском университете.

Ряд важных результатов по функциональному анализу, и особенно в области его приложений, получен ростовскими математиками и механиками (М. Г. Хапланов, И. И. Ворович, Ю. Ф. Коробейник, В. И. Юдович и др.). В последние годы интенсивно развивается функциональный анализ в Кишиневе (И. Ц. Гохберг, А. С. Маркус), Ереване (Р. А. Александрян), Ульяновске (А. В. Штраус), Львове (В. Э. Лянце).

Начиная с 1967 г. в Москве издается журнал «Функциональный анализ и его приложения», в Воронеже и Харькове уже несколько лет печатаются сборники «Труды Воронежского семинара по функциональному анализу» и «Теория функций, функциональный анализ и их приложения».

Функциональные пространства

1

Линейные нормированные и банаховы пространства

Основным понятием функционального анализа является понятие оператора, т. е. способа, по которому из одной функции строится другая (функцию здесь понимаем в широком смысле, например числовая последовательность — это функция, определенная на множестве целых чисел). Операторы, встречающиеся в различных задачах, имеют почти всегда определенное аналитическое задание в виде алгебраического, дифференциального или интегрального выражения, суммы ряда или другой предельной операции. Операторы применяются к тем или иным классам функций в зависимости от характера задачи. Многие из этих классов оказываются линейными системами функций, в связи с чем одним из важнейших объектов изучения в функциональном анализе являются различные линейные функциональные пространства. Классические примеры таких пространств — это пространства всех непрерывных, всех ограниченных, всех измеримых, всех дифференцируемых на данной области функций. Оператор, который переводит функцию в число, называется функционалом.

При изучении операторов и операторных уравнений на множествах функций возникает потребность в предельных переходах в этом множестве, что приводит к введению топологии. Если в линейном пространстве введена топология, в которой алгебраические операции непрерывны, то оно называется линейным топологическим пространством. Топологию можно ввести путем задания метрики — расстояния между двумя функциями. Пространство в этом случае называется метрическим. В нем функция f есть предел последовательности $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, если расстояние между f и f_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Наиболее простым классом линейных метрических пространств являются линейные

нормированные пространства, где для каждой функции определено неотрицательное число $\|f\|$, обладающее свойствами: 1) из $\|f\| = 0$ следует $f = 0$; 2) $\|cf\| = |c| \|f\|$ (c — число); 3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Расстояние между функциями f и g определяется в линейном нормированном пространстве, как $\|f - g\|$.

Во многих функциональных пространствах имеются естественные нормы. Например, в пространстве C всех непрерывных функций или в пространстве M всех ограниченных функций нормой является максимум или супремум модуля функции, в пространстве C^1 всех непрерывно дифференцируемых функций — сумма максимумов модулей функций и производной, в пространстве V функций ограниченной вариации — полная вариация, в пространстве L интегрируемых функций — интеграл от модуля функции. Эти линейные нормированные пространства и были первыми объектами, которые изучались функциональным анализом. Из них черпались те основные понятия и соотношения, которые затем вошли в общую абстрактную теорию.

Все перечисленные пространства бесконечномерные. Линейное нормированное пространство называется полным, если критерий Коши является достаточным для сходимости последовательности. Первое существенное отличие бесконечномерного нормированного пространства от конечномерного состоит в том, что оно может быть неполным. Полное линейное нормированное пространство называется банаховым. Пространства C , C^1 , V — полные. Если под пространством L понимать функции, интегрируемые по Риману, то оно не будет полным. Введение интеграла Лебега имело то большое значение, что все функции, интегрируемые по Лебегу (суммируемые), образуют в указанной выше норме банахово пространство L_1 . Банаховыми будут также линейные пространства L_p ($p \geq 1$), состоящие из всех функций с конечным интегралом от p -й степени модуля, относительно нормы, равной корню p -й степени из этого интеграла.

Описанные пространства и, пожалуй, еще пространства функций, удовлетворяющих условию Гельдера $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^\alpha$, отвечали запросам математического анализа и теории функций вещественного переменного.

Особую роль сыграли гильбертовы пространства L_2 . Была построена теория интегральных уравнений с симметрическим ядром, ставшая прообразом спектральной теории операторов. Пространства L_2 легли в основу квантово-механического описания мира, так как квадрат модуля ψ -функции, задающей состояние квантово-механической системы, имеет смысл плотности вероятности, и поэтому интеграл от него (квадрат нормы) равен единице. Таким образом, все возможные состояния системы можно трактовать как точки единичной сферы пространства L_2 . Во многих задачах механики сплошной среды интеграл от квадрата некоторых функций имеет смысл энергии и, следовательно, должен быть конечен, т. е. соответствующая функция должна принадлежать L_2 .

Развитие вариационных методов теории уравнений в частных производных привело к необходимости изучения функционалов типа

норм на классах дифференцируемых функций нескольких переменных. Классическим примером такого функционала является корень квадратный из интеграла Дирихле $\int \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx$, играющий во многих задачах роль интеграла энергии. Линейные нормированные пространства дифференцируемых функций с такими нормами, как правило, неполные. Это приводит к ряду трудностей при доказательстве существования и построении решений уравнений, например методом последовательных приближений или другим способом, приводящим к фундаментальной последовательности приближений, которая, в силу неполноты пространства, может ни к чему не сходиться. Необходимость иметь полноту в соответствующих пространствах привела к расширению понятия производных функций нескольких переменных. В 30-х годах К. О. Фридрихсом и С. Л. Соболевым независимо друг от друга было введено понятие обобщенных производных. Банаховы пространства W_p^l функций, имеющих суммируемые с p -й степенью обобщенные производные порядка l в области G , были рассмотрены и детально изучены Соболевым и называются пространствами Соболева. Введение пространства $W_p(G)$ и изучение решений уравнений в частных производных, принадлежащих этим пространствам (обобщенных решений), явилось большим толчком в развитии общей теории краевых задач уравнений в частных производных и теории обобщенных функций.

2

Банаховы пространства суммируемых функций

Мы уже говорили о роли изучавшихся Ф. Риссом пространств L_p . Польским математиком В. Орличем был введен класс пространств функций, для которых суммируема не степень $|f|^p$, а $M(f)$, где $M(u)$ — некоторая выпуклая функция (N — функция Юнга). Такие пространства сразу нашли применения в теории суммирования рядов. К изучению этих же пространств привели воронежских математиков (М. А. Красносельского, Я. Б. Рутцкого, В. И. Соболева, Д. В. Салехова, Е. М. Семенова, П. П. Забрейко и др.) задачи, связанные с нелинейными интегральными уравнениями.

В последние годы успешно развивалась теория пространств Λ_α и M_α , введенных Ж. Марцинкевичем (Польша) и Г. Г. Лоренцом (США). Введение их требуется самой природой некоторых операторов.

Все перечисленные пространства суммируемых функций обладают тем свойством, что норма функции равна норме любой другой функции, равноизмеримой с модулем исходной функции. Ряд результатов для пространства с такой симметричной нормой был недавно получен Б. С. Митягиным и Е. М. Семеновым.

Приведенные выше примеры норм в функциональных пространствах были связаны со свойствами функции на всей ее области определения.



Г. Е. Шилов.

В некоторых задачах кроме глобальной характеристики функции нужно еще знать ее поведение в окрестности некоторой точки (или на бесконечности), в окрестности многообразия меньшей размерности, чем размерность области определения функции. Для многих задач удается подобрать норму так, чтобы она характеризовала указанное локальное поведение функции. Такого рода локальные нормы нашли применение в теории сингулярных интегралов (Б. И. Коренблюм, С. Г. Крейн, Б. Я. Левин). Они важны в конструктивной теории функций (см. работы С. Н. Бернштейна и недавние работы Ю. А. Брудного). Широко применяются пространства L_p и W_p^l с весом, при этом вес подбирается так, чтобы он обращался в нуль на многообразиях, где функция может иметь особенности. Теории таких

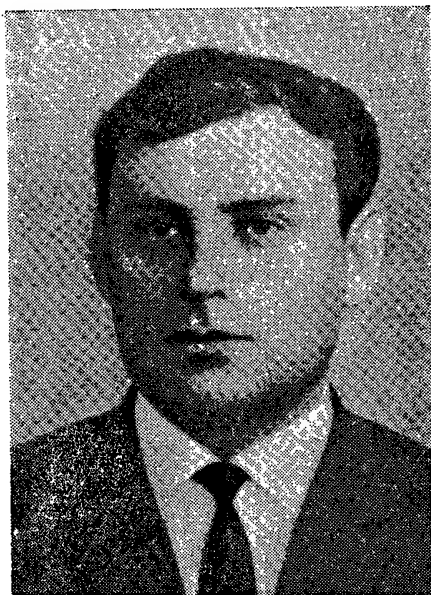
пространств с весом и их применением к теории вырождающихся эллиптических уравнений посвящены работы многих советских математиков (С. Г. Михлина, М. И. Вишика, Л. Д. Кудрявцева, В. П. Ильина, В. П. Глушко, С. Г. Крейна, С. В. Успенского и др.).

Иногда высказывалось мнение о том, что линейные топологические пространства для конкретных задач анализа не нужны и лишь носят «обобщающий» характер. Однако появление в 50-х годах работ французских математиков, и в частности книга Лорана Шварца по теории распределений (теория обобщенных функций), вызвало повсеместное оживление исследований линейных топологических пространств. Дело в том, что во всех рассмотренных выше функциональных банаховых пространствах операторы дифференцирования либо определены не на всех функциях, либо могут выводить функции из пространства. Поэтому в ряде задач удобно использовать бесконечно дифференцируемые функции. Но во всех обычных нормах пространства бесконечно дифференцируемых функций не будут полными. С другой стороны, в них можно вводить метрику так, чтобы они образовывали полные метрические пространства. В пространствах с такой метрикой операторы дифференцирования и другие важные операции анализа неограниченно применимы и даже являются непрерывными. Введение в рассмотрение этих пространств позволило начать в 50-х годах построение общей теории уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, достигшей сейчас большого расцвета. В частности, начиная с 1953 г. в работах И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова и их учеников были введены и исследованы новые классы счетно-нормированных пространств бесконечно дифференцируемых функций, которые позволили полностью исследовать вопрос о разрешимости и корректности задачи Коши для эволюционных систем линейных диф-

ференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Глубокие исследования различных общих классов линейных топологических пространств были проведены Б. С. Митягиным, Д. А. Райковым и др. В частности, сюда относится класс ядерных пространств, имеющих свойства, наиболее близкие к конечномерным. К классу ядерных пространств принадлежат такие пространства, как C^∞ , состоящие из всех бесконечно дифференцируемых функций, пространства A аналитических в единичном круге функций и др.

В самом банаховом пространстве, кроме топологии, порожденной нормой, важную роль играют другие топологии (слабые). Исследование таких топологий было начато еще Банахом. Значительное развитие эти вопросы получили в довоенных работах М. Г. Крейна и В. Л. Шмульяна. Начиная с 50-х годов глубокое исследование топологических и геометрических свойств банаховых пространств проводилось группой харьковских математиков (М. И. Кадецком, Б. Я. Левиным, В. И. Гурарием, В. И. Мацаевым, В. Д. Мильманом).



В. И. Гурарий.

3

Изоморфизм банаховых пространств

Два банаховых пространства называются изоморфными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие, сохраняющее алгебраические операции. Они называются изометричными, если это соответствие сохраняет норму. С точки зрения абстрактной теории такие пространства неразличимы; все утверждения, справедливые для одного пространства, справедливы и для другого. Однако когда речь идет о двух конкретных изометричных функциональных пространствах, то перевод фактов с «языка» одного пространства на «язык» другого часто бывает практически неосуществимым. Классический пример изометрического соответствия дают ряды Фурье: разложение функции из L_2 на отрезке $[-\pi, \pi]$ в ряд Фурье устанавливает изометрическое соответствие между L_2 и гильбертовым пространством l_2 последовательностей (коэффициентов Фурье), ряд из квадратов членов которых сходится. Аналогично преобразование Фурье функции, принадлежащей L_2 во всем пространстве R_n , переводит ее в функцию из L_2 с той же нормой. Это соответствие находит глубокое применение в квантовой механике, где для основных величин рассматривают-



М. И. Кадец.

ся координатные и импульсные представления.

В математических задачах часто тоже бывает удобным вести исследования одновременно в двух изометричных пространствах. В одном проще находятся одни величины, в другом — другие. Так, в последнее время широко применяются пространства H_p^s , в которых норма определяется так: по функции $f(x)$ находят ее преобразование Фурье $\tilde{f}(\xi)$ и полагают

$$\|f\| = \sqrt[p]{\int (1 + |\xi|^2)^s |\tilde{f}(\xi)|^p d\xi}.$$

Для этой нормы при $p \neq 2$ нет удобной формулы, выраженной через $f(x)$, поэтому исследование уравнений ведется одновременно как в пространстве H_p^s функций $f(x)$, так и в изометрическом ему пространстве функций $f(\xi)$.

С другой стороны, преобразование Фурье

позволяет по одним функциональным пространствам строить другие. Так, И. М. Гельфанду и Г. Е. Шилову удалось найти полное описание пространств образов Фурье функций из введенных ими линейных топологических пространств. Банахом был введен инвариант для изоморфных банаховых пространств, называемый линейной размерностью. Важное исследование этого инварианта было проведено М. И. Кадецком.

Инвариантом при изоморфных отображениях линейных топологических пространств является понятие аппроксимативной размерности, введенное А. Н. Колмогоровым.

4

Линейные функционалы. Сопряженное пространство

В конечномерном пространстве, состоящем из элементов $f = (f_1, \dots, f_n)$, всякая линейная функция задается равенством

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^n f_i \varphi_i = (f, \varphi).$$

В силу этого естественно предполагать, что линейные функционалы на функциональных пространствах должны задаваться в форме

$$\varphi(f) = \int f(x) \varphi(x) dx. \quad (1)$$

Хотя во многих случаях это и так, иногда написанное равенство нужно понимать лишь в очень обобщенном смысле или просто символически. Так, для пространства L_1 функция $\varphi(x)$ пробегает пространство L_∞ ограниченных измеримых функций; для пространства L_p — пространство

$L_{p'} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right)$. Функционалы на пространстве C^1 уже не всегда представимы в виде (1) с помощью интеграла Лебега. Здесь $\varphi(x)$ — обобщенная функция, являющаяся производной от некоторой меры. Из рассмотренных примеров видно, что сужение функционального пространства, вообще говоря, приводит к расширению класса тех φ , для которых формула (1) дает представление линейного функционала. Если теперь рассматривать пространства бесконечно дифференцируемых функций, то у них множество линейных непрерывных функционалов является чрезвычайно богатым. Используя именно этот факт, С. Л. Соболев и Л. Шварц, а затем И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилев вводили различные пространства обобщенных функций.



Б. И. Коренблум.

Общим представлениям линейных непрерывных функционалов для конкретных банаховых пространств был посвящен ряд работ советских математиков: работа (одна из первых в СССР) ленинградских математиков Л. В. Канторовича и Г. М. Фихтенгольца о пространствах ограниченных измеримых функций (1934 г.), работы А. А. Маркова о пространстве непрерывных функций на компакте (1937—1940 гг.), М. К. Гавурина о пространстве абстрактных непрерывных функций, А. П. Артеменко и И. Ю. Гросберга о пространстве V функций с ограниченной вариацией, упоминавшиеся выше работы Б. И. Коренблума, С. Г. Крейна и Б. Я. Левина о специальных пространствах с локальными нормами (1947—1948 гг.) и работы последних лет М. З. Соломяка о пространствах W_p^l , В. П. Захарюты и В. И. Юдовича о пространствах H_p аналитических в круге функций и др.

Для многих пространств, однако, представления линейных непрерывных функционалов мало обозримы, и часто тот факт, что $\varphi(f)$ является линейным функционалом на данном пространстве, содержит в себе столько же информации, сколько его представление.

В множестве всех линейных непрерывных функционалов можно естественным образом ввести алгебраические действия и топологию так, что само множество становится линейным топологическим пространством. Это пространство называется сопряженным пространством E' к данному пространству E . В случае банахова пространства сопряженное пространство является тоже банаховым по отношению к норме

$$\|\varphi\| = \sup \frac{|\varphi(f)|}{\|f\|}.$$

Если E' — банахово пространство, то можно также построить сопряженное к нему пространство $E'' = (E')'$. Исходное пространство

естественным образом изометрически изображается в E'' . Если при этом его образ совпадает с E'' , то оно называется рефлексивным. Свойство рефлексивности чрезвычайно полезно. Ряд важных признаков рефлексивности был найден в конце 30-х годов одесскими математиками Д. П. Мильманом и В. Л. Шмульяном. Интересный критерий рефлексивности получен Ю. И. Петуниным.

5

Вложение пространств

Многие теоремы анализа можно трактовать как утверждение, что одно банахово пространство вложено в другое. Например, теорему о том, что непрерывная на отрезке функция ограничена на нем, можно сформулировать так: пространство C непрерывных на отрезке функций вложено в пространство M функций, ограниченных на этом же отрезке. В нашем примере нормы функций в C и M одинаковы. В дальнейшем, говоря, что пространство E_1 вложено в пространство E_0 , предполагаем

$$\|x\|_{E_0} \leq C \|x\|_{E_1}.$$

Утверждения типа « E_0 вложено в E_1 », по предложению С. Л. Соболева, называются теоремами вложения.

При рассмотрении различных свойств одной и той же функции, описываемых в терминах принадлежности ее к тому или иному пространству, важно знать, какие свойства являются следствием других, т. е. знать теоремы вложения. Широко применяются теоремы вложения Соболева для пространств $W_p^l(G)$. Эти пространства вложены в пространства $W_q^m(G)$ при $m < l$ и q , не превышающем некоторого предельного показателя q^* . Кроме того, пространство $W_p^l(G)$ вложено в пространство $W_q^m(\Gamma)$ функций, определенных на каком-либо многообразии $\Gamma \subset G$ меньшей размерности, например на границе области G . Точнее это означает, что сужение функции $f(x) \in W_p^l(G)$ на Γ (ее след на Γ) принадлежит $W_q^m(\Gamma)$. Для краевых задач для уравнений в частных производных весьма важен обратный вопрос: какой должна быть функция на Γ , чтобы она являлась следом функции из $W_p^l(G)$. К такому вопросу сводились классические задачи о существовании решения задачи Дирихле с конечным интегралом Дирихле, о существовании минимальных поверхностей и т. п. Это явилось стимулом для многочисленных исследований у нас и за рубежом. С. М. Никольский ввел новый класс функциональных пространств, для которого он с помощью тонких аппроксимационных теорем получил прямые и обратные теоремы вложения. В дальнейшем вокруг Никольского образовался большой коллектив (О. В. Бесов, С. В. Успенский, П. И. Лизоркин и др.), занимающийся близкими вопросами. Однако результаты С. М. Никольского давали точные теоремы о разреши-

мости краевых задач не в классах W_p^l . Существенный шаг вперед был сделан в работах Л. Н. Слободецкого в конце 50-х годов. Им были введены пространства $W_2^l(\Gamma)$ с дробным индексом, в терминах которых описывалось множество следов функций из $W_2^l(G)$. Таким образом, для пространств $W_2^l(G)$ (в которых и ставились классические задачи) вопрос был полностью решен. В результате дальнейших усилий Л. Н. Слободецкого, О. В. Бесова и С. В. Успенского проблема была до конца изучена также при любом $p > 1$.

Теоремами вложения для различных классов пространств и в настоящее время занимаются коллективы математиков в Москве, Новосибирске, Ленинграде, Воронеже и других городах.

6

Дальнейшая ступень развития теории функциональных пространств

Обилие функциональных пространств, применяемых в современном анализе, приводит к необходимости изучения структуры самого множества этих пространств или его частей. Над банаховыми и линейными топологическими пространствами определен ряд действий (переход к сопряженному пространству, прямая сумма, тензорное произведение) и предельных операций (индуктивные и проективные пределы). Не случайно на IV Всесоюзном математическом съезде (1961 г., Ленинград), по крайней мере в трех докладах (С. Л. Соболева и С. М. Никольского, Г. Е. Шилова, С. Г. Крейна), рисовались графики и фигуры, каждая точка которых изображала определенное банахово или линейное топологическое пространство.

Началось изучение целых семейств банаховых пространств, зависящих от одного, двух и больше параметров. Наиболее конструктивным является направление, связанное с так называемыми интерполяционными теоремами в теории операторов. По двум банаховым пространствам E_0 и E_1 строятся семейства пространств, обладающие, например, тем свойством, что всякий оператор, непрерывный в E_0 и E_1 , непрерывен и в каждом пространстве семейства. Предложены различные методы конструирования семейств таких пространств: метод следов (Лионс, Франция) и эквивалентный ему метод средних (Лионс и Петре, Швеция), комплексный метод (Кальдерон, США, Лионс, С. Г. Крейн), метод промежуточных пространств (Гальярдо, Италия). С. Г. Крейн выделил класс семейств банаховых пространств, названный им шкалами банаховых пространств. Теория шкал банаховых пространств успешно развивается группой воронежских математиков (С. Г. Крейн, Б. С. Митягин, Ю. И. Петунин, Я. Б. Рутецкий, М. П. Семенов). В этом направлении как в Воронеже, так и в других городах получен ряд существенных достижений: построена стройная



Б. С. Митягин.

система теорем вложения, включающая рассмотренные в п. 5; найдены теоремы о полном наборе гомеоморфизмов, осуществляемых эллиптическим оператором, определены новые классы пространств суммируемых функций и т. п.

В наиболее общей форме подход к изучению совокупностей пространств содержится в работе Б. С. Митягина и А. С. Шварца, посвященной теории функторов в категории банаховых пространств. Под функтором понимается отображение, которое ставит в соответствие каждому банахову пространству X из некоторого множества K (категории) другое банахово пространство $F(X)$. При этом предполагается, что любому линейному непрерывному оператору A , действующему из X в Y , соответствует линейный непрерывный оператор $F(A)$ из $F(X)$ в $F(Y)$ и выпол-

няются некоторые условия согласованности. В работе рассмотрен ряд примеров функторов, уже применяющихся в функциональном анализе, и построена их общая теория.

7

Множества в функциональных пространствах

Выпуклые множества. Множество линейного пространства называется выпуклым, если оно содержит отрезок, соединяющий любые две его точки. Известная теорема Хана — Банаха о расширении линейного непрерывного функционала без изменения его нормы, имеющая прямой геометрический смысл, позволяет достаточно далеко продвинуть теорию выпуклых множеств. В сопряженном пространстве E' была развита теория регулярно выпуклых множеств (М. Г. Крейн, Д. П. Мильман, В. Л. Шмудль), определение которых тесно связано со слабой топологией пространства E' . Точка выпуклого множества D называется крайней, если она не лежит внутри никакого отрезка из D . Понятие крайней точки весьма важно, так как линейные непрерывные функции достигают на D экстремальных значений в крайних точках. М. Г. Крейну и Д. П. Мильману принадлежит ставший уже классическим результат о том, что каждое ограниченное регулярно выпуклое множество имеет крайние точки и, более того, может быть получено слабым замыканием линейных комбинаций крайних точек. Эта теорема имеет существенное значение при исследовании выпуклых множеств, она обобщена на широкий класс линейных топологических пространств и нашла применения в теории представлений

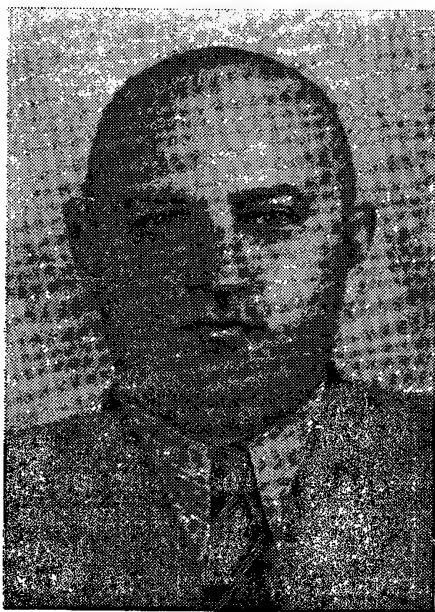
групп, в теории положительно определенных функций, в теории аппроксимаций, в теории колец, в теории динамических систем. Следует отметить, что упрощенный вариант теоремы еще до опубликования работы Крейна и Мильмана был применен Н. Н. Боголюбовым и Н. М. Крыловым в теории инвариантных мер на динамических системах.

Н. В. Ефимов и С. Б. Стечкин ввели понятие чебышевского множества в банаховом пространстве как множества точек, обладающих тем свойством, что расстояние от любой точки до этого множества достигается на единственном элементе множества. Ими и их учениками с помощью тонких геометрических построений исследована связь между чебышевскими и выпуклыми множествами. Теория выпуклых множеств в последние годы получила развитие в связи с задачами линейного программирования.

Компактные множества. Множество метрического пространства называется компактным, если из всякой его последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Компактность играет существенную роль при рассмотрении различных операторных уравнений. Общеизвестным является критерий Асколи — Арцела компактности множества в пространстве C . Для множеств в пространствах L_p различные критерии компактности были даны М. Риссом, А. Н. Колмогоровым и М. А. Красносельским. Позднее эти критерии обобщались на другие пространства суммируемых функций. В. И. Кондрашовым получены первые теоремы о компактности шаров пространств W_p' в метрике пространств W_p^m с $m < l$. В дальнейшем подобные теоремы получались для различных других классов пространств.

В компактном множестве Q всегда существует конечная ε -сеть, т. е. конечное множество, от которого каждая точка из Q отстоит на расстоянии, меньшем ε . Наименьшее возможное число точек в ε -сети обозначим через $N_\varepsilon(Q)$. В начале 30-х годов Л. С. Понтрягин и Л. Г. Шнирельман ввели величину $N_\varepsilon(Q)$ как характеристику массивности компакта Q . Они надеялись, что изучение асимптотического поведения величины $N_\varepsilon(Q)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ может привести к новым топологическим характеристикам компактов типа размерности. Величину $\log_2 N_\varepsilon(Q)$ А. Н. Колмогоров предложил называть ε -энтропией компакта Q по аналогии с близкими понятиями в теории информации. Еще в 1936 г. он же ввел другие характеристики компактов под названием n -поперечников, понимая под n -поперечником наименьшее отклонение компакта Q от всевозможных n -мерных подпространств пространства E .

В середине 50-х годов интерес к этим понятиям резко возрос в связи с работами по 13-й проблеме Гильберта о представлении функций суперпозициями функций меньшего числа переменных. А. Н. Колмогоров получил оценки для ε -энтропии в метрике пространства C для некоторых компактных множеств дифференцируемых и аналитических функций. Это дало ему возможность получить блестящее доказательство теоремы А. Г. Витушкина о суперпозициях. В дальнейшем



М. А. Красносельский.

рядом математиков (В. И. Арнольд, А. Г. Витушкин, К. И. Бабенко, В. Д. Ерохин, Б. С. Митягин, В. М. Тихомиров, А. Ф. Тиман, Ю. А. Брудный, М. Ш. Бирман, З. С. Соломяк) определена асимптотика ε -энтропии и n -поперечников для многих важных компактных множеств функций. С точки зрения задачи об n -поперечниках получили новую трактовку результаты М. А. Красносельского, М. Г. Крейна и Д. П. Мильмана, найденные ими при изучении понятия раствора двух подпространств банахова пространства. Понятия ε -энтропии и n -поперечников позволили дать естественную постановку большого числа задач теории приближений.

Базисы. Последовательность $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ называется базисом банахова пространства E , если каждый элемент из E единственным

образом представим в виде $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$. Первые исследования по теории базисов начались у нас в 1940—1941 гг. Сюда относятся работы М. М. Гринблума, давшего простые геометрические характеристики базисов, работа М. Г. Крейна, Д. П. Мильмана и М. А. Рутмана по устойчивости базисов и работа Н. К. Бари. В последней работе были выделены важные классы базисов в гильбертовом пространстве, и в частности базисы, названные базисами Рисса. В дальнейшем К. И. Бабенко и М. Ш. Альтман дали интересные примеры базисов в гильбертовом пространстве. И. М. Гельфанд показал, что базисы Рисса являются безусловными, т. е. такими, которые остаются базисами после любой перестановки их элементов. М. Г. Крейн изучает базисы, близкие в определенном смысле к ортонормированным системам, которые он называет базисами Бари.

Ряд интересных работ по теории базисов был выполнен В. Я. Козловым и учениками М. М. Гринблума — В. Г. Винокуровым, Л. А. Гуревичем, а также М. К. Фаге, К. М. Фишманом, М. А. Евграфовым, З. С. Соломяк. Вопросами о базисах в банаховых пространствах аналитических функций впервые начал заниматься А. И. Маркушевич. Важный результат об абсолютности всякого базиса в линейном топологическом пространстве A аналитических в круге функций был получен М. М. Драгилевым. А. С. Дынин и Б. С. Митягин доказали глубокую теорему об абсолютности всякого базиса в ядерных пространствах.

где $A(x, y)$ — заданное ядро, определяющее оператор A подобно тому, как матрица $(a_{jk})_{j,k=1}^n$ определяла оператор в пространстве E_n . При естественных ограничениях, наложенных на это ядро (например, его ограниченность), оператор A будет непрерывным: $Au_n \rightarrow Au$ при $u_n \rightarrow u$. Такие операторы называются также ограниченными, так как требование непрерывности эквивалентно неравенству $\|Au\| \leq c \|u\|$ ($u \in L_2$). В действительности при указанном ограничении на ядро этот оператор будет даже вполне непрерывным — он будет переводить ограниченные последовательности u_n ($\|u_n\| \leq c$, $n = 1, 2, \dots$) в компактные. Последнее обстоятельство дает возможность столь же полно исследовать уравнения вида $Bu = f$, где $B = I - A$ (I — единичный оператор, определяемый соотношением $Iu = u$, $u \in L_2$), как и уравнения (2). Уравнение $(I - A)u = f$, где A определяется формулой (5), является интегральным уравнением Фредгольма второго рода.

Пример 2. Обозначим через x точку $(x_1, \dots, x_n)$ n -мерного пространства E_n и рассмотрим гильбертово пространство $L_2(G) = \Phi_1 = \Phi_2 = H$ функций $u(x)$, суммируемых с квадратом в ограниченной области $G \in E_n$. Определим оператор A формулой

$$Au = \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha(x) D^\alpha u, \quad (6)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — вектор с целыми неотрицательными координатами α_j , $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $a_\alpha(x)$ — коэффициенты, а D^α — символ смешанной производной:

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7)$$

Определение (6) некорректно в том отношении, что $D^\alpha u$ не имеет смысла для негладких $u \in L_2(G)$. Поэтому мы должны дополнительно указать те u , где A определен, т. е. указать так называемую область определения $\mathfrak{D}(A)$ оператора A . Например, можно считать, что $\mathfrak{D}(A)$ состоит из всех финитных в G бесконечно дифференцируемых функций (т. е. функций, равных нулю в полоске вблизи границы G ; их класс обозначаем $C_0^\infty(G)$). Обычно требуется, чтобы область определения $\mathfrak{D}(A)$ была плотна в H .

Изменяя $\mathfrak{D}(A)$ при одном и том же дифференциальном выражении $L = \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha(x) D^\alpha$, будем получать различные операторы. Так, оператор, определенный посредством той же формулы (6), но на классе функций $C^\infty(G \cup \Gamma)$, бесконечно дифференцируемых в области G , включая ее границу Γ , будет уже отличным от ранее определенного. Обозначим через Λ (соответственно $\mathbb{L}$) оператор, построенный согласно (6) на $\mathfrak{D}(\Lambda) = C_0^\infty(G)$ (соответственно на $\mathfrak{D}(\mathbb{L}) = C^\infty(G \cup \Gamma)$); первый из них называется минимальным, а второй — максимальным, построенными по выражению L (в действительности, определения несколько более тонкие).

Рассмотренные в примере 2 операторы существенно отличаются от оператора примера 1 — они не непрерывные (неограниченные), так как ясно, что из сходимости $u_n \rightarrow u$ в $L_2(G)$ еще не следует сходимость производных этих функций. Понятно, что теория таких операторов гораздо более сложная, чем теория ограниченных операторов. Вместе с тем из сказанного ясно, что неограниченные операторы появляются весьма часто при совершенно естественном желании операторно истолковать решения дифференциальных уравнений: ведь во втором примере к уравнению типа (3) приводится дифференциальное уравнение вида $Lu = f$.

На примере операторов Λ и $\mathcal{L}$ отчетливо видна важность общего понятия расширения операторов. Пусть имеются операторы A и B в пространстве H с областями определения $\mathfrak{D}(A)$ и $\mathfrak{D}(B)$ соответственно. Говорят, что B есть расширение A , и обозначают это $B \supseteq A$, если $\mathfrak{D}(B) \supseteq \mathfrak{D}(A)$ и для $u \in \mathfrak{D}(A)$ $Bu = Au$. Таким образом, $\mathcal{L} \supseteq \Lambda$. С точки зрения решений дифференциальных уравнений замена уравнения $Lu = f$ операторным уравнением $\Lambda u = f$ означает нахождение решения $u(x)$ этого дифференциального уравнения, «сильно» аннулирующегося вблизи границы Γ области G , замена же уравнением $\mathcal{L}u = f$ означает нахождение какого-либо решения того же дифференциального уравнения. К операторам Λ и $\mathcal{L}$ мы еще возвратимся при обсуждении операторного подхода к исследованию решений краевых задач.

Перейдем теперь к рассмотрению одного из наиболее важных классов операторов в гильбертовом пространстве — класса самосопряженных операторов. Подобные операторы появляются в самых разнообразных задачах, прежде всего в квантовой физике, описывающей посредством таких операторов различные физические величины (координату, импульс, энергию и т. д.). Они вводятся как обобщение понятия эрмитовой матрицы (т. е. матрицы $(a_{jk})_{j,k=1}^n$, такой, что $a_{jk} = \overline{a_{kj}}$), и в случае ограниченных операторов определение сводится к требованию выполнения равенства

$$(Au, v) = (u, Av) \quad (8)$$

для любых $u, v \in H$. Устанавливается, что спектр самосопряженного оператора вещественен и любой вектор из H может быть разложен по собственным векторам такого оператора. Последние два утверждения требуют пояснений.

При нахождении собственных частот механических систем с конечным числом степеней свободы возникает задача нахождения тех значений параметра λ (собственных значений), для которых существуют отличные от нуля решения φ уравнения $A\varphi = \lambda\varphi$ (собственные векторы), где $A = (a_{jk})_{j,k=1}^n$ — оператор в E_n , связанный с системой. Для эрмитовых матриц собственные значения вещественны и составляют конечное множество $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (в этой последовательности возможны повторения), а набор собственных векторов $\varphi_{\lambda_1}, \dots, \varphi_{\lambda_n}$, таких,

что $A\varphi_{\lambda_j} = \lambda_j\varphi_{\lambda_j}$, образует ортонормированный базис, по которому можно разложить любой вектор из E_n :

$$f = \sum_{j=1}^n (f, \varphi_{\lambda_j}) \varphi_{\lambda_j} \quad (f \in E_n); \quad (9)$$

$$(f, g) = \sum_{j=1}^n (f, \varphi_{\lambda_j}) \overline{(g, \varphi_{\lambda_j})} \quad (f, g \in E_n).$$

При переходе от E_n к общему гильбертовому пространству H и тем самым к системам с бесконечным числом степеней свободы возникает существенно новая ситуация: роль собственного значения играют те числа λ , при которых перестает существовать непрерывный обратный оператор к оператору $A - \lambda I$, определенный во всем H , т. е. оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, переводящий $v \in H$ в $u \in \mathfrak{D}(A)$, если $A - \lambda I$ переводит u в v . Совокупность таких λ образует так называемый спектр оператора A , который в конечномерном случае состоит только из дискретного набора собственных значений, а в общем случае может быть достаточно произвольным, возможно, недискретным множеством на вещественной оси.

Разложение (9) в связи с возможной недискретностью спектра теряет смысл, однако оно может быть трансформировано. Именно, если обозначим P_{λ_j} оператор, который каждому вектору $f \in E_n$ ставит в соответствие его обычную ортогональную проекцию на φ_{λ_j} ($P_{\lambda_j}f = (f, \varphi_{\lambda_j})\varphi_{\lambda_j}$) (ортогональный проектор), первое из равенств (9) приобретает тот смысл, что каждый вектор равен сумме своих проекций и, следовательно, имеют место соотношения

$$I = \sum_{j=1}^n P_{\lambda_j},$$

$$A = \sum_{j=1}^n \lambda_j P_{\lambda_j}. \quad (10)$$

Введем операторы $E_\lambda = \sum_{\lambda_j < \lambda} P_{\lambda_j}$ ($\lambda \in (-\infty, \infty)$) ортогонального проектирования на подпространство, натянутое на собственные векторы φ_{λ_j} , где $\lambda_j < \lambda$ — так называемое разложение единицы. Тогда можно написать

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dE_\lambda \quad \text{и} \quad A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda. \quad (11)$$

Действительно, E_λ скачкообразно меняется только в точках λ_j , при переходе через которые $E_{\lambda_j+0} - E_{\lambda_j} = dE_{\lambda_j} = P_{\lambda_j}$, а в остальных случаях $dE_\lambda = 0$. Поэтому справа в формулах (11) в действительности стоят не интегралы, а обычные суммы (10).

Одним из наиболее значительных успехов функционального анализа первых десятилетий XX в. было доказательство Д. Гильбертом,

Т. Карлеманом и фон Нейманом формул (11), обобщающих (9) для произвольных самосопряженных операторов в произвольном гильбертовом пространстве H . При этом семейство ортогональных проекторов E_λ уже может меняться не только скачками, но и непрерывно, причем изменение происходит именно на спектре оператора A . При изменении λ от $-\infty$ до ∞ семейство E_λ меняется от 0 до 1, причем меняется монотонно: при $\mu < \lambda$ E_μ проектирует на подпространство, являющееся частью подпространства, куда проектирует E_λ . Кроме того, выполнено условие ортогональности:

$$E_\lambda E_\mu = E_{\min(\lambda, \mu)}.$$

Перейдем к изложению еще одного понятия, необходимого для дальнейшего. Речь будет идти об определении самосопряженности оператора в случае его неограниченности. Теперь равенство (8) имеет смысл только для $u, v \in \mathfrak{D}(A)$, так как на других векторах A просто неопределен. Операторы, удовлетворяющие этому условию, называются эрмитовыми и не обладают, вообще говоря, описанными выше свойствами самосопряженных операторов. Так, минимальный оператор Λ , построенный по выражению $L = \frac{d^2}{dx^2}$ в пространстве $L_2((a, b))$, будет эрмитовым: интегрируя по частям с учетом того, что $u(a) = u(b) = u'(a) = u'(b) = 0$, получим

$$\begin{aligned} (\Lambda u, v) &= \int_a^b u''(x) \bar{v}(x) dx = \\ &= \int_a^b u(x) \overline{v''(x)} dx = (u, \Lambda v) \quad (u, v \in \mathfrak{D}(\Lambda)) = C_0^\infty((a, b)). \end{aligned}$$

Вместе с тем для любого комплексного λ обратный оператор $(\Lambda - \lambda I)^{-1}$ не существует, точнее, он не определен всюду в $H = L_2((a, b))$: для любой функции $v \in C^\infty([a, b])$, удовлетворяющей уравнению $v'' - \lambda v = 0$, с помощью того же интегрирования по частям найдем

$$\begin{aligned} ((\Lambda - \lambda I)u, v) &= (u, (\Lambda - \lambda I)v) = 0 \\ (u \in \mathfrak{D}(\Lambda)) &= C_0^\infty((a, b)). \end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, функции $(\Lambda - \lambda I)u$ ортогональны отличным от нуля функциям указанного вида и не могут заполнять всего пространства $L_2((a, b))$. Итак, спектр Λ состоит из всей комплексной плоскости и не расположен на действительной оси, т. е. Λ заведомо несамопряжен.

Для неограниченных операторов определение самосопряженности более сложное, чем простое выполнение равенства (8), и мы его приводить не будем. Из рассмотренного примера оператора Λ видно, что если этот оператор расширить на более широкий, чем $C_0^\infty((a, b))$, запас функций, например на функции, равные нулю в точках a и b , то для возможности преобразования (12) необходимо требовать, чтобы и

$v(a) = v(b) = 0$. Это совместно с требованием $v'' - \lambda v = 0$ приводит для невещественных λ в отличие от предыдущего к равенству $v(x) = 0$ ($x \in [a, b]$). Таким образом, можно ожидать, что Λ окажется самосопряженным (эт., по существу, так и будет).

Из сказанного выше может показаться, что всякое «достаточно далекое» расширение Λ окажется самосопряженным. Однако это не так, поскольку нужно еще, чтобы расширение было эрмитовым, т. е. для него должно иметь место равенство (8), что автоматически не выполняется; это также видно из примеров.

Итак, возникает достаточно тонкая ситуация — нужно уметь расширить эрмитовый оператор до самосопряженного, причем его расширять нужно «достаточно аккуратно», не теряя эрмитовости. Важным результатом фон Неймана, полученным в 30-х годах, было установление необходимых и достаточных условий, накладываемых на эрмитовые операторы в произвольном гильбертовом пространстве, которые обеспечивают возможность такого расширения. Условия сводятся к тому, что так называемые дефектные числа оператора должны быть равными.

Для приведенного выше оператора Λ , порожденного $\frac{d^2}{dx^2}$, под одним дефектным числом следует понимать количество линейно независимых решений уравнений $u'' - \lambda u = 0$ из $L_2((a, b))$, где $\text{Im } \lambda > 0$, и под другим дефектным числом — то же самое, но при $\text{Im } \lambda < 0$ (примерно такой же смысл дефектные числа имеют и в общем случае). Мы видим, что в обоих случаях дефектное число равно 2, и поэтому здесь самосопряженные расширения действительно существуют. Пара (m, n) , составленная из дефектных чисел m и n , называется индексом дефекта оператора. Подчеркнем, что дефектные числа могут быть и бесконечными.

После этого описания некоторых определений и фактов теории операторов можно перейти к изложению результатов в соответствующих направлениях.

2

Теория расширений операторов

Существенным результатом в этом направлении расширений операторов явилось построение М. А. Наймарком (1940 г.) теории так называемых обобщенных разложений единицы, отвечающих эрмитовым операторам. Если эрмитов оператор A , действующий в гильбертовом пространстве H , допускает расширение до самосопряженного оператора в $\tilde{H}$, то разложение единицы, отвечающее этому самосопряженному расширению, можно отнести к исходному эрмитову оператору A . Так как подобное расширение не единственно, то оператор A имеет целое семейство разложений единицы. Однако помимо приведенного выше можно проводить также следующее построение. Расширим оператор A до самосопряженного оператора, действующего в некотором более широком гильбертовом пространстве $\tilde{H} \supset$

$\supset H$, построим соответствующее разложение единицы $\tilde{H}_\lambda$ в $\tilde{H}$, а затем рассмотрим его проекцию $P\tilde{E}_\lambda = E_\lambda$ на H (здесь P — оператор ортогонального проектирования векторов из $\tilde{H}$ на H). Так построенное семейство операторов E_λ называется обобщенным разложением единицы, отвечающим A . Его построение возможно и в случае неравных дефектных чисел у A , когда расширение этого оператора без выхода за пределы исходного пространства H до самосопряженного оператора невозможно. Замечательным является то обстоятельство, что все обобщенные разложения единицы можно описать внутренним образом. Это описание подобно описанию обычных разложений единицы с той лишь разницей, что отсутствует требование ортогональности (т. е. $E_\lambda E_\mu$, вообще говоря, отлично от $E_{\min(\lambda, \mu)}$), отражающее тот факт, что в конечномерном случае различные P_{λ_j} проектируют на взаимно ортогональные направления. Отметим, что неортогональным разложениям единицы в конкретных примерах операторов отвечают разложения по собственным функциям, которые часто эффективно используются.



М. А. Наймарк.

Вторым важным направлением является созданная М. Г. Крейном (1945—1947 гг.) теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов. Эрмитов оператор A называется полуограниченным, если справедливо неравенство $(Au, u) \geq c \|u\|^2$ ($u \in \mathfrak{D}(A)$) с некоторым $c \in (-\infty, \infty)$. Например, полуограниченным оператором будет минимальный оператор Λ , порожденный в $H = L_2(G)$ выражением

Лапласа $L = -\Delta = -\sum_{j=1}^n D_j^2$, при этом $c = 0$. У такого оператора

имеются всегда равные дефектные числа, и поэтому он допускает самосопряженные расширения в H . Все такие расширения описываются с помощью известных формул фон Неймана. Однако можно поставить вопрос о полуограниченных самосопряженных расширениях оператора A с c , не меньшим, чем исходное. Существование такого расширения было доказано К. О. Фридрихсом (США), а М. Г. Крейном дано описание всех подобных расширений и изучены вообще все полуограниченные расширения. Аналогичные результаты получены и для случая, когда в определении полуограниченности поменять знак неравенства или написать двустороннюю оценку. М. И. Вишик нашел (1950—1952 гг.) параметрическое описание множества расширений одного важного класса операторов (вообще говоря — неэрмитовых). Он дал приложение этой теории к исследованию общих краевых задач для эллиптических дифференциальных операторов второго порядка.

М. Ш. Бирман выяснил (1953 г.), что параметризация М. И. Вишика полезна и при изучении полуограниченных операторов и установил связи между теориями Крейна и Вишика. Эти результаты также нашли применение в теории краевых задач.

Резольвентой оператора A называется оператор $R_z = (A - zI)^{-1}$, где z — регулярная точка комплексной плоскости (т. е. z не принадлежит спектру). Если A самосопряжен, то

$$R_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} dE_{\lambda}, \quad (13)$$

откуда ясно, что R_z и E_{λ} соответствуют друг другу взаимно однозначно. Поэтому вместо описания всех E_{λ} , отвечающих некоторому эрмитову оператору, можно описывать все R_z , а эта задача аналитически более удобная. Подобное описание было получено в случае конечных дефектных чисел М. Г. Крейном в 1946 г. (в случае дефектных чисел, равных единице, — Крейном и Наймарком), а в общем случае — А. В. Штраусом (1950—1954 гг.).

Упомянутые выше описания существенны для дифференциальных уравнений. Ведь каждое расширение минимального оператора до самосопряженного оператора L означает наложение на функции из $\mathfrak{D}(L)$ некоторых граничных условий, более жестких, чем условия на $\mathfrak{D}(L)$ (их по существу нет), и более свободных, чем условия на $\mathfrak{D}(L)$. Эти условия таковы, что для оператора есть теорема разложения по собственным функциям (см. (11) и ниже). Исследование конкретного вида граничных условий в случае самосопряженных расширений полуограниченных обыкновенных дифференциальных операторов было проведено Крейном (1947 г.).

Крейну принадлежит также введение и изучение важного класса операторов, названных целыми (1944—1949 и 1965 гг.). Эти исследования стимулировались той ситуацией, которая имела место в классической степенной проблеме моментов. Для этих операторов, например, в случае индекса дефекта (1,1) характерно то, что существует плотное множество векторов f из гильбертова пространства H , таких, для которых вводится аналог преобразования Фурье $\tilde{f}(\lambda)$ по собственным векторам рассматриваемого оператора, причем $\tilde{f}(\lambda)$ является целой функцией. В случае индекса дефекта (m, m) ($m \leq \infty$) $f(\lambda)$ становится целой вектор-функцией со значениями в m -мерном пространстве. На целые операторы переносятся некоторые существенные конструкции степенной проблемы моментов. Ряд важных классов операторов будут целыми, например операторы, фигурирующие в степенной проблеме моментов, в теории уравнений как в обычных, так и в частных разностях, в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, в теории положительно определенных функций и т. д.

Отметим еще несколько результатов, связанных с описываемой тематикой. М. А. Красносельский и М. Г. Крейн установили (1947 г.), что можно дать разумное определение дефектных чисел для любого опе-

ратора с плотной областью определения. Именно ими была доказана так называемая инвариантность дефектных чисел. А. И. Плеснер еще до изложенных выше общих результатов М. А. Наймарка описал (1939 г.) спектральные функции операторов с индексом дефекта $(0, m)$ (так называемых максимальных). А. И. Плеснер и В. А. Рохлин разработали (1946 г.) теорию унитарных инвариантов операторов, действующих в несепарабельных пространствах, и обобщили теорему фон Неймана о счетном множестве коммутирующих самосопряженных операторов на случай любой мощности. Ряд других результатов по теории расширений был получен И. М. Глазманом, Н. А. Жихарем, И. Е. Луценко, Э. Р. Цекановским, Ю. Л. Шмудьяном, В. Э. Лянце, Б. И. Лошкаревым.

3

Разложение

по обобщенным собственным векторам

Перейдем теперь к вопросу о построении разложений по собственным векторам самосопряженного оператора. Дело в том, что общая спектральная теорема (11) еще не дает разложений типа первой формулы в (9), так как после применения равенства (11) к вектору $f \in H$ получаем соотношение

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} dE_{\lambda} f,$$

в котором не выделены собственные векторы, подобные слагаемым $(f, \varphi_{\lambda_j}) \varphi_{\lambda_j}$ в соотношении (9). Вместе с тем при построении конкретных спектральных разложений, например для самосопряженных дифференциальных операторов в пространстве $L_2((0, \infty))$, порожденных выражением L , удавалось (правда, со значительными трудностями) получить разложение типа (9), однако функции $\varphi_{\lambda}(x)$, вообще говоря, не входили в $L_2((0, \infty))$, хотя и удовлетворяли уравнению $L\varphi_{\lambda} = \lambda\varphi_{\lambda}$.

Первым существенным сдвигом в этом направлении была разработка М. Г. Крейном (1946 г.) так называемого метода направляющих функционалов, позволяющего устранить этот разрыв практически для большинства задач, в которых нет бесконечного вырождения спектра, что означает, например, для дифференциальных операторов конечность подпространства всех решений уравнения $L\varphi = \lambda\varphi$. Таким образом, методика Крейна позволила получить единым образом разложения по собственным функциям во многих случаях, в частности для самосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов. Вместе с тем эта методика не давала возможности охватить, например, эллиптические операторы, где разложения по-прежнему получались с большим трудом.



А. Г. Костюченко.

Более того, есть примеры самосопряженных операторов, для которых вообще не существовали полные наборы собственных функций, являющихся обычными функциями. Простейшим из таких примеров является оператор умножения на независимую переменную в пространстве $L_2((0,1))$: $(Af)(x) = xf(x)$ ($f \in L_2((0,1))$). Очевидно, этот оператор ограничен, его спектр совпадает с сегментом $[0, 1]$, так как лишь для $z \in [0, 1]$ и только для таких z оператор $((A - zI)^{-1}f)(x) = \frac{1}{\lambda - z} f(x)$ существует и ограничен.

Уравнение для его собственного вектора имеет вид $A\varphi = \lambda\varphi$ или, если учесть вид оператора, $-(x - \lambda)\varphi(x) = 0$. Отсюда ясно, что если считать $\varphi \in L_2((0, 1))$, то $\varphi(x) = 0$ почти везде. Отличными от нуля решениями последнего уравнения могут

служить лишь δ -функции δ_λ , сосредоточенные в точке λ , т. е. мы приходим к необходимости рассматривать собственные функции, являющиеся обобщенными. Подобная ситуация возникла и при исследовании Р. А. Александрияном (1949 г.) задачи С. Л. Соболева о собственных функциях вида $L\varphi = \lambda M\varphi$, где L и M — заданные дифференциальные операторы (например, $L = -D_1^2 - D_2^2$, $M = -D^2$). Здесь во всяком случае не удавалось найти полную систему гладких собственных функций и пришлось впервые ввести содержательное понятие обобщенной собственной функции.

Основополагающая работа в направлении построения полных систем обобщенных собственных функций самосопряженных операторов принадлежит И. М. Гельфанду и А. Г. Костюченко (1955 г.). В ней было показано, что если исходное гильбертово пространство L_2 суммируемых с квадратом функций оснастить ядерными линейными топологическими пространствами Φ и Φ' , т. е. предположить выполнение включения $\Phi' \supseteq L_2 \supseteq \Phi$ (Φ' — пространство функционалов над Φ (см. § 1)), с соответствующим согласованием топологий, то всякий самосопряженный оператор A в L_2 имеет полную систему обобщенных собственных функций φ из Φ' и справедлив аналог первой из формул (9).

Затем Ю. М. Березанским (1956—1959 гг.) и Г. И. Кацом (1958—1961 гг.) было показано, что вместо оснащения исходного гильбертового пространства $H = H_0$ при помощи ядерного топологического пространства Φ можно ограничиться оснащением посредством гильбертовых пространств: $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$, где H_- — пространство с негативной нормой, состоящее из функционалов над H_+ (подробнее см. стр. 704). Существенно лишь, чтобы оператор вложения $H_+ \rightarrow H_0$

был так называемым оператором типа Гильберта — Шмидта (это условие и необходимо при рассмотрении любых A). Таким образом, пространство H «максимально» приближается к H_0 и собственно функции становятся обобщенными конечного порядка с «минимальной» обобщенностью (в конечномерном случае вообще $H_- = H_0 = H_+$). Теперь для произвольного самосопряженного оператора пишется не только формула (11), но и аналог формулы (10):

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\lambda} d\rho(\lambda). \tag{14}$$

Здесь $d\rho(\lambda)$ — некоторая мера, сосредоточенная на спектре A (спектральная мера), а оператор $P_{\lambda} = \frac{dE_{\lambda}}{d\rho(\lambda)}$ проектирует на подпространство собственных векторов, отвечающих собственному значению λ , однако в отличие от (10) эти векторы являются обобщенными и лежат в H_- .

4 Несамосопряженные операторы

При рассмотрении несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве возникают существенные трудности, связанные прежде всего с отсутствием канонического вида таких операторов. Для самосопряженного оператора A справедливы представления

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_{\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_{\lambda} d\rho(\lambda)$$

(см. формулы (11) и (14)), обобщающие хорошо известное приведение эрмитовой матрицы к диагональному виду в базисе из собственных векторов. Для общих же несамосопряженных операторов не удастся обобщить, например, приведение матрицы к жордановой форме. Далее, для несамосопряженных операторов одни собственные векторы, как правило, не образуют полной системы в пространстве H (т. е. используя только их, нельзя получить разложения типа (9)), и нужно добавлять еще так называемые присоединенные векторы, что усложняет картину. Это видно на примере одноклеточного оператора — оператора в E_n с матрицей

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix} \tag{15}$$

Его спектр состоит только из числа a , причем a отвечает лишь один нормированный собственный вектор $\varphi_1 = (1, 0, \dots, 0)$, не образующий



И. М. Глазман.

базиса в E_n . Остальные векторы базиса

$$\varphi_2 = (0, 1, 0, \dots, 0);$$

$$\varphi_3 = (0, 0, 1, \dots, 0); \dots;$$

$$\varphi_n = (0, 0, \dots, 1)$$

удовлетворяют соотношению $A\varphi_j = \varphi_{j-1} + a\varphi_j$ ($j = 2, \dots, n$) и называются присоединенными.

Рядом математиков были получены различные критерии полноты системы собственных и присоединенных векторов вполне непрерывных операторов (как известно, такие операторы имеют дискретный спектр, сходящийся к нулю, и обычные собственные векторы). Весьма сильным и в то же время первым является признак М. В. Келдыша (1951 г.) подобной полноты. Именно, полнота имеет место в случае оператора A вида $A =$

$= B(I + S)$, где B — самосопряженный вполне непрерывный оператор с достаточно быстро убывающими к нулю собственными числами, а S — произвольный вполне непрерывный оператор. Аналогичная теорема была доказана Келдышем и в случае уравнений с более сложной зависимостью от λ , например вместо уравнения $(A - \lambda I)\varphi = 0$, определяющего собственные значения, рассматривалось уравнение $(I - T_0 - \lambda BT_1 - \dots - \lambda^{n-1}BT_{n-1} - \lambda^n B)\varphi = 0$, где B имеет прежний вид, T_0 вполне непрерывен, а $T_1, \dots, T_{n-1}$ ограничены (так называемые собственные значения операторного пучка). При этом было введено важное понятие n -кратной полноты и доказана даже такого типа полнота для системы собственных и присоединенных векторов.

Теорема Келдыша стимулировала большое количество исследований по проблеме полноты. Так, Д. Э. Аллахвердиев обобщил эту теорему, заменив самосопряженность оператора B его нормальностью. Ряд признаков полноты начиная с 1954 г. был получен М. С. Лившицем, Б. Р. Мукминовым, Л. А. Сахновичем, И. М. Глазманом. Важные результаты по несамосопряженным операторам принадлежат В. Б. Лидскому. Из них отметим его теорему о совпадении матричного и спектрального следов для ядерных операторов, из которой, в частности, следуют тонкие критерии полноты, теорему о суммируемости по Абелю разложений по собственным и присоединенным векторам и т. д. В последнее время ряд важных результатов по проблеме полноты был получен М. Г. Крейном, И. Ц. Гохбергом, В. И. Мацаевым, А. С. Маркусом. В частности, М. Г. Крейн (совместно с Г. Лангером) детально исследовал так называемый квадратичный пучок $A\varphi + \lambda B\varphi + C\lambda^2\varphi = 0$, где A, B, C — самосопряженные вполне непрерывные

операторы. При установлении полноты часто предполагается диссипативность рассматриваемого оператора A . Это означает, что если представить оператор A в виде $A = A_1 + iA_2$, где A_1 и A_2 самосопряжены (вещественная и мнимая части A), то требуется неотрицательность оператора A_2 (т. е. $(A_2 u, u) \geq 0$ ($u \in H$)). М. Г. Крейн получил свои результаты, существенно используя построенную им теорию определителей возмущений. В ряде случаев для рассматриваемых сейчас операторов удается получить ту или иную информацию о поведении их спектра, а также доказать теоремы разложения (а не только полноты).

Перейдем к рассмотрению результатов, касающихся канонических представлений несамосопряженных операторов. М. С. Лившицу удалось показать (1952—1958 гг.), что если ограниченный оператор $A = A_1 + iA_2$ таков, что A_2 вполне непрерывен с достаточно быстро убывающими к нулю собственными числами, то его можно привести к некоторому каноническому виду — треугольной модели типа

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Эта операторная матрица действует естественным образом в пространстве $H = H_1 \oplus H_2$, где H_1 — некоторое гильбертово пространство вектор-функций дискретного аргумента, а H_2 — подобное пространство вектор-функций непрерывного аргумента. В выражении (16) A_{11} — треугольная матрица, а A_{22} — ее континуальный аналог, именно сумма оператора умножения на функцию — аналога диагональной матрицы — и интегрального оператора типа Вольтерра — аналога треугольной матрицы с нулями на главной диагонали.

Результаты М. С. Лившица послужили толчком к разработке, начиная с 1959 г., рядом математиков (Л. А. Сахнович, М. С. Бродский, И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, В. И. Мацаев, Ю. Л. Шмультян, В. Т. Поляцкий, А. В. Кужель) моделей некоторых классов несамосопряженных операторов, выяснению связей, имеющих между вещественной и мнимой частями вольтеррова оператора и т. д. Мы сейчас не очень точно опишем существенное представление, полученное для вольтеррова оператора Л. А. Сахновичем, М. С. Бродским, И. Ц. Гохбергом и М. Г. Крейном (1959—1960 гг.) (вольтерровым оператором называется вполне непрерывный оператор, спектр которого состоит только из 0). Множество $\{P\}$ ортогональных проекторов P называется цепочкой, если оно упорядочено естественным образом ($P_1 < P_2$, если P_1 проектирует на подпространство, являющееся частью подпространства, куда проектирует P_2 , содержит операторы 0 и 1 (например, операторы E_λ в (11) образуют цепочку). Естественно вводится понятие разрыва в цепочке: проекторы P_- и P_+ определяют разрыв, если между P_- и P_+ нет ни одного проектора из цепочки. Цепочка называется максимальной, если она не является правильной частью другой цепочки. Очевидно, такая цепочка характеризуется тем, что либо у нее нет разрыва, либо подпространство $(P_+ - P_-)H$, где P_- , P_+



М. С. Бродский.

определяют разрыв, одномерно (отметим, что цепочка E_λ из (11) не является, вообще говоря, максимальной). Цепочка $\{P\}$ называется собственной цепочкой оператора A , если для любого P из этой цепочки подпространство PH инвариантно относительно A , т. е. A при действии на векторы из PH переводит их опять в векторы из PH . С помощью результатов Ароншайна и Смита доказано, что у всякого вполне непрерывного оператора существует, по крайней мере, одна собственная максимальная цепочка. Если этот оператор вольтерров, то справедливо представление

$$A = 2i \int_{\{P\}} PA_2 dP \quad (A = A_1 + iA_2) \quad (17)$$

с естественно вводимым понятием интеграла. Обратно, интеграл типа (17) изображает некоторый вольтерров оператор.

Отметим еще один вопрос, рассматриваемый при изучении в изложенном выше плане несамосопряженных операторов — это выяснение того, когда оператор будет одноклеточным, т. е. когда его инвариантные подпространства упорядочены в описанном сейчас смысле (в конечномерном пространстве одноклеточные операторы изображаются матрицами вида (15)) (М. С. Бродский, Л. А. Сахнович, Г. Э. Кисилевский).

С рассмотренными вопросами тесно связана впервые изученная В. П. Потаповым (1950—1955 гг.) задача о мультипликативном представлении аналитических оператор-функций; дальнейшие работы в этом направлении принадлежат М. С. Лившицу, Ю. П. Гинзбургу, М. С. Бродскому, И. Ц. Гохбергу и М. Г. Крейну.

В другом плане исследовались несамосопряженные операторы Ю. И. Любичем и В. И. Мацаевым. Ими было показано, что если спектр оператора A вещественный и на рост его резольвенты при приближении к спектру наложены достаточно широкие ограничения, то можно строить широкие наборы функций $f(A)$ оператора, отвечающих функциям ска-



Л. А. Сахнович.

лярного аргумента $f(\lambda)$. Если A самосопряжен, то в качестве $f(\lambda)$ можно брать характеристические функции; в рассматриваемом более общем случае можно брать «почти характеристические» функции и доказать полноту системы соответствующих инвариантных подпространств.

Исследования по теории несамосопряженных операторов во многом стимулировались работами М. С. Лившица (1947 г.), касающимися построения так называемых квазисамосопряженных расширений эрмитового оператора A с конечными дефектными числами. Таким расширением называется, вообще говоря, несамосопряженный оператор $B \supset A$, однако такой, что для «большинства» не вещественных z оператор $(B - zI)^{-1}$ существует. Развитие теории таких расширений для бесконечных дефектных чисел были даны А. В. Штраусом. О смысле этих расширений с точки зрения дифференциальных уравнений см. стр. 705.



А. В. Штраус.

5

Операторы в пространстве с индефинитной метрикой

Примером пространства с индефинитной метрикой служит совокупность Π_κ последовательностей $u = (u_1, u_2, \dots)$,

$\sum_{j=1}^{\infty} |u_j|^2 < \infty$, для которых скалярное произведение задается формулой

$$\langle u, v \rangle = - \sum_{j=1}^{\kappa} u_j \bar{v}_j + \sum_{j=\kappa+1}^{\infty} u_j \bar{v}_j.$$

Таким образом, в выражении для $\langle u, u \rangle$ есть κ отрицательных квадратов и для некоторых векторов u возможна отрицательность $\langle u, u \rangle$. Пространство Π_κ является естественным обобщением пространства Минковского, фигурирующего в теории относительности (там векторы u четырехмерны и $\kappa = 1$). Можно вводить подобные пространства и при $\kappa = \infty$, задавать их аксиоматически, выяснять различные геометрические факты в этих пространствах. Соответствующие работы принадлежат М. Г. Крейну, И. С. Иохвидову и Ю. П. Гинзбургу (1956—1965 гг.).

Рассмотрим ограниченные эрмитовы операторы в Π_κ , т. е. операторы A , такие, что $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$ ($u, v \in \Pi_\kappa$). Так как $\langle u, v \rangle =$

$= (Ju, v)$, где $(\cdot, \cdot)$ — обычное скалярное произведение в l_2 , а J — оператор с матрицей вида

$$* \left\{ \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \right.$$

то эрмитовость A , как легко видеть, означает выполнение соотношения $A^* = JAJ$, где A^* — в обычном смысле сопряженный с A оператор (т. е. оператор, определенный из равенства $(Au, v) = (u, A^*v)$). Следовательно, операторы, эрмитовые в индефинитной метрике, не являются самосопряженными в обычном смысле. Поэтому их теория — это теория несамосопряженных операторов специального вида. Она развивалась начиная с 1944 г. Л. С. Понтрягиным, М. Г. Крейном, И. С. Иохвидовым и А. В. Кужелем. В частности, Л. С. Понтрягиным была доказана (1944 г.) важная теорема о том, что для всякого самосопряженного оператора в Π_κ существует κ -мерное неположительное подпространство T , инвариантное относительно A (неположительность T означает, что $\langle u, u \rangle \leq 0$ для $u \in T$). В случае $\kappa = 1$ близкие результаты были получены С. Л. Соболевым. Эта теорема затем была установлена (1950—1956 гг.) И. С. Иохвидовым и М. Г. Крейном для общих пространств с индефинитной метрикой, содержащей конечное число κ отрицательных квадратов. Ими же более детально исследовалась структура самосопряженных и унитарных операторов в Π_κ (унитарным оператором называется оператор, действующий из всего пространства во все пространство и сохраняющий скалярное произведение). М. Г. Крейном и Г. Лангером (ГДР) был установлен (1964 г.) аналог спектральной теоремы типа (11) для самосопряженных в Π_κ операторов (теорема, естественно, более сложная).

Пространства с индефинитной метрикой и операторы в них применялись в квантовой теории поля (Ф. А. Березин), в теории устойчивости канонических систем, в теории демпфированных систем (М. Г. Крейн, Г. Лангер, В. И. Дергузов, В. А. Якубович). Об их применении в теории интегральных представлений будет идти речь в следующем разделе. Недавно М. А. Наймарком развита теория алгебр операторов в пространстве с индефинитной метрикой.

Спектральная теория самосопряженных дифференциальных, разностных и других операторов

Рассмотрим теперь ряд применений результатов предыдущего раздела. Речь будет в основном идти о самосопряженных операторах, хотя мы будем затрагивать и несамосопряженный случай.

1

Построение разложений по собственным функциям для дифференциальных операторов

Еще в XIX в. при исследовании задачи о колебании конечной струны появилась необходимость разложения достаточно произвольной функции в ряд по так называемым собственным функциям дифференциального оператора. Именно, если рассматривать, например, однородную струну длины l с закрепленными концами и решать волновое уравнение, описывающее ее колебания, методом разделения переменных (метод Фурье), то мы приходим к необходимости разлагать функцию, описывающую начальную форму струны, в ряд по ортогональному базису, состоящему из собственных функций краевой задачи

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \lambda\varphi \quad (x \in [0, l]), \quad \varphi(0) = \varphi(l) = 0. \quad (18)$$

Эта задача решается элементарно: лишь для счетной последовательности собственных значений λ (именно, для $\lambda_j = \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2, j = 1, 2, \dots$)

существуют отличные от нуля решения $\varphi_{\lambda_j}(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{j\pi}{l} x$ и вопрос сводится к возможности разложения функции в обычный ряд Фурье. Однако уже в случае неоднородной конечной струны с достаточно гладким распределением неоднородности уравнение в задаче (18) заменяется на $-\frac{d^2\varphi}{dx^2} + v(x)\varphi = \lambda\varphi$, где $v(x)$ — некоторый вещественный коэффициент, и вопрос усложняется. Его окончательное положительное решение было получено в конце XIX — начале XX в. В. А. Стекловым.

Наряду с задачами на собственные значения в конечном интервале возникла необходимость рассматривать подобные задачи в неограниченной области. Так, при нахождении решения задачи Коши для уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{d\psi(t)}{dt} = H\psi(t), \quad (19)$$

описывающего эволюцию квантово-механической системы с оператором энергии H , возникает необходимость рассматривать задачу на собственные значения вида $H\varphi = \lambda\varphi$. В случае одномерного движения частицы получим

$$H\varphi = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} + v(x)\varphi(x) = \lambda\varphi(x) \quad (-\infty < x < \infty, \quad \text{Im } v(x) = 0), \quad (20)$$

где применение $-\frac{\hbar^2}{2\mu} \cdot \frac{d^2}{dx^2}$ — оператор кинетической энергии, а умножение на $v(x)$ — оператор потенциальной энергии, $\mu > 0$ — масса частицы.

Математики заинтересовались задачами, подобными (20), только в 40-е годы XX в. При этом выяснилась любопытная ситуация — задача типа (20) была весьма полно исследована Г. Вейлем еще в 1910 г., однако его работа в течение более тридцати лет не получала достаточного резонанса. В 40-х годах началось бурное развитие спектральной теории дифференциальных операторов, причем значительная часть исследований проводилась советскими математиками.

Поясним сперва операторный смысл соответствующих постановок задач, рассматривая общее обыкновенное дифференциальное выражение

$$L = \sum_{0 \leq \alpha \leq r} a_\alpha(x) \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}. \quad (21)$$

В пространстве $L_2((a, b))$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) определим по формуле (21) минимальный оператор Λ (см. стр. 664), грубо говоря $\Lambda u = Lu$, $u \in \mathfrak{D}(\Lambda) = C_0^\infty((a, b))$ (в действительности нужно в качестве Λ взять так называемое замыкание определенного сейчас оператора). При просто выписываемых условиях на коэффициенты $a_\alpha(x)$ оператор Λ будет эрмитов и будет допускать самосопряженные расширения, как например на бесконечном интервале оператор, отвечающий выражению в (20). Для каждого расширения можно выписать формулы (11), трудность заключается в том, что требуется выяснить вид E_λ для операторов, порождаемых выражением (21).

В случае дифференциального выражения второго порядка и бесконечного интервала соответствующие результаты получил еще Г. Вейль, позже их развил Э. Ч. Титчмарш. Б. М. Левитан разработал (1950 г.) метод предельного перехода от конечного интервала к бесконечному для получения этих результатов. Было показано, что для задачи Штурма — Лиувилля на полуоси

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2} + v(x)\varphi(x) = \lambda\varphi(x) \quad (0 \leq x < \infty) \quad (22)$$

с вещественным непрерывным коэффициентом $v(x)$ и некоторым граничным условием в нуле

$$\begin{aligned} \alpha\varphi(0) + \beta\varphi'(0) &= 0 \\ (\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Im} \beta = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 &= 1) \end{aligned} \quad (23)$$

справедливо равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^\infty \tilde{f}(\lambda) \overline{\tilde{g}(\lambda)} d\rho(\lambda) \quad (24)$$

для произвольных «достаточно хороших» (например, финитных) функций $f(x)$, $g(x)$. Здесь $d\rho(\lambda)$ — некоторая мера (спектральная), а $\tilde{f}(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$ по собственным функциям задачи (22):

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(x) \varphi(x; \lambda) dx \quad (-\infty < \lambda < \infty), \quad (25)$$

причем $\varphi(x; \lambda)$ — решение задачи Коши для уравнения (22) с некоторыми начальными условиями в нуле, такими, чтобы не нарушалось (23) (например, $\varphi(0; \lambda) = \beta$, $\varphi'(0; \lambda) = -\alpha$).

Граничное условие (23) отвечает эрмитовому или самосопряженному расширению минимального оператора. Именно, область определения этого расширения состоит из достаточно гладких функций, удовлетворяющих (23) и аннулирующихся на $+\infty$. Оператор определяется соответствием $u \rightarrow Lu$. Если этот оператор самосопряжен, то $d\rho(\lambda)$ в формуле (24) определяется однозначно, если только эрмитов — неоднозначно. Самосопряженность или эрмитовость зависит от поведения коэффициента $v(x)$ на бесконечности.

Если в выражении (24) взять в качестве $g(x)$ δ -последовательность, стягивающуюся к некоторой точке полуоси, то в пределе получим формулу обращения

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x) \varphi(x; \lambda) d\rho(\lambda) \quad (0 \leq x < \infty), \quad (26)$$

подобную первой формуле (9). Сравнивая соотношения (24), (25) и (26) с (14) и (11) этого раздела, получаем, что P_λ и E_λ являются интегральными операторами с ядрами

$$P_\lambda \sim \Phi(x, y; \lambda) = \varphi(x; \lambda) \varphi(y; \lambda), \quad (27)$$

$$E_\lambda \sim \Theta(x, y; \lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \Phi(x, y; \mu) d\rho(\mu) = \int_{-\infty}^{\lambda} \varphi(x, \mu) \varphi(y; \mu) d\rho(\mu).$$

Первое из этих ядер называется спектральным ядром, второе — спектральной (обобщенной) функцией; $d\rho(\lambda)$ — спектральная мера, та же, что и в выражении (14).

Подобные результаты справедливы и для любого самосопряженного расширения минимального оператора Λ , порожденного общим выражением (21). При этом роль $d\rho(\lambda)$ будет играть матричная мера (размерность матриц не больше r), преобразование Фурье (25) превратится в вектор-функцию от λ (в формуле (25) вместо $\varphi(x; \lambda)$ будет фигурировать фундаментальная система решений $\varphi_j(x; \lambda)$ задачи Коши или часть такой системы). Эти результаты были получены в 1946—1950 гг. М. Г. Крейном при помощи разработанного им метода направляющих функционалов и независимо в 1950 г. К. Кодаира. Теория разложений для операторного уравнения Штурма — Лиувилля (22), когда $\varphi(x)$ — вектор-функция, а $v(x)$ — функция, значениями которой служат ограниченные самосопряженные операторы, была построена Ф. С. Рофе-Бекетовым (1958 г.).

Рассмотрим теперь случай уравнений в частных производных. Для произвольного выражения

$$L = \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad (28)$$

как и ранее, вводится минимальный оператор Λ и, в предположении его эрмитовости, рассматривается некоторое самосопряженное расши-

рение Λ (предположение эрмитовости сводится к тому, что $L^+ = L$, где $L^+ = \sum_{|\alpha| \leq r} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\overline{a_\alpha(x)u})$). Получение формул типа (24) — (27) сейчас значительно усложняется в связи с возможностью бесконечного вырождения спектра. Аналог этих формул для трехмерного стационарного уравнения Шредингера

$$-\Delta u + v(x)u = \lambda u, \quad (29)$$

рассматриваемого внутри области G , ограниченной или не ограниченной, был получен в 1953 г. А. Я. Повзнером, а для общих эллиптических операторов — Л. Гордингом (Швеция) и Ф. Е. Браудером (США) в 1954 г. Существование и гладкость спектрального ядра $\Phi(x, y; \lambda)$ и спектральной функции $\Theta(x, y; \lambda)$ вплоть до границы области, удовлетворение ими граничных условий и другие свойства вблизи границы области установлены Ю. М. Березанским (1963—1965 гг.) и Ф. Е. Браудером (1965 г.). Формулы для рассматриваемого сейчас случая выглядят так:

$$\int_G f(x) \bar{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_G \int_G \Phi(x, y; \lambda) f(y) \bar{g}(x) dx dy \right\} d\rho(\lambda), \quad (30)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_G \Phi(x, y; \lambda) f(y) dy \right\} d\rho(\lambda), \quad (31)$$

$$P_\lambda \sim \Phi(x, y; \lambda) = \sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \varphi_\alpha(x; \lambda) \bar{\varphi}_\alpha(y; \lambda),$$

$$E_\lambda \sim \Theta(x, y; \lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \Phi(x, y; \mu) d\rho(\mu). \quad (32)$$

Здесь $\varphi_\alpha(x; \lambda)$ — некоторые решения уравнения $L\varphi = \lambda\varphi$, $N_\lambda \leq \infty$ — кратность точки спектра λ .

Всюду выше в случае неограниченной области G для λ , не являющегося дискретной точкой спектра, соответствующая собственная функция $\varphi(x; \lambda)$ по существу не будет собственной функцией в смысле определения, данного на стр. 665, так как она не входит в гильбертово пространство $L_2(G)$, где действует оператор. Если же L не есть обыкновенное или эллиптическое дифференциальное выражение, то собственные функции $\varphi_\alpha(x; \lambda)$ будут, как правило, даже обобщенными функциями. В этом случае можно также писать соотношения (30)—(32), только их надо должным образом истолковывать. Появляющиеся обобщенные функции все конечного порядка, так, независимо от характера L они имеют вид $D_1 \cdots D_n \psi_\alpha(x; \lambda)$, где $\psi_\alpha(x; \lambda)$ — обычная функция (такое представление неоднозначно). Эти результаты получены И. М. Гельфандом и А. Г. Костюченко (1955 г.) и Ю. М. Березанским (1956—1957 гг.). В случае обыкновенных и эллиптических уравнений обобщенные собственные функции будут обычными — как обобщенные

решения уравнений $L\varphi = \lambda\varphi$, и можно прийти к приведенным ранее фактам. Более тонкая структура обобщенных собственных функций для важных конкретных дифференциальных операторов выяснялась Р. А. Александрияном (1949—1960 гг.), а также С. Г. Овсепяном, Г. В. Вирабяном, Р. Т. Денчевым и др.

Цикл работ И. С. Каца был посвящен обобщению спектральной теории на операторы типа операторов колебания струны, обобщающие оператор Штурма — Лиувилля. Им были исследованы как общие вопросы конструирования оператора, разложений, так и более конкретные вопросы о характере спектра и т. п.

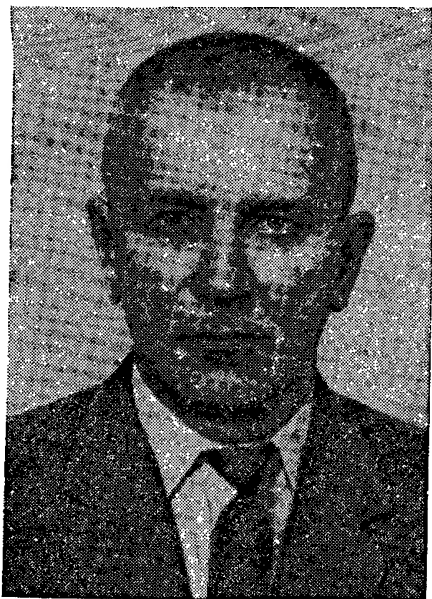
В последнее время появилось значительное количество работ, посвященных эллиптическим уравнениям со спектральным параметром в граничных условиях, соответствующие задачи связаны с некоторыми вопросами гидродинамики. В простейшем случае оператора Лапласа эти задачи изучались шведскими математиками А. Плейелем и Ж. Удновым. Пример такой задачи: пусть G — ограниченная область с границей Γ , по функции $u(\xi)$ на Γ ищется гармоническая функция $U(x)$ в G такая, что $U(\xi) = u(\xi)$ на Γ . Затем рассматривается оператор $u(\xi) \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)(\xi) = (Au)(\xi)$ (ν — внешняя нормаль) и задача на собственные значения для него: $A\varphi = \lambda\varphi$ (заметим, что A эрмитов). Подобная задача обобщалась в различных направлениях в работах С. Г. Крейна, Г. И. Лаптева и Н. К. Аскерова, Р. М. Гарипова, Н. Д. Копачевского и А. Д. Мышкиса, В. В. Барковского, А. Н. Комаренко.

2

Вопросы локализации спектра и асимптотики для самосопряженных дифференциальных операторов

Построим по выражению $L = L^+$ в $G = E_n$ минимальный оператор A . Он будет эрмитовым, однако, вообще говоря, несамосопряженным. Возникает важный вопрос об условиях, какие надо наложить на коэффициенты, чтобы обеспечить самосопряженность оператора (если они постоянны, то оператор самосопряжен).

Аналогичные вопросы возникают и для области G с границей. Ставится также более тонкая задача о подсчете индекса дефекта (m, n) минимального оператора. В этом направлении получены важные результаты: И. М. Глазман (1949—1950 гг.), М. А. Наймарк (1952 г.), С. А. Орлов (1953—1956 гг.), М. В. Федорюк (1966 г.) для обыкновенных дифференциальных операторов, А. Я. Повзнер (1953 г.), Б. М. Левитан (1961 г.) — для уравнения Шредингера, Л. П. Нижник (1959 г.) — для общих операторов в частных производных. Приведем, например, следующий результат Повзнера. Пусть выражение (29) Шредингера полуограничено (т. е. $(Lu, u) \geq c\|u\|^2$, $c \in (-\infty, \infty)$, $u \in C_0^\infty(E_n)$). Тогда минимальный оператор самосопряжен. Отметим, что в исследованиях, посвященных обыкновенным дифференциальным



А. Я. Повзнер.

операторам, существенную роль играют асимптотические формулы для решений уравнения $Lu = \lambda u$, в частности формулы И. М. Рапопорта.

Еще большее число работ посвящено задаче исследования локализации спектра самосопряженных дифференциальных операторов. Известно, что расположение спектра может быть самым разнообразным в зависимости от поведения коэффициентов. Так, например, если в задаче (20) $v(x) \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$, то спектр дискретный. Если потенциал $v(x)$ периодический, то спектр заполняет отдельные интервалы положительной полуоси, совпадающие с зонами устойчивости, если $v(x) \rightarrow 0$ достаточно быстро при $|x| \rightarrow \infty$, то спектр непрерывный на $[0, \infty)$, а на $(-\infty, 0)$ могут существовать сгущающиеся к нулю собственные значения.

При исследовании спектра обыкновенных дифференциальных операторов применялся как аналитический подход (Б. М. Левитан (1950 г.), И. М. Рапопорт (1951—1954 гг.), М. А. Наймарк (1954 г.)), связанный с исследованием асимптотики решений уравнений, так и различные операторные подходы, которые дают здесь наиболее сильные и общие результаты. К таким подходам прежде всего следует отнести метод расщепления, развитый И. М. Глазманом (1950—1963 гг.). В случае обыкновенного дифференциального оператора A , порожденного выражением L вида (21), метод состоит в следующем. Фиксируем некоторую точку $x_0 \in (a, b)$ и рассматриваем функции из $\mathfrak{D}(A)$, аннулирующиеся в окрестностях x_0 . Сужение A на эти функции обозначим A_0 . Ясно, что оператор A_0 действует в ортогональной сумме $L_2((a, x_0)) \oplus L_2((x_0, b)) = L_2((a, b))$. Обозначая его части в первом и втором пространствах соответственно через $A_{0,a}$ и $A_{0,b}$, получим $A_0 = A_{0,a} \oplus A_{0,b}$. Построим теперь расширения $A_{0,a}$ и $A_{0,b}$ до самосопряженных операторов с помощью подходящих граничных условий в точке x_0 ; эти расширения обозначим $\tilde{A}_{0,a}$ и $\tilde{A}_{0,b}$. Операторы A и $\tilde{A}_{0,a} \oplus \tilde{A}_{0,b}$ являются различными расширениями одного и того же оператора A_0 . Благодаря конечномерности пространства решений уравнения $Lu = \lambda u$ спектры A и $\tilde{A}_{0,a} \oplus \tilde{A}_{0,b}$ будут «достаточно близки». Выбирая тем или иным способом точку x_0 , в зависимости от характера коэффициентов, можно исследовать спектры $\tilde{A}_{0,a}$ и $\tilde{A}_{0,b}$ и тем самым спектр A . Ясно, что метод расщепления позволяет при изучении сингулярных свойств спектра исключить значения коэффициентов на конечном расстоянии и выявлять влияние на спектр их поведения на ∞ . С некоторыми осложнениями, связанными с бесконечностью пространств

ва решений уравнения $Lu = \lambda u$, метод расщепления применяется и для уравнений в частных производных.

В 1952 г. А. М. Молчанов получил необходимый и достаточный критерий дискретности спектра оператора Шредингера. Этот результат сразу обратил на себя внимание. Он был получен при помощи леммы Реллиха путем изучения полной непрерывности оператора вложения из пространства со скалярным произведением $\langle u, v \rangle = (Lu, v)$ в L_2 . Этот результат недавно обобщил Р. С. Исмаилов на случай неограниченного снизу потенциала.

В 1954—1962 гг. М. Ш. Бирман развил еще один операторный метод исследования спектра, основанный на некоторых новых теоремах теории возмущений квадратичных форм. Были даны многочисленные применения развитой техники. Аналитически ряд вопросов исследования спектра сводился к проверке полной непрерывности некоторых специальных операторов вложения.

Л. П. Нижник впервые рассмотрел (1959—1963 гг.) спектры неэллиптических операторов в частных производных. Техника рассмотрения тесно связана с заметкой И. М. Гельфанда (1952 г.) — одной из первых, в которых для исследования спектра дифференциальных операторов применялись операторные методы. Г. М. Жислин и А. Г. Сигалов получили (1957—1965 гг.) важные результаты, посвященные исследованию характера спектра оператора Шредингера, описывающего взаимодействие многих частиц. Ряд результатов относительно характера спектра дифференциальных операторов в последнее время был получен В. Б. Лидским, Ф. С. Рофе-Бекетовым, И. С. Кацом, Б. С. Павловым, Б. Я. Скачком, Р. М. Мартиросяном, М. В. Федорюком, Л. А. Сахновичем и др., при этом часто рассматривались и несамосопряженные операторы; ряд близких вопросов для разностных операторов (якобиевых матриц) исследовался П. Б. Найман.

Дальнейший большой цикл исследований связан с установлением асимптотики при $\lambda \rightarrow \infty$ спектральной меры $d\rho(\lambda)$ и спектральной функции $\Theta(x, y; \lambda)$ дифференциального оператора, а также с выяснением характера сходимости разложений типа (26), (31). В отношении асимптотического поведения $\rho(\lambda)$ для задачи Штурма — Лиувилля (22) весьма существенные результаты были получены В. А. Марченко (1952—1955 гг.) при помощи развития так называемых операторов преобразования, связывающих решения уравнения Штурма — Лиувилля с членом $v(x)\varphi(x)$ и без него. Эти результаты показывают, что $\rho(\lambda)$ ведет себя в первом приближении так, как при $v(x) \equiv 0$.

Асимптотика спектральной функции как для уравнения Штурма — Лиувилля, так и для уравнения Шредингера, исследовалась в ряде работ Б. М. Левитана (1953—1957 гг.) и В. А. Марченко. Методика исследования заключалась в использовании волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu,$$
 записи решений задачи Коши для него по методу Римана и по методу Фурье, сравнения этих записей и применения тауберовских теорем. Получены важные результаты, показывающие, что поведение $\Theta(x, y; \lambda)$ будет примерно таким же, как и в случае выражения



Г. И. Кац.

L_0 с постоянными коэффициентами, получающимися из $a_\alpha(x)$ фиксацией x . Эти исследования позволили Б. М. Левитану доказать так называемые теоремы о равносходимости: сходимость интегралов типа (26), (31) будет примерно такой же, как и для интегралов Фурье.

В случае оператора L высокого порядка предыдущая методика, связанная с использованием волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu, \text{ не дает каких-либо результа-}$$

тов, так как это уравнение уже не будет гиперболическим. Тем не менее А. Г. Костюченко удалось получить (1964—1965 гг.) результаты, аналогичные описанным выше, для обыкновенных уравнений произвольного порядка. Это удалось сделать с привлечением параболических уравнений

$$\text{вида } \frac{\partial u}{\partial t} = Lu. \text{ Здесь существенную роль}$$

сыграли некоторые результаты С. Д. Эйдельмана, касающиеся подобных уравнений. Для гипоеллиптических операторов некоторые из описанных результатов получил В. Н. Горчаков (1963—1965 гг.).

Все сказанное о равносходимости интегралов типа (26), (31) справедливо и после формального дифференцирования соответствующих равенств (Б. М. Левитан и И. С. Саргсян (1955—1957 гг.), А. Г. Костюченко (1964—1965 гг.)). Б. М. Левитан (1955—1958 гг.) и А. Г. Костюченко (1964—1965 гг.) получили асимптотику при $\lambda \rightarrow \infty$ для числа $N(\lambda)$ собственных чисел, не превосходящих λ , в случае дискретного спектра для различного типа дифференциальных операторов. Эти результаты усиливают и обобщают подобные асимптотики Уэтта — Мандля — Титчмарша. В частности, Костюченко рассмотрел весьма общие эллиптические операторы во всем пространстве (см. также работы Б. Я. Скачека, Н. В. Кузнецова и Б. В. Федосова).

К этому кругу вопросов примыкают исследования В. А. Ильина (1955—1966 гг.), получившего предельно точные теоремы об абсолютной и равномерной сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа в ограниченной области. В. А. Ильиным показано, что полученные им условия такой сходимости неослабляемы — построены соответствующие интересные контрпримеры. Существенные результаты получены в исследовании принципа локализации для разложений по собственным функциям. В последнее время им были получены подобные результаты внутри области для весьма общих граничных условий.

Остановимся еще на двух вопросах, имеющих отношение к проблематике этого рода. И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан (1953 г.), а затем Л. А. Дикий (1953—1957 гг.) вычислили регуляризованную некоторым

образом сумму собственных значений $\operatorname{reg} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ и их степеней для уравнения Штурма — Лиувилля на конечном интервале $(0, \pi)$ (без регуляризации сумма, естественно, расходится). Выяснилось, что эта сумма зависит от значений $v(x)$ только на концах 0 и π . Например, в случае условий

$$u'(0) - hu(0) = 0, \quad u'(\pi) - Hu(\pi) = 0,$$

$$\operatorname{reg} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = \frac{1}{4}, \quad (v(0) + v(\pi)) - hH,$$

где μ_n — собственные числа аналогичной задачи с $v(x) \equiv 0$. Подсчитывались также и другие суммы подобного рода. Эта тематика в последние годы усиленно развивалась. Так, В. А. Садовничий, развивая методику Л. А. Дикого, получил формулы следов для широких классов обыкновенных дифференциальных операторов со спектральным параметром, входящим весьма сложно. Он и В. Б. Лидский разработали весьма общий подход к этому вопросу. Сюда относятся также работы А. Г. Костюченко и Р. Ф. Шевченко.

Задачи типа вычисления следов рассматривались и для дифференциальных операторов с непрерывным спектром, причем соответствующие суммы заменялись интегралами (Л. Д. Фаддеев, В. С. Буслаев, М. И. Ломоносов, В. А. Яврян). Отметим также исследования М. Г. Гасимова и Б. М. Левитана.

В работах М. Г. Крейна, исходившего из одной заметки И. М. Лифшица, получены формулы следов для абстрактных операторов невозмущенного A_0 и возмущенного A . Именно, показано, что при определенной близости A и A_0 (разность их резольвент ядерна) для широких классов функций $\varphi(\lambda)$

$$\operatorname{Сл}(\varphi(A) - \varphi(A_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(\lambda) \xi(\lambda) d\lambda,$$

где функция $\xi(\lambda)$ определяется по A_0 и A . В упомянутых работах Фаддеева и Буслаева выяснена связь между такими абстрактными формулами и формулами типа Гельфанда — Левитана, а также вычислена $\xi(\lambda)$ для оператора Шредингера.

Обобщенные собственные функции находятся в пространстве H_- , где $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+$. Подбирая это пространство наилучшим образом («как можно ближе к H_0 ») для конкретных дифференциальных операторов в $L_2(G) = H_0$, получаем некоторые оценки поведения собственных функций на бесконечности. Аналогичные соображения дают возможность установить следующий результат: почти все (в смысле спектральной меры) собственные функции $\varphi(x; \lambda)$ стационарного оператора Шредингера (29) в E_n с произвольным достаточно гладким потенциалом

$v(x)$ растут на бесконечности не быстрее $|x|^{\frac{n}{2} + \varepsilon} |v_{-, \delta}(x)|^{N(n)}$, где $\varepsilon, \delta > 0$ произвольны, $v_{-, \delta}(x)$ — минимум отрицательной части

$v_-(x)$ функции $v(x)$ на шаре радиуса δ с центром в точке x , а $N(n)$ — некоторая зависящая от n степень; в случае полуограниченного потенциала множитель $v_{-, \delta}$ отбрасывается, такой результат для полуограниченного потенциала был получен другим способом при $n = 1$ Э. Э. Шнолем (1954 г.), а при n произвольном — Ю. М. Березанским, Г. И. Кацом и А. Г. Костюченко (1959 г.). Приведенная общая оценка принадлежит Ю. Б. Орочко (1965—1966 г.). Собственные функции на бесконечности в случае полуограниченного потенциала, вообще говоря, не ограничены, как это можно было ожидать исходя из некоторых физических соображений (В. П. Маслов, 1961 г.). Э. Э. Шнолю принадлежат также оценки решений $\varphi(x; \lambda)$ уравнения Шредингера с полуограниченным потенциалом: чем ближе λ к спектру, тем медленнее рост решения по x .

Оценки для собственных функций, заданных в конечной области, получены Х. Л. Смолицким, Д. М. Эйдуcom, В. А. Ильиным и И. А. Шишмаревым, М. А. Красносельским и Е. И. Пустыльником.

3

Классическая степенная проблема моментов, разностные уравнения, положительно определенные функции и ядра

Перейдем к рассмотрению задач, зародившихся в XIX в. в работах П. Л. Чебышева, А. А. Маркова и Т. Стилтеса и во многом стимулировавших развитие спектральной теории. Степенной проблемой моментов называется задача представления последовательности чисел $(S_j)_{j=0}^\infty = 0$ в виде

$$S_n = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n d\rho(\lambda) \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (33)$$

где $d\rho(\lambda)$ — конечная неотрицательная мера на оси, и исследование этого представления (последовательность (33) называется моментной). Известно, что для справедливости (33) необходима и достаточна положительная определенность матрицы $(S_{j+k})_{j,k=0}^\infty$, т. е. выполнение при любой финитной последовательности $(\xi_j)_{j=0}^\infty$ неравенства

$$\sum_{j,k=0}^{\infty} S_{j+k} \bar{\xi}_j \xi_k \geq 0 \quad (34)$$

(то, что из (33) следует (34) — очевидно). Покажем, как с этой задачей связано разностное уравнение. Введем на финитных последовательностях $u = (u_j)_{j=0}^\infty$, $v = (v_j)_{j=0}^\infty$ скалярное произведение, согласованное с (34):

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j,k=0}^{\infty} S_{j+k} \bar{v}_j u_k.$$

Пусть H_S — соответствующее пространство. Произведем ортогонализацию в H_S последовательности векторов $\delta_0 = (1, 0, 0, \dots)$, $\delta_1 = (0, 1, 0, \dots)$, $\delta_2 = (0, 0, 1, \dots)$, ... В результате получим ортонормированный базис $p_0, p_1, \dots$ в H_S . Если записать в этом базисе эрмитовый в H_S оператор правого сдвига

$$u = (u_0, u_1, u_2, \dots) \rightarrow (0, u_0, u_1, \dots) = Tu, \quad (35)$$

определенный на финитных последовательностях, то получим так называемую матрицу Якоби

$$I = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & & \\ a_0 & b_1 & a_1 & & \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

с некоторыми элементами, просто подсчитываемыми по S_n . Ясно, что T и J порождают по существу один и тот же оператор A , но первый раз в интерпретации со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, а во второй — со скалярным произведением в пространстве l_2 . Строя разложение по его собственным функциям и применяя равенство Парсеваля типа (24), получим (33). При этом $d\rho(\lambda)$ действительно является спектральной мерой оператора A . Она определяется однозначно или неоднозначно в зависимости от самосопряженности A .

Вместе с тем

$$(Ju)_j = a_{j-1}u_{j-1} + a_j u_{j+1} + b_j u_j \quad (j = 0, 1, \dots; u_{-1} = 0), \quad (36)$$

т. е. J действует как разностный оператор второго порядка, подобный оператору Штурма — Лиувилля (22). Аналогия здесь проходит настолько далеко, что все результаты степенной проблемы моментов, или, что то же, спектральной теории оператора (35) или разностного выражения (36), находят себе аналоги в теории уравнения Штурма — Лиувилля; обратно — результаты последней теории имеют разностные аналоги.

В проблеме моментов хорошо известно описание всех ее решений в так называемом неопределенном случае, т. е. всех $d\rho(\lambda)$, дающих представление (33) фиксированной последовательности $(S_j)_{j=0}^\infty$, если нет неединственности такого представления. Аналогичный результат был получен М. Г. Крейном (1952 г.) для уравнения Штурма — Лиувилля (22) и М. Л. Горбачуком (1966 г.) — для такого уравнения с операторным коэффициентом. Для произвольных обыкновенных дифференциальных операторов соответствующие теоремы получил А. В. Штраус (1955—1957 гг.) при помощи его формул описания всех резольвент. В этих же работах Штрауса были выяснены те граничные условия, которые приводят к самосопряженным расширениям с выходом в более широкое гильбертово пространство, т. е. к обобщенным разложениям единицы. Оказалось, что при этом спектральный параметр λ входит специальным образом в граничное условие. Тем самым была построена теория задач на собственные значения со спектральным параметром



М. С. Лившиц.

в граничном условии (эти задачи другого типа, чем упомянутые на стр. 683).

Далее, проблема моментов и теория якобиевых матриц стимулировали создание М. Г. Крейн теория целых операторов, о которой шла речь выше (отметим, что операторы, порожденные проблемой моментов и обыкновенными дифференциальными выражениями — целые). С другой стороны, было получено обобщение спектральной теории на разностные уравнения более высоких порядков (М. Г. Крейн (1949 г.)) и на уравнения в частных разностях и уравнения с операторными коэффициентами (Ю. М. Березанский (1953—1956 гг.), В. Г. Тарнопольский (1959—1960 гг.), Б. В. Базанов (1961—1963 гг.)). Появляющиеся здесь операторы — опять целые, причем в случае частных разностей и операторных коэффициентов —

с бесконечными дефектными числами. М. Г. Крейн были установлены (1953 г.) для задачи (22) аналоги неравенств Чебышева — Маркова в проблеме моментов. Исследованию выпуклого множества мер $d\rho(\lambda)$, дающих представление (33), посвящены работы М. А. Наймарка (1947 г.), И. М. Глазмана и П. Б. Найман (1955 г.).

С этой тематикой тесно соприкасается теория положительно определенных функций. Непрерывная функция $f(x)$ на оси $(-\infty, \infty)$ называется положительно определенной, если при любом выборе точек $x_1, x_2, \dots \in (-\infty, \infty)$ для любой финитной последовательности $(\xi_j)_{j=1}^{\infty}$ справедливо неравенство

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} f(x_j - x_k) \xi_k \bar{\xi}_j \geq 0. \quad (37)$$

Согласно классической теореме Бохнера имеем

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\rho(\lambda) \quad (x \in (-\infty, \infty)), \quad (38)$$

где $d\rho(\lambda)$ — неотрицательная конечная мера на оси. Формулы (37), (38) подобны (34), (33). Это дает основание ожидать, что представление (38) может быть получено аналогично представлению (33). Действительно, М. Г. Крейн было замечено, что если определить скалярное произведение функций соотношением

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y - x) u(y) \bar{v}(x) dx dy, \quad (39)$$

то минимальный оператор, порожденный $i \frac{d}{dx}$, будет эрмитов и его спектральный анализ (точнее, равенство Парсеваля) приводит к пред-

ставлению (38). Этот прием был развит М. Г. Крейном в 1947—1948 гг. для более общих, чем $K(x, y) = f(y - x)$, положительно определенных ядер, которые допускают представление типа (38), но не по собственным функциям оператора $i \frac{d}{dx}$ (заметим, что $i \frac{d}{dx} (e^{i\lambda x}) = \lambda e^{i\lambda x}$), а по собственным функциям общих обыкновенных дифференциальных операторов. При построении спектрального анализа использовался метод направляющих функционалов.

Аналогичные теоремы для операторов в частных производных получил Ю. М. Березанский (1956—1959 гг.), причем он пользовался теорией разложений по обобщенным собственным функциям. Затем подобные результаты обобщались на случай представлений ядер $K(x, y)$ по общим собственным функциям коммутирующего семейства операторов, при этом ядра могли зависеть и от дискретного аргумента; последнее давало возможность охватывать проблему моментов и ее различные обобщения, например многомерную проблему моментов, когда λ^n в выражении (33) заменяется $\lambda_1^{n_1} \dots \lambda_m^{n_m}$ и интеграл становится m -кратным (А. Г. Костюченко и Б. С. Митягин (1960 г.), Ю. М. Березанский (1959—1961 гг.), Г. И. Эскин (1960 г.), Р. С. Исмаилов (1960—1962 гг.), Н. Н. Чаус (1965 г.)). При обобщении на коммутирующие семейства операторов возникла одна существенная трудность — нужно было уметь расширить коммутирующую систему эрмитовых операторов до коммутирующей же системы самосопряженных операторов, что не всегда возможно. Преодоление этой трудности в тех или иных частных случаях и составило основное содержание работ названных математиков. Отметим, что существенный результат здесь был получен еще в 1945 г. М. С. Лившицем. Ряд важных исследований в этом направлении принадлежит также А. Я. Повзнеру (1944 г.), И. М. Гельфанду и Н. Я. Виленкину (1960—1961 гг.), Р. Б. Зархиной (1959 г.).

Остановимся теперь на одной трудной задаче, связанной с обычными положительно определенными функциями и возникшей в теории случайных процессов. Будем считать, что функция $f(x)$ задана на интервале $(-2l, 2l)$ и выполняется соотношение (37) для $x_j \in (-l, l)$, т. е. $f(x)$, как говорят, положительно определенная на конечном интервале. Возникает вопрос, можно ли продолжить эту функцию на всю ось $(-\infty, \infty)$ с сохранением положительной определенности и тем самым получить представление (38) и как описать все такие представления. Б. В. Гнеденко впервые показал (1937 г.), что продолжение может быть неоднозначным, М. Г. Крейн полностью решил (1940—



И. С. Иохвидов



Ф. А. Березин.

1944 гг.) эту задачу. Описание было получено в тех же терминах, что и описание всех $d\rho(\lambda)$ в степенной проблеме моментов, т. е. путем описания всех самосопряженных расширений некоторого эрмитова оператора.

Соответствующая теория для положительно определенных функций, значениями которых служат операторы в гильбертовом пространстве, была развита М. Л. Горбачуком (1964—1965 гг.). Отметим, что операторы, возникающие в теории положительно определенных функций, целые.

Для случая положительно определенных функций двух переменных задача о возможности продолжения, например, с прямоугольника со сторонами, параллельными координатным осям, решается отрицательно. Однако с полосы такое продолжение можно осуществить. Это было показано М. С. Лившицем (1945 г.) и позже (1960 г.) независимо друг от друга Р. С. Исмагиловым и Г. И. Эскиным. Задача описания продолжений решалась различными способами Б. Я. Левиным, И. Е. Овчаренко (1964 г.) и Ю. М. Березанским и М. Л. Горбачуком (1965 г.).

Функция $f(x)$ называется эрмитово-индефинитной, если число отрицательных квадратов в форме (37) не превосходит некоторого $k < \infty$. Теория интегральных представлений таких функций и аналогичных последовательностей была разработана И. С. Иохвидовым и М. Г. Крейном (1948—1956 гг.) на основе их теории эрмитовых операторов в пространстве с индефинитной метрикой (см. стр. 677). Развивая эти исследования, В. И. Горбачук построила (1962—1965 гг.) общую теорию представления эрмитово-индефинитных ядер с помощью собственных функций дифференциальных операторов и на ее основе решила задачу продолжения эрмитово-индефинитной функции с конечного интервала на всю ось. Близкие результаты получил также Н. Я. Виленкин (1961 г.) по условно положительно определенным функциям $f(x)$, т. е. функциям (обобщенным, вообще говоря), для которых $(LL^+f)(x)$ положительно определена при любом однородном дифференциальном выражении L фиксированного порядка s с постоянными коэффициентами. Для таких функций Виленкин дал интегральное представление.

Очень интересные связи существуют между описанной проблематикой и квантовой теорией поля. Грубо говоря, теперь идет речь о замене оператора правого сдвига (35) на сдвиг

$$u = (u_0, u_1(x_1), u_2(x_1, x_2), u_3(x_1, x_2, x_3), \dots) \rightarrow \\ \rightarrow (0, u_0 e(x_1), u_1(x_1) e(x_2), u_2(x_1, x_2) e(x_3), \dots) = T_e u,$$

где $e(x)$ — фиксированная функция, причем оператор T_e рассматривается в пространстве типа l_2 — ортогональной сумме пространства скаляров, пространства L_2 функций одной переменной x_1 , пространства L_2 функций двух переменных x_1, x_2 и т. д. Точнее, в качестве $e(x)$ берется δ -функция и рассмотрения проводятся либо в случае симметрических функций $u_j(x_1, \dots, x_j)$ (случай бозонов), или антисимметрических (случай фермионов). Оператор правого сдвига называется оператором рождения частицы, сопряженный к нему оператор левого сдвига — оператором уничтожения. Развивается теория таких операторов и полиномов от них (гамильтонианов систем). Ряд существенных результатов в этом направлении получил Ф. А. Березин (1961—1965 гг.).

В квантовой теории поля сдвиг T_e рассматривается и в пространстве, подобном пространству H_S и порожденному некоторой «моментной последовательностью» функций $(S_j(x_1, \dots, x_j))_{j=0}^\infty$ (так называемых функционалов Вайтмана):

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j,k=0}^{\infty} \int \dots \int_{j+k} S_j(x_1, \dots, x_j, y_1, \dots, y_k) \times \\ \times \overline{v_j(x_j, \dots, x_1) u_k(y_1, \dots, y_k)} dx_1 \dots dx_j dy_1 \dots dy_k.$$

Предполагается, что оператор T_e (так называемый полевой оператор) эрмитов в $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Условиям его самосопряженности посвящены работы В. П. Гачка (1965—1966 гг.) и Ю. М. Березанского (1966 г.), получению представлений для $S_n(x_1, \dots, x_n)$ типа (33) — работы Ю. М. Березанского (1966—1967 гг.) и последующие работы В. П. Гачка.

4

Обратная задача спектрального анализа

Обратной задачей спектрального анализа называется задача восстановления коэффициентов уравнения по тем или иным спектральным данным. Она проще всего и выглядит и решается для разностных выражений (36). Именно, оказывается, что по спектральной мере $d\rho(\lambda)$ однозначно определяются коэффициенты выражения (36), причем спектральные меры могут быть просто описаны. Коэффициенты a_j, b_j ищутся следующим образом: ортогонализируя обычной процедурой с весом $d\rho(\lambda)$ степени $1, \lambda, \lambda^2, \dots$, получаем ортогональные полиномы $P_0(\lambda), P_1(\lambda), \dots$, затем по формулам

$$a_j = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_j(\lambda) P_{j+1}(\lambda) d\rho(\lambda), \\ b_j = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_j^2(\lambda) d\rho(\lambda) \quad (j = 0, 1, \dots) \quad (40)$$

восстанавливаем коэффициенты.

Убедимся в справедливости этой конструкции. Для этого рассмотрим уравнение $Ju_j = \lambda u_j$ ($j = 0, 1, \dots$) с начальными условиями $u_1 = 0$, $u_0 = 1$. Рекуррентно его решая, получим, что $u_j = P_j(\lambda)$ ($j = 0, 1, \dots$), где $P_j(\lambda)$ — полином степени j (так называемый полином первого рода). С другой стороны, последовательность $(P_j(\lambda))_{j=0}^\infty$ следует рассматривать как собственный вектор оператора A , действующего в пространстве l_2 (при λ , входящем в спектр). Строим аналог преобразования Фурье (25): для финитных $f = (f_j)_{j=0}^\infty$ полагаем $\tilde{f}(\lambda) = \sum_{j=0}^\infty f_j P_j(\lambda)$. По аналогии с соотношением (24) должно иметь место равенство Парсеваля

$$\sum_{j=0}^\infty f_j \bar{g}_j = \int_{-\infty}^\infty \tilde{f}(\lambda) \overline{\tilde{g}(\lambda)} d\rho(\lambda).$$

Беря здесь в качестве f и g последовательности, равные всюду нулю, за исключением одной точки, где они равны единице, заключаем, что полиномы $P_j(\lambda)$ ортонормированы относительно $d\rho(\lambda)$ и поэтому совпадают с построенными посредством ортогонализации. Теперь умножая равенство $(JP(\lambda))_j = \lambda P_j(\lambda)$ ($j = 0, 1, \dots$) на $P_k(\lambda)$ и интегрируя по $d\rho(\lambda)$, приходим к формулам (40).

Для уравнения Штурма — Лиувилля (22) обратная задача была впервые поставлена в следующей форме: необходимо восстановить потенциал $v(x)$, если известны спектры двух задач для уравнения (22) в конечном интервале (a, b) с различными граничными условиями (Н. Левинсон, Г. Борг). Впервые вопрос типа обратной задачи возник у В. А. Амбарцумяна (1929 г.). Принципиально важный шаг сделал В. А. Марченко (1950 г.), показавший, что задачу можно ставить, задавая спектральную меру $d\rho(\lambda)$. Именно им была доказана единственность восстановления $v(x)$ в такой постановке. Эта постановка натолкнула на мысль провести построения, аналогичные описанным выше для якобиевых матриц и хорошо известные. Такие построения действительно удалось провести И. М. Гельфанду и Б. М. Левитану (1951 г.) и решить обратную задачу. Возникающие при этом трудности, связанные с континуальной ортогонализацией, оказалось возможным преодолеть благодаря теории операторов преобразования, треугольно преобразующих $\cos \sqrt{\lambda}x$ (аналог степеней $1, \lambda, \lambda^2, \dots$) в решения $\varphi(x; \lambda)$ (аналог полиномов $P_0(\lambda), P_1(\lambda), \dots$) задачи Коши для выражения (22). Теорию операторов преобразования развили А. Я. Повзнер (1948 г.) и В. А. Марченко (1950 г.), исходя из результатов Б. М. Левитана (1940—1946 гг.) по операторам обобщенного сдвига.

После появления работы Марченко открылся и другой путь решения обратной задачи даже для уравнения более общего, чем уравнение Штурма — Лиувилля, именно для уравнения струны, возможно, с не непрерывным распределением массы. Эти исследования принадлежат М. Г. Крейну (1951—1953 гг.), который использует развитый им аппарат теории продолжения положительно определенных функций.

Следует отметить, что и здесь фигурирует континуальная ортогонализация, однако не $\cos \sqrt{\lambda}x$ в пространстве L_2 , а δ -функций δ_x , сосредоточенных в точке x , в пространстве, порожденном подобно (39) некоторым положительно определенным ядром. Соотношение между решением И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана и решением М. Г. Крейна примерно такое же, как между интерпретациями оператора A на стр. 689, — его можно интерпретировать либо в L_2 , либо в пространстве со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

В дальнейшем появился целый ряд статей, обобщающих или уточняющих результаты для уравнения типа Штурма — Лиувилля (А. Ш. Блох, В. Я. Волк, В. В. Сташевская, М. Г. Нейгауз, Ф. С. Рофе-Бекетов). Для системы Дирака обратная задача была полностью решена М. Г. Крейном и М. Г. Гасымовым и Б. М. Левитаном. В ряде случаев рассматривалась несамосопряженная обратная задача для комплексного потенциала $v(x)$ (Т. М. Карасева (1953 г.), В. А. Марченко и Ф. С. Рофе-Бекетов (1958—1960 гг.), В. Э. Лянце (1965 г.) (см. стр. 699).

Обратная задача восстановления оператора по двум спектрам для уравнения струны была решена М. Г. Крейном (1951—1953 гг.), а для уравнения Штурма — Лиувилля в терминах спектров — Б. М. Левитаном и М. Г. Гасымовым (1965 г.). Гасымов получил аналогичные результаты и в случае уравнения с особенностью для задачи на полуоси и т. д.

С другой стороны, появились попытки построения теории операторов преобразования и постановки обратной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка (М. К. Фатте (1954—1957 гг.), Л. А. Сахнович (1957—1962 гг.), В. И. Мацаев (1960 г.)). Отсутствие в отличие от уравнений второго порядка ясного дискретного аналога для подобных задач увеличивало трудности. Оказалось, что построение вольтерровых операторов преобразования, полезных для решений обратной задачи, может быть проведено лишь в случае аналитических коэффициентов.

В 1962—1966 гг. З. Л. Лейбензон дал новую постановку обратной задачи для уравнений высоких порядков, в которой фигурируют спектральные данные целой серии несамосопряженных прямых задач. В этой постановке была доказана единственность решения и появилась возможность полного решения задачи.

Для уравнений в частных производных, именно для стационарного уравнения Шредингера, Ю. М. Березанским (1953—1955 гг.) указана постановка обратной задачи с заданием спектральной функции,



М. К. Фатте.

аналогичная случаю уравнения Штурма — Лиувилля, и доказана теорема единственности. Однако такая постановка переопределена: по функции большего количества переменных ищется функция меньшего количества переменных. Здесь существенно выяснение имеющихся связей между спектральными данными, уменьшающих количество переменных. Некоторые приближенные постановки и методы решения обратной задачи для гиперболических уравнений второго порядка, были предложены М. М. Лаврентьевым и В. Г. Романовым (1964—1967 гг.). Эти постановки тесно связаны с некоторыми постановками со спектральной функцией. В случае уравнений в частных разностях второго порядка обратная задача была решена Ю. М. Березанским (1953 г.), а для высокого порядка — Б. В. Базановым (1961—1965 гг.); в этом случае удастся провести методику, аналогичную случаю якобиевой матрицы J .

5

Задача рассеяния

Задача квантовой теории рассеяния частицы силовым центром ставится следующим образом: пусть A_0 — оператор энергии свободной частицы, $A = A_0 + V$ — оператор системы частица + центр (V — оператор энергии взаимодействия). Эволюция во времени вектора состояния системы $\psi(t)$ описывается уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{d\psi(t)}{dt} = (A_0 + V)\psi(t). \quad (41)$$

Рассмотрим решение $\psi(t)$ этого уравнения, ведущее себя при $t \rightarrow -\infty$ как некоторое решение $\psi_0(t, f) = e^{-iA_0 t} f$ уравнения (41) с $V = 0$: $\psi(t) - \psi_0(t, f) \rightarrow 0$; здесь f — вектор гильбертова пространства, определяющий решение $\psi_0(t, f)$. Если бы $V = 0$, то и при $t \rightarrow +\infty$ система (41) имела бы решение $\psi_0(t, f) = e^{-iA_0 t} f$. В случае в определенном смысле малых V доказывается, что $\psi(t)$ на $+\infty$ имеет асимптотику $\psi_0(t, Sf)$, где Sf — некоторым образом преобразованный вектор f . Оператор S — линейный и унитарный. Он называется оператором рассеяния.

Задача рассеяния в случае $A_0 = -\Delta = -D_1^2 - D_2^2 - D_3^2$, V — оператор умножения на достаточно быстро убывающую функцию $V(x)$ была решена А. Я. Повзнером (1953—1955 гг.). В важном и трудном случае системы из трех частиц — Л. Д. Фаддеевым (1963 г.).

Общие абстрактные теоремы о существовании оператора рассеяния были установлены М. Ш. Бирманом, им же рассмотрены некоторые конкретные примеры операторов A_0 и V , связанные с возмущением границы и граничных условий для эллиптических операторов второго порядка. Тонкие спектральные свойства оператора S исследовали М. Ш. Бирман и М. Г. Крейн. Они же нашли формулу, связывающую S с функцией $\xi(\lambda)$ в теории следов. Ряд других результатов как по

абстрактной, так и по квантовой задаче рассеяния, был получен О. А. Ладыженской и Л. Д. Фаддеевым, А. Г. Сигаловым, М. Ш. Бирманом, С. Б. Энтиной, В. С. Буслаевым, В. М. Адамяном и Д. З. Аровым, Д. М. Эйдуcom, А. Г. Раммом, Ф. А. Березиным и Л. Д. Фаддеевым, Ф. С. Рофе-Бекетовым и Е. Х. Христовым, А. Л. Чистяковым.



М. Г. Гасымов.

Естественно ставится обратная задача рассеяния — по данным рассеяния (по оператору S) восстановить рассеивающий центр, т. е. V . Ясно, что эта задача имеет важный физический смысл. Она была решена в случае, рассмотренном А. Я. Повзнером, при дополнительном предположении сферической симметрии: $v(x) = v(|x|)$. При этом потенциал восстанавливался по одной из так называемых предельных фаз, фигурирующих в асимптотике решений на бесконечности радиальных частей стационарного оператора Шредингера, т. е. по части информации, заложенной в оператор S . Решение было получено В. А. Марченко (1955 г.) и М. Г. Крейном (1955 г.), а для системы — З. С. Аграновичем и В. А. Марченко (1957 г.). Аналогичная задача была решена для системы Дирака М. Г. Крейном (1955 г.) и в более общем случае М. Г. Гасымовым и Б. М. Левитаном (1965 г.) и М. Г. Гасымовым (1966 г.). Заметим, что в развитии этого цикла вопросов важную роль сыграли операторы преобразования, «привязанные к ∞ » и введенные впервые Б. Я. Левиным (1955 г.).

В связи с задачами рассеяния и обратными задачами в случае потенциала без сферической симметрии некоторые результаты были получены Э. Э. Шнолем (1955 г.), Ю. М. Березанским (1955 г.), Л. Д. Фаддеевым (1956 г.). Близкие задачи также исследовались Д. Я. Петриной (1960 г.), Л. П. Нижником (1960 г.), В. И. Мальченко (1960 г.). Здесь также существенны связи между данными рассеяния, они исследовались Л. Д. Фаддеевым (1965—1966 гг.).

Задача рассеяния, как прямая, так и обратная, исследовалась и для разностных уравнений И. М. Лифшицем (1948 г.), М. С. Эскиной (1966 г.). Она также изучалась в случае несамосопряженных операторов: в абстрактном виде Л. А. Сахновичем (1966 г.), для уравнения Шредингера с комплексным потенциалом М. Г. Гасымовым (1966 г.). К этому же направлению относятся результаты И. В. Станкевича (1966 г.), В. Э. Лянце (1966 г.) и В. А. Блащака (1966 г.). Для операторов, фигурирующих в квантовой теории поля (например, для случая модели Тирринга), задача рассеяния изучалась Ф. А. Березиным.

Сейчас уместно сказать еще несколько слов о весьма важных результатах по квантовой теории поля, связанных с рассматриваемой

проблематикой. В 1953—1957 гг. в работах Н. Н. Боголюбова и его учеников В. С. Владимирова и О. С. Парасюка получили дальнейшее развитие методы теории обобщенных функций в аспекте приложений к квантовой теории поля. Так, была разработана теория умножения специальных обобщенных функций квантовой теории поля и на основе этой теории разработаны строгие и эффективные методы регуляризации матрицы рассеивания, завершающие известные исследования И. Швингера, Р. П. Фейнмана и Ф. Дайсона.

Н. Н. Боголюбов доказал (1956—1959 гг.) ряд новых теорем об аналитическом продолжении обобщенных функций, среди которых центральное место занимает теорема «об острие клина», и при помощи этих теорем установил так называемые дисперсионные соотношения квантовой теории поля. Это означает доказательство (в рамках аксиоматического метода квантовой теории поля) аналитичности амплитуды рассеяния в комплексной плоскости энергии с исключенными разрезами на действительной оси. Эти идеи Н. Н. Боголюбова получили дальнейшее развитие в работах В. С. Владимирова и О. С. Парасюка.

6

Несамосопряженные дифференциальные операторы

Общие теоремы о полноте собственных и присоединенных векторов несамосопряженного оператора (см. стр. 674) применялись к конкретным классам дифференциальных операторов, обладающих дискретным спектром (поясним, что для перехода к вполне непрерывным операторам производится, как правило, обращение старшей части дифференциального оператора). Это, прежде всего, относится к теореме Келдыша, которая дает особенно сильные результаты. Так, М. В. Келдыш доказал (1951 г.) полноту для задачи

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P_1(x, \lambda) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + P_{m-1}(x, \lambda) \frac{dy}{dx} + \\ + [P_m(x, \lambda) + \lambda^n] y = 0,$$

где x изменяется в конечном интервале, $P_j(x, \lambda)$ — некоторые многочлены относительно λ , а y на концах интервала удовлетворяет определенного типа граничным условиям. Им же доказана полнота для задач в ограниченной области, порожденных несамосопряженным возмущением самосопряженного эллиптического оператора. Аналогичные результаты с применением теоремы Келдыша для операторов в неограниченной области, но с так растущими коэффициентами, что имеется дискретный спектр, получены В. Б. Лидским (1957—1962 гг.) и А. Г. Костюченко (1964 г.), причем Костюченко рассматривал не обыкновенные дифференциальные, а эллиптические операторы.

Важные результаты по уравнению Штурма — Лиувилля (22), но с комплексным быстро убывающим на бесконечности потенциалом получены М. А. Наймарком (1952—1954 гг.). Им впервые построены раз-

ложения по собственным функциям несамосопряженных дифференциальных операторов в случае наличия непрерывного спектра. Эти разложения имеют вид, подобный случаю самосопряженного оператора, с некоторым аналогом E_λ . В дальнейшем В. Э. Лянце (1962—1966 гг.), а также В. А. Блазак (1966 г.) существенно развили построения Наймарка, сняв некоторые ограничения и рассмотрев случай наличия так называемых спектральных особенностей на вещественной оси. Теперь E_λ вблизи некоторых точек может расти по норме. Если у Наймарка разложения были типа Данфорда, то у Лянце появляется существенно новый тип разложений (заметим, что подобные разложения появлялись также у М. Г. Крейна и Г. Лангера в случае операторов в пространстве с индефинитной метрикой). К этому кругу вопросов относятся и исследования Б. С. Павлова.

Остановимся еще на очень интересном подходе, предложенном В. А. Марченко и разрабатывавшемся им и Ф. С. Рофе-Бекетовым (1958—1960 гг.). Исследуется уравнение Штурма — Лиувилля (22) с комплексным потенциалом $V(x)$. Оказывается, что при весьма слабых ограничениях можно установить равенство Парсеваля (24), однако спектральная мера $d\rho(\lambda)$ теперь будет, вообще говоря, обобщенной функцией.

В самосопряженном случае эта обобщенная функция превращается в обычную. Была рассмотрена не только прямая, но и обратная задача — восстановление потенциала $V(x)$ по $\rho(\lambda)$. Эти результаты были перенесены и на операторное уравнение Штурма — Лиувилля, т. е. на уравнение (22), в котором $\varphi(x)$ — функция, значениями которой служат операторы.

Ряд работ, о которых шла речь в пп. 2, 4, 5, был посвящен детальному спектральному анализу не только самосопряженных, но и несамосопряженных дифференциальных операторов. Таким анализом в несамосопряженном случае занимались также В. Н. Фунтаков, В. М. Кабанова, М. Г. Гимадиславов, Ф. З. Зиатдинов, М. И. Серов, В. А. Ткаченко, А. С. Маркус, Г. М. Кессельман, В. Михайлов, А. П. Хромов, А. О. Кривицкий, М. М. Гехтман, Р. М. Мартирисян.



В. Б. Лидский.



В. Э. Лянце.

Применение функционального анализа к теории дифференциальных уравнений в частных производных и обобщенные функции

Мы остановимся лишь на нескольких избранных вопросах. Ряд других приложений функционального анализа в этом направлении описан в главе о дифференциальных уравнениях с частными производными.

1

Пространства С. Л. Соболева, обобщенные функции

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha(x) D^\alpha u \quad (42)$$

с достаточно гладкими коэффициентами $a_\alpha(x)$, заданными в некоторой области G n -мерного пространства E_n . Обычно для выражения (42) ставится краевая задача: требуется найти решение уравнения

$$(Lu)(x) = f(x) \quad (x \in G), \quad (43)$$

удовлетворяющее на границе Γ области G граничным условиям

$$(B_1 u)(x) = \psi_1(x), \dots, (B_s u)(x) = \psi_s(x) \quad (x \in \Gamma). \quad (44)$$

Здесь B_j — некоторые граничные операторы, определенные на функциях, заданных на Γ . Например, $(Bu)(x) = u(x)$, $(Bu)(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)(x)$ ($\nu = \nu(x)$ — орт нормали); B может иметь, как говорят, и нелокальный характер, например $(Bu)(x) = \int_\Gamma u(y) dy$. Часто граничные условия

(44) бывают заданы на части Γ_0 границы Γ , поведение решения на остальной части границы $\Gamma \setminus \Gamma_0$ нас не интересует, тогда говорят, что на $\Gamma \setminus \Gamma_0$ граничные условия сняты. Таким образом, смешанные задачи и задача Коши также укладываются в эту схему. Кратко задание граничных условий будем записывать так:

$$B(\text{гр}) u = \psi. \quad (45)$$

Идеальным решением краевой задачи (43), (45) было бы нахождение гладкой функции $u(x)$, удовлетворяющей (43) и (45). Однако природа рассматриваемого вопроса такова, что даже для очень хороших дифференциальных выражений L , например для оператора Лапласа $L = \Delta = D_1^2 + \dots + D_n^2$, задача (43), (45) может не иметь гладких решений.

Фундаментальный вклад в теорию краевых задач был сделан С. Л. Соболевым (1935 г.), который предложил ввести понятие обобщенного решения задачи. С тех пор подобная точка зрения и те или иные обобщения решения дифференциальных уравнений прочно вошли в обиход и фигурируют в большинстве работ, относящихся к краевым задачам. Для описания обобщенных решений Соболев ввел обобщение понятия производной. Выражаясь современным языком, обобщение состоит в том, что вместо операции дифференцирования $D^\alpha u$ рассматривается замыкание в тех или иных пространствах функций оператора дифференцирования $u \rightarrow D^\alpha u$, определенного на подмножестве гладких функций, т. е. под $D^\alpha u$ для негладкой u понимается $\lim_{n \rightarrow \infty} D^\alpha u_n$, где последовательность гладких u_n такова, что в смысле сходимости в пространстве $u_n \rightarrow u$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} D^\alpha u_n$ существует.

Для описания функций, имеющих обобщенные производные, были введены Соболевым так называемые пространства $W_p^l(G)$, $l = 1, 2, \dots$, $p > 1$; $W_p^0(G) = L_p(G)$. Пространство $W_p^l(G)$ состоит из функций, имеющих l -е обобщенные производные, суммируемые с p -й степенью. Иными словами, $W_p^l(G)$ можно описать как результат пополнения класса $C^\infty(G \cup \Gamma)$ относительно нормы

$$\|u\|_{W_p^l(G)} = \sum_{|\alpha| \leq l} \|D^\alpha u\|_{L_p(G)} = \sum_{|\alpha| \leq l} \left(\int_G |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (46)$$

Существенную роль в теории пространств W_p^l и ее приложениях играют теоремы вложения С. Л. Соболева и В. И. Кондрашева, которые отражают следующий факт: при возрастании l , p дифференциальные свойства функций из $W_p^l(G)$ улучшаются. Так, например, при $l > \frac{n}{p}$ функции из $W_p^l(G)$ становятся непрерывными, при фиксированном p и увеличении l они становятся сколь угодно много раз непрерывно дифференцируемыми. Эти функции имеют значения на многообразиях меньших чем n размерностей и т. д. Теоремы вложения стали удобным инструментом для доказательства существования непрерывно дифференцируемых решений — достаточно найти решение из $W_p^l(G)$ с достаточно большим l и оно уже будет непрерывно дифференцируемым автоматически. Пространства $W_p^l(G)$ во многом более удобны, чем пространства непрерывно дифференцируемых функций, так как они напоминают $L_p(G)$ и функционалы в них выглядят гораздо проще (например, $W_2^l(G)$ — гильбертово пространство и функционал в нем задается скалярным произведением). Затем Н. Ароншайн (США) и Л. Н. Слободетский (1958 г.) развили теорию пространств Соболева, обобщив понятие пространства $W_p^l(G)$ на случай дробных $l \geq 0$ и изучив эти пространства. Подобное развитие весьма существенно, так как значения на границе Γ области задания функций пространства

$W_p^l(G)$ ($l \geq 0$ — целое) описывают пространство $W_p^{l-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ и мы совершенно естественно попадаем в область дробных производных.

Необходимость расширения понятия решения уравнения привела С. Л. Соболева (1935 г.) к одному из важных понятий современной математики — понятию обобщенной функции. Хотя такие функции были известны в теоретической физике и ими успешно пользовались (δ -функция Дирака), их строгая математическая теория стала развиваться именно после опубликования работ Соболева и в особенности после более поздних работ Л. Шварца (Франция) в этом направлении.

Простейшей обобщенной функцией служит упоминавшаяся δ -функция $\delta(x)$, которая определялась физиками как «функция, равная всюду нулю за исключением одной точки, например x_0 , где она обращается в бесконечность. При этом обращение в бесконечность должно быть таковым, что для любой функции $f(x)$ должно быть

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(x_0) \quad (47)$$

(это δ -функция, сосредоточенная в точке x_0 , она обозначается δ_{x_0}).

Конечно, такое определение, строго говоря, смысла не имеет, однако оно совместимо с общими идеями функционального анализа и подсказывает строгое математическое определение, состоящее в следующем. Рассматривается пространство так называемых основных функций $f(x)$ — в простейшем случае это $C_0^\infty(E_n)$ — бесконечно дифференцируемые финитные функции во всем пространстве E_n . В $C_0^\infty(E_n)$ вводится сходимость: $f_n \rightarrow f$, если $f_n(x)$ равномерно со всеми производными сходится к $f(x)$ и все $f_n(x)$ равны нулю вне общего шара. Этим самым $C_0^\infty(E_n)$ превращается в топологическое пространство. Тогда в соответствии с выражением (47) обобщенной функцией $\alpha(x)$ называется линейный непрерывный функционал α на $C_0^\infty(E_n)$ (действие α на f обычно теперь записывают так: (α, f)). Таким образом δ -функция δ_{x_0} , сосредоточенная в точке x_0 , определяется соотношением $(\delta, f) = f(x_0)$. Более сложные обобщенные функции можно немедленно получить посредством дифференцирования, например производная δ -функции определяется равенством $(\delta_{x_0}', f) = -f'(x_0) = -(\delta_{x_0}, f')$. Вообще, к обобщенной функции α можно применить любое линейное дифференциальное выражение L с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. Именно, $L\alpha$ означает обобщенную функцию, действующую по правилу

$$(L\alpha, f) = (\alpha, L^+f).$$

Обобщенные функции совершенно естественно появляются в теории уравнений в частных производных. Например, решение краевой задачи (43), (45) с однородными граничными условиями (т. е. $\psi = 0$ в (45)) благодаря линейности задачи может быть «собрано» из решений подобных задач с $f = \delta_{x_0}$, где $x_0 \in G$ произвольна. Именно,

обозначим такое решение $G(x, x_0)$ (оно называется функцией Грина). Тогда

$$u(x) = \int_G G(x, x_0) f(x_0) dx_0.$$

Аналогично вводится функция Грина для восстановления решения по граничным значениям ψ ; в частности, такая функция вводится для задачи Коши. С другой стороны, часто приходится рассматривать такие решения уравнения и краевых задач для них, которые являются обобщенными функциями, например, тогда, когда обычных решений эти задачи не имеют.

При рассмотрении тех или иных вопросов удобны различные пространства основных функций. Л. Шварц рассматривал в качестве таких пространств пространство $\mathcal{E} = C^\infty(E_n)$ всех бесконечно дифференцируемых функций, его подпространство S , образованное функциями, убывающими вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $\frac{1}{|x|}$, и, наконец, пространство $C_0^\infty(E_n)$, обозначаемое обычно $\mathcal{D}$. Существенные классы пространств основных функций были введены И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым (1953 г.) — это пространства S_α^β , состоящие из функции из S , удовлетворяющих неравенствам

$$|(D^\mu f)(x)| \leqslant C B^{|\mu|} |\mu|^{|\mu| \beta} \exp(-A|x|^{\frac{1}{\alpha}}) \quad (48)$$

с некоторыми положительными A и B . Соответствующие обобщенные функции оказались очень удобными при изучении вопросов единственности для решений задачи Коши. Пространства S_α^β были затем обобщены Б. Л. Гуревичем (1956 г.) в направлении замены фигурирующих в их определении степенных оценок оценками с неубывающими выпуклыми функциями (так называемые пространства W). Дальнейшие пространства основных функций были введены В. П. Паламодовым (1962 г.) — это пространства $\mathcal{E}_\alpha^\beta$, образованные функциями из $\mathcal{E}$, удовлетворяющими неравенству типа (48), в котором убывающая экспонента $\exp(-A|x|^{\frac{1}{\alpha}})$ заменена на возрастающую

$\exp(A|x|^{\frac{1}{\alpha}})$. Если для преобразования Фурье $\tilde{f}(x)$ функций $f(x)$ из S_α^β имела место важная формула $\tilde{S}_\alpha^\beta = S_\alpha^\beta$, то сейчас справедлива формула $\tilde{\mathcal{E}}_\alpha^\beta = (\mathcal{E}_\beta^\alpha)'$, где знак «'» обозначает переход к сопряженному пространству, т. е. к соответствующим обобщенным функциям.

Если $\alpha(x)$ — обычная локально суммируемая функция, то $(\alpha, f) = \int \alpha(x) f(x) dx$ определяет функционал на $\mathcal{D}$, т. е. α может рассматриваться как обобщенная функция. Однако, если $\alpha(x)$ не будет локально интегрируемой, то ситуация усложняется и возникает задача корректного определения функционала — так называемая задача регуляризации.



В. П. Паламодов.

Эта задача в случае одной переменной была решена И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым (1953 г.), в случае многих переменных она исследовалась как этими авторами, так и В. В. Грушиным и В. П. Паламодовым.

Все указанные классы основных и обобщенных функций существенно использовались при решении ряда вопросов теории уравнений в частных производных, относящихся в основном к задаче Коши и различным задачам во всем пространстве. Однако при рассмотрении краевых задач полезными оказываются обобщенные функции другого типа, дающие возможность учесть граничные условия. Пространства таких обобщенных функций носят название пространств с негативной нормой; они впервые в частных случаях вводились и исследовались Ж. Лерэ и П. Лаксом (США).

Общая схема заключается в следующем. Рассматривается некоторое гильбертово пространство H_0 со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_0$ и нормой $\|\cdot\|_0$ (оно играет роль пространства $L_2(E_n)$ в определении обобщенных функций с основным пространством $\mathcal{D} = C_0^\infty(E_n)$). В пространстве H_0 рассматривается плотное линейное множество H_+ , которое само является гильбертовым пространством относительно нового скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_+$, причем соответствующая норма $\|f\|_+ \geq \|f\|_0$. Это множество играет роль пространства основных функций, т. е. обобщенные функции (вернее, векторы) — это функционалы над H_+ . Поскольку H_0 — гильбертово пространство, то всякий функционал над ним имеет вид $l(f) = (f, a)_+$, где $a \in H_+$, однако сейчас идет речь о записи таких функционалов в терминах «исходного» скалярного произведения: $l(f) = (\alpha, f)_0$. Оказывается, такая запись возможна, а элементы α — обобщенные векторы — сами образуют некоторое гильбертово пространство $H_- \supseteq H_0$ — пространство с негативной нормой. Итак, получаем цепочку

$$H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+, \quad H_- = (H_+)' \quad (49)$$

О самом H_0 говорят, что оно оснащено гильбертово пространство. Существенно, что здесь сами обобщенные векторы образуют гильбертово пространство. Подобные пространства и операторы в них в связи с теорией краевых задач и вопросами спектральной теории изучались Ю. М. Березанским (1958 г.), Г. И. Кацом (1958 г.), Я. А. Ройтбергом (1964 г.); некоторые факты подобной теории еще раньше (до работ Ж. Лерэ и П. Лакса) были известны М. Г. Крейну (1937 г.). Заметим, что в формулах (49) в качестве H_+ часто полезно брать банахово или даже линейное топологическое пространство, но при

этом происходит некоторая потеря удобств, связанных с гильбертовостью H_- (И. М. Гельфанд и А. Г. Костюченко (1955 г.), И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленин (1961 г.)).

В исходных работах Лерэ и Лакса рассматривался случай, когда $H_0 = L_2(G)$, $H_+ = W_2^l(G)$, тогда H_- есть так называемое соболевское пространство с отрицательным индексом, обозначаемое $W_2^{-l}(G)$. В дальнейшем появляются пространства H_- для случая $H_0 = L_2(G)$ и H_+ , состоящего из функций $W_2^l(G)$, удовлетворяющих тем или иным однородным граничным условиям, ортогональные суммы подобных пространств и т. д.

С несколько других позиций теория рассматривалась также Л. Р. Волевичем и Б. П. Панеяхом (1965 г.). Ими были систематически изучены пространства, подобные $W_2^l(G)$ ($l = \dots, -1, 0, 1, \dots$) при дробных значениях l , и их обобщения, выяснены условия существования следов обобщенных функций на многообразиях низшей размерности и т. д.

2

Общие вопросы теории краевых задач

Влияние идей функционального анализа на развитие теории краевых задач отчетливо видно на примере следующей точки зрения М. И. Вишика, развивавшейся рядом математиков. Предположим, что нам нужно исследовать краевую задачу с однородными граничными условиями

$$(Lu)(x) = f(x) \quad (x \in G), \quad B(\text{гр}) u = 0, \quad (50)$$

точнее, найти те граничные условия (гр), при которых задача разрешима. Построим по L минимальный оператор Λ и максимальный $\mathcal{L}$ и рассмотрим операторные уравнения в пространстве $L_2(G)$, $\Lambda u = f$ и $\mathcal{L}u = f$. В первом из них u пробегает слишком узкое множество и поэтому f не пробегает всего $L_2(G)$, во втором u пробегает широкое множество и f , как правило, пробегает все $L_2(G)$, однако u не восстанавливается по f однозначно. Поэтому нахождение «хороших» граничных условий абстрактно можно описать как задачу нахождения такого расширения $\mathcal{L}$ оператора Λ , чтобы, во-первых,

$$\Lambda \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L} \quad (51)$$

и, во-вторых, существовал ограниченный обратный оператор $\mathcal{L}^{-1}$. Функции из области определения $\mathfrak{D}(\mathcal{L})$ оператора и образуют совокупность функций, удовлетворяющих граничным условиям $B(\text{гр}) u = 0$.

Просто доказывается, что для существования расширения $\mathcal{L}$ указанного типа, называемого разрешимым расширением, необходимо и достаточно выполнение следующих двух неравенств:

$$\begin{aligned} \|Lu\|_{L_2(G)} &\geq C \|u\|_{L_2(G)}, \\ \|L^+v\|_{L_2(G)} &\geq C \|v\|_{L_2(G)} \quad (u, v \in C_0^\infty(G)), \end{aligned} \quad (52)$$

где L^+ обозначает формально сопряженное к L дифференциальное выражение. Подобного типа неравенства играют важную роль в теории краевых задач; они носят название энергетических, или априорных, или неравенств коэрцитивности. Исследование возможности постановок тех или иных задач для уравнения $Lu = f$ часто начинается с доказательства неравенств (52). Отметим, что имеются большие классы выражений L , для которых неравенства (52) всегда справедливы, например L с постоянными коэффициентами (Б. Мальгранж (Франция), Л. Хермандер (Швеция)), эллиптические L , т. е. L , обобщающие выражение Лапласа Δ (М. И. Вишик (1951 г.), Л. Гординг (Швеция)) и т. д.

Описание граничных условий с помощью указания $\mathfrak{D}(L)$ очень общо, и здесь возникает естественный вопрос о том, когда $\mathfrak{D}(L)$ задается соотношением $B(\text{гр}) u = 0$, где $B(\text{гр})$ имеет достаточно конкретный и «классический» вид, например, является дифференциальным выражением. Такая задача имеет во многом аналитический характер и связана с подбором таких «достаточно» классических граничных условий (гр), что первое из неравенств (52) выполняется для u , таких, что $B(\text{гр}) u = 0$, а второе — для v таких, что $B(\text{гр}^+) v = 0$ («+» означает переход к сопряженным условиям). Подобная задача удовлетворительно решена лишь для эллиптических уравнений и соответствующих им эволюционных уравнений — параболического типа (т. е. подобных уравнению $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \Delta u(x, t) = f(x, t)$) и гиперболического типа (т. е. подобных $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \Delta u(x, t) = f(x, t)$), а также для обобщений этих классов уравнений.

3

Эллиптические уравнения

Основой операторного подхода к краевым задачам для эллиптических уравнений являются неравенства коэрцитивности, которые для эллиптических дифференциальных выражений L имеют вид

$$\|Lu\|_{L_2(G)} + k\|u\|_{L_2(G)} \geq \|u\|_{W_2^r(G)}, \quad (53)$$

где u удовлетворяет граничным условиям, характер которых описывается, $k > 0$ — достаточно большая константа, а r — порядок L . Существенным отличием неравенств (53) от неравенств (52) на функциях, удовлетворяющих (гр), является появление в правой части нормы в пространстве $W_2^r(G)$, а не в $L_2(G)$. Неравенства (53) характерны для эллиптических выражений. Впервые подобные неравенства в простейших случаях ($L = \Delta$, граничные условия типа Дирихле, т. е. $u|_{\Gamma} = 0$) были получены С. Н. Бернштейном (1908 г.), затем для более общих уравнений второго порядка О. А. Ладыженской (1950 г.) и С. Г. Михлиным (1951 г.) и в дальнейших весьма общих случаях —

О. В. Гусевой (1955 г.), А. И. Кошелевым (1958 г.), Л. Н. Слободским (1958 г.), а за границей — Ф. Браудером, Н. Ароншайном, М. Шехтером, С. Агмоном, А. Дуглисом, Л. Ниренбергом (США). В этих неравенствах, доказательство которых представляет значительные трудности, можно рассматривать случай и неоднородных граничных условий (тогда в правой части появляются дополнительные члены) и более общих пространств, чем $L_2(G)$ и $W_2^r(G)$. Очень существенное влияние на развитие этого круга вопросов оказали работы З. Я. Шапиро (1953 г.) и, в особенности, Я. Б. Лопатинского (1953 г.), в которых было предпринято изучение общих граничных задач для эллиптических уравнений (правда, не методами функционального анализа). Для эллиптических уравнений рассматриваются, как правило, граничные задачи, для которых выполняется так называемое условие Шапиро — Лопатинского.

При помощи неравенств типа (53) создается стройная и законченная теория эллиптических краевых задач в весьма общих случаях как с однородными, так и с неоднородными граничными условиями, причем существенно используются понятия и методы функционального анализа. При этом выяснилось важное свойство эллиптических операторов — решение u задачи (49) в этом случае ровно на порядок r выражения L более гладкое правой части f (т. е. если $f \in W_2^l(G)$, то $u \in W_2^{l+r}(G)$) (О. А. Ладыженская (1951 г.), О. В. Гусева (1955 г.)). Подобная картина будет и для неоднородных задач типа (43), (45). Оказалось, что такой сдвиг гладкости можно продолжить и на отрицательные l и построить теорию разрешимости краевых задач в обобщенных функциях (f , ψ и u — обобщенные) (М. И. Вишик, С. Л. Соболев (1956 г.), Ю. М. Березанский, С. Г. Крейн, Я. А. Ройтберг (1963—1967 гг.), Ж. Лионс (Франция), Е. Мадженес (Италия)).

Помимо общего операторного подхода к теории разрешимости краевых задач на развитие теории эллиптических уравнений существенно повлиял еще один момент, связанный с функциональным анализом. Речь идет о вопросах, относящихся к подсчету индекса задачи. Пусть имеется оператор A , действующий из одного, например, гильбертова пространства H_1 в другое H_2 . Он называется нетеровым, если размерность α его ядра $\ker A$ (т. е. подпространства таких $u \in H$, что $Au = 0$) и размерность β его коядра $\operatorname{coker} A$ (т. е. ортогонального дополнения в H к области значений $R(A)$) конечны. Разность $\kappa = \alpha - \beta$ называется индексом оператора. Если $\kappa = 0$, то оператор называется фредгольмовым. Вопрос о нетеровости оператора и подсчете его индекса впервые возник в теории сингулярных интегральных уравнений. И. Н. Векуа исследовал (1948 г.) подобные вопросы для эллиптических уравнений второго порядка на плоскости; при этом задача сводилась определенным образом к сингулярному интегральному уравнению. Первоначальное понятие индекса не носило столь явную операторную трактовку. Выработке этой трактовки способствовали появившиеся начиная с 40-х годов работы С. Г. Михлина по сингулярным интегральным уравнениям и Ф. В. Аткинсона (Канада) и И. Ц. Гохберга



И. Ц. Гохберг.

(1950 г.) по индексам абстрактного оператора. В частности, было установлено, что индекс не меняется при малых в определенном смысле изменениях оператора. Это позволило надеяться, что задачи, допускающие непрерывный переход одной в другую, имеют одинаковый индекс, т. е. что индекс является некоторым топологическим инвариантом. Возник вопрос о подсчете индекса. Появлению широкого интереса к проблеме индекса для общей эллиптической задачи способствовала постановка И. М. Гельфандом (1960 г.) как задачи подсчета индекса, так и более общей проблемы гомотопической классификации эллиптических задач. В это же время были получены первые важные результаты в этом направлении А. И. Вольпертом (1961 г.). Он построил общую теорию эллиптических задач на плоскости, доказал эквивалентность эллиптической

задачи и ее нетеровости и выразил индекс через некоторый топологический инвариант (препятствия).

Эквивалентность эллиптичности и нетеровости краевой задачи в весьма общем случае была установлена А. С. Дыниным, М. С. Аграновичем, Л. Р. Волевичем, В. А. Солонниковым (1961 г.), а также Петре и Хермандером (Швеция). Выяснилось (А. С. Дынин, 1961 г.), что изучение связности пространств эллиптических операторов сильно упростилось в случае пополнения этого пространства интегро-дифференциальными операторами, т. е. линейными комбинациями производных с коэффициентами, являющимися сингулярными интегральными операторами. Была построена теория краевых задач для таких выражений на многообразии без края (А. С. Дынин) и многообразии с краем (М. С. Агранович). Эти результаты способствовали полному решению проблемы подсчета через топологические инварианты индекса эллиптической задачи на многообразии как без края (М. Ф. Атья, М. И. Зингер (Англия, США), так и с краем (М. Ф. Атья, Р. Ботт (США))). Подобные результаты для случая задания краевых условий на подмногообразиях различной размерности были получены С. П. Новиковым и Б. Ю. Стерниным (1965 г.).

М. И. Вишик и Г. И. Эскин (1964—1967 гг.) построили теорию разрешимости для более общих операторов, чем сингулярные интегро-дифференциальные операторы: их теория охватывает и интегральные уравнения (определенного «эллиптического» типа) первого рода.

В заключение перечислим еще несколько разделов теории эллиптических уравнений, в значительной мере ощутивших влияние функционального анализа: 1) существование фундаментального решения и автоматическая гладкость обобщенного решения эллиптического уравнения внутри области и вплоть до границы (работы С. Л. Соболева (1937 г.),

Я. Б. Лопатинского (1951 г.), Ю. И. Любича (1962 г.), Ю. М. Березанского, С. Г. Крейна и Я. А. Ройтберга (1963—1967 гг.), М. И. Матийчука и С. Д. Эйдельмана (1963—1966 гг.), Ю. П. Красовского (1967 г.)); 2) задачи для уравнений с разрывными коэффициентами (работы О. А. Ладыженской, О. А. Олейник, В. А. Ильина и И. А. Шихмарева, Я. А. Ройтберга и З. Г. Шефтеля (1962—1963 гг.), З. Г. Шефтеля (1963—1966 гг.); 3) теория эллиптических задач в областях с угловыми точками на границе (работы М. Ш. Бирмана и Г. Е. Сковорода (1962 г.), В. А. Кондратьева (1964 г.)); 4) задачи для эллиптических уравнений с нарушением условий Шапиро — Лопатинского (работы А. В. Бицадзе (1948—1966 гг.), Ю. В. Егорова и В. А. Кондратьева (1965 г.), Б. Р. Вайнберга и В. В. Грушина (1965 г.)); 5) задачи для различного типа обобщенных эллиптических уравнений — квазиэллиптических уравнений, эллиптических систем по Дуглису — Ниренбергу (работы С. Д. Эйдельмана, Л. Р. Волевича, В. А. Солонникова).



В. А. Ильин.

4

Некоторые другие типы уравнений

Не останавливаясь на классических задачах, связанных с параболическими и гиперболическими уравнениями, рассмотрим краевые задачи для некоторых других типов уравнений. Так, методами функционального анализа, изложенными в п. 2, удастся исследовать постановки задач для важных в трансзвуковой газовой динамике уравнений смешанного эллипτικο-гиперболического типа, т. е. уравнений вида

$$\sum_{j,k=1}^2 a_{jk}(x) D_j D_k u + \sum_{j=1}^2 b_j(x) D_j u + c(x) u = f(x), \quad (54)$$

где форма $\sum_{j,k=1}^2 a_{jk}(x) \xi_j \xi_k$ при $x > 0$ положительна (эллиптическая полуплоскость), а при $x < 0$ имеет один положительный и один отрицательный квадрат (гиперболическая полуплоскость). Точнее, удастся доказать энергетические неравенства (52) на функциях, удовлетворяющих (гр) (К. Фридрихс, К. Моравец (США), Ф. И. Франкль, Ю. М. Березанский, В. П. Диденко). Исследование гладкости найденных решений и устано-

вление их единственности проводится с большим трудом. В этом направлении следует отметить работу О. А. Олейник (1964 г.), посвященную подобным вопросам для эллипτικο-параболических уравнений. Упомянем также работу Н. Г. Сорокиной (1966 г.) для уравнений смешанного типа.

Методы функционального анализа, подобные указанным в п. 2, а также всевозможные аналитические подходы, применялись и при изучении краевых задач для других классов уравнений, например уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(x, y).$$

Здесь следует отметить также работы П. П. Мосолова, Г. И. Эскина, М. С. Салахитдинова, Б. П. Панеяха. Интересны исследования и А. А. Дезина в близком направлении.

Рассмотрим важные применения теории обобщенных функций к исследованию задачи Коши для системы с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (55)$$

Для решения задачи (55) можно перейти к преобразованию Фурье по переменным x и заменить функцию $u(t, x)$ функцией переменных λ, t

$\widetilde{u}(\lambda, t) = \widetilde{u(x, t)}$. Тогда (55) перейдет в задачу

$$\frac{d\widetilde{U}(\lambda, t)}{dt} = L(\lambda) \widetilde{U}(\lambda, t), \quad \widetilde{U}(\lambda, 0) = \widetilde{U_0(\lambda)} = \widetilde{u_0(x)}, \quad (56)$$

где $L(\lambda)$ — матрица, получаемая заменой производных на λ . Система (56) допускает решение $\widetilde{U}(\lambda, t)$; переходя к обратному преобразованию Фурье, получим решение задачи (55). Однако эта формальная схема требует существенных уточнений, так как функции $u(x, t)$ по x , вообще говоря, растут и применение классического преобразования Фурье незаконно. Вместе с тем, если пользоваться понятием обобщенных функций, преобразование Фурье можно применять и к неубывающим функциям. Например, преобразование Фурье от $f(x) \equiv 1$ равно δ -функции, сосредоточенной в 0, а обратное преобразование такой δ -функции дает 1, последнее очевидно формально

$$\tilde{\delta}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(x) e^{-i\lambda x} dx = (\delta_0, e^{-i\lambda x}) = e^{-i\lambda \cdot 0} = 1.$$

Из сказанного ясна плодотворность применения преобразования Фурье обобщенных функций к исследованию задачи (55). С другой стороны, при таком применении возникают трудности, связанные с тем, что решение уравнения как функции от λ при увеличении t может «портиться» (в простейшем случае одного уравнения решением служит $\widetilde{U}(\lambda, t) = e^{L(\lambda)t} \widetilde{U_0(\lambda)}$ и все зависит от вида $L(\lambda)$). При помощи удобного выбора пространств основных функций удастся найти условия на поведение

$u(x, t)$ при $|x| \rightarrow \infty$, гарантирующие единственность задачи (55), выяснять в зависимости от вида L , какие условия гарантируют существование классического решения (классы корректности) и т. д. Эти и близкие результаты были получены в 1953—1958 гг. И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым и их учениками: В. М. Борок, Я. И. Житомирским, Г. Н. Золотаревым, А. Г. Костюченко.

Приведем лишь следующий общий результат И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова, являющийся далеко идущим развитием соответствующих результатов А. Н. Тихонова (1935 г.) и С. Тэклинда (Швеция) для уравнения теплопроводности: задача (55) имеет единственное решение в классе функций, допускающих оценку

$$|f(x)| \leq C e^{b|x|^{p_0}} \left(\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_0} = 1 \right), \quad (57)$$

где $C, b > 0$ зависит от $f(x)$, а p_0 — так называемый приведенный порядок системы (в случае одного уравнения он просто совпадает с его порядком). Позже выяснилось сперва для параболических систем (Г. Н. Золотарев (1958 г.)), а затем для самых общих систем вида (55) (Н. Н. Чаус (1963 г.)), что класс единственности (57) может быть расширен — вместо константы $b > 0$ можно писать медленно растущую при $|x| \rightarrow \infty$ функцию $b(t)$ (характер медленности роста описывается).

Дальнейшее применение техники преобразования Фурье к исследованию вопроса о постановке и корректной разрешимости тех или иных задач для уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве дано Г. Е. Шиловым и его учениками Г. В. Дикополовым и В. П. Паламодовым (1960—1964 гг.), а также А. И. Марковским (1963 г.).

Перейдем к другому кругу вопросов, связанных с применением функционального анализа к уравнениям в частных производных. Как уже упоминалось в конце п. 3, для эллиптических уравнений обобщенные решения автоматически будут гладкими и даже аналитическими в случае аналитических коэффициентов. В связи с этим возник вопрос о том, для каких еще дифференциальных выражений его обобщенное решение будет бесконечно дифференцируемым. В этом направлении Л. Хермандером (Швеция) был открыт широкий класс выражений L с постоянными коэффициентами, обладающих тем свойством, что всякая обобщенная функция α , такая, что $L\alpha = 0$ будет входить в C^∞ . Это так называемые гипоеллиптические выражения. По рассматриваемым вопросам появилось большое количество литературы, в частности в СССР. Так, Г. Е. Шилов показал (1959 г.), что решения гипоеллиптического уравнения обязательно не только бесконечно дифференцируемы, но и принадлежат некоторому β -классу Жеврея, т. е. удовлетворяются локально оценки для любой производной D^α ($\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$)

$$|(D^\alpha u)(x)| \leq C B_1^{\alpha_1} \dots B_n^{\alpha_n} \alpha_1^{\beta \alpha_1} \dots \alpha_n^{\beta \alpha_n}$$

с некоторым $\beta > 0$ (своим для каждого L). В частности, при $\beta = 1$ β -класс Жеврея состоит из аналитических функций.

Е. А. Гориным введено (1961 г.) понятие гипоеллиптичности по выделенным переменным (по этим переменным возникает гладкость) и описаны такие выражения (подобные результаты были получены и за границей Дж. Фрибером (Швеция)). В. В. Грушин выяснил (1961 г.), когда для двух выражений L и M с постоянными коэффициентами равенство $Lu = 0$ влечет включение $Mu \in C^\infty$ или когда $M^l u$ становится все более гладким при $l \rightarrow \infty$. Л. Р. Волевич и Б. П. Панеях исследовали (1965 г.) вопрос, когда свойства регулярности обобщенной функции Lu влекут те или иные свойства регулярности Mu . Ряд результатов в подобном направлении получен М. С. Аграновичем (1959 г.). Например, показано, что если $Lu \in C^\infty$ в ограниченной области и $u \in C^\infty$ в граничной полосе области, то $u \in C^\infty$ во всей области.

Свойства типа гипоеллиптичности тесно связаны с характером фундаментального решения уравнения, т. е. решения $E(x)$ уравнения $Lu = \delta_0$, где в правой части стоит δ -функция, сосредоточенная в нуле. В направлении изучения характера особенности фундаментального решения, его поведения на бесконечности и т. д. получен ряд результатов В. В. Грушиным, Б. Р. Вайнбергом, Е. А. Гориным, М. С. Аграновичем, В. П. Паламоновым. Изучение на бесконечности фундаментальных решений гипоеллиптических уравнений позволило Б. Р. Вайнбергу и В. В. Грушину рассмотреть ряд задач для таких уравнений во всем пространстве типа задач для стационарного уравнения Шредингера с условиями излучения. Близкие вопросы рассматривались также Л. П. Нижником для случая некоторых негипоеллиптических уравнений (волновое уравнение и близкие к нему).

Большой цикл исследований выполнен В. П. Паламоновым по изучению интегрального представления решения уравнения (или системы) $Lu = 0$ с постоянными коэффициентами через экспоненциальные решения этого же уравнения. Именно, идет речь об обобщении хорошо известного представления в случае одной переменной

$$u(x) = \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j x}, \quad (58)$$

где λ_j — корни характеристического уравнения $L(\lambda) = 0$, а c_j — произвольные постоянные. При переходе к более чем одному переменному в выражении (58) сумма переходит в интеграл по многообразию комплексных нулей полинома $L(\lambda) = 0$, получаемого из L заменой производных на λ . Была доказана общая теорема относительно возможности такого представления и получен ряд выводов из нее, касающихся локальных свойств решений однородной системы, классов единственности обобщенной задачи Коши, описания областей существования решения системы $Lu = 0$ и т. д. За границей подобные вопросы развивали Л. Эренпрайс (США) и Б. Мальгранж (Франция).

Дифференциальные уравнения в банаховых пространствах

Под дифференциальным уравнением первого порядка в банаховом пространстве E понимается уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (59)$$

где $x(t)$ — искомая функция со значениями в банаховом пространстве E , а $f(t, x)$ при каждом t есть, вообще говоря, нелинейный оператор, определенный на части E и действующий в E . Производная $\frac{dx}{dt}$ понимается либо в сильном смысле, т. е. как предел по норме разностного отношения $\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ при $\Delta t \rightarrow 0$, либо в каком-нибудь слабом смысле.

Если пространство E — конечномерно, то уравнение (59) эквивалентно конечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений; если E — пространство последовательностей, то оно эквивалентно бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В функциональных пространствах к уравнению вида (59) могут быть сведены различные классы дифференциальных уравнений в частных производных и интегро-дифференциальных уравнений.

Рассмотрение этих различных по своей природе уравнений как обыкновенных уравнений в банаховом пространстве часто позволяет трактовать решения как интегральные кривые и применять к их исследованию те или иные геометрические соображения.

1

Линейные уравнения с ограниченными операторами

Первое систематическое исследование линейного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) \quad (60)$$

с линейным ограниченным оператором $A(t)$ и непрерывной функцией $f(t)$ было проведено М. Г. Крейном в 1947—1948 гг.

Существование решения задачи Коши с начальным условием

$$x(0) = x_0 \in E \quad (61)$$

устанавливается в этом случае без затруднений, поэтому основное внимание обращается на поведение решений на бесконечности. Для характеристики этого поведения вводится понятие особого показателя уравнения и исследуется его связь со спектральными свойствами операторов $A(t)$. Отрицательность особого показателя влечет за собой ряд важных



М. А. Рутман.

свойств уравнения (60), связанных с существованием ограниченных решений, с устойчивостью решений при нелинейных добавках в уравнении (60) и др. М. Г. Крейн получил обобщение и усиление известной первой теоремы Ляпунова об устойчивости. В случае гильбертова пространства он построил аналог второго метода Ляпунова.

К сожалению, результаты М. Г. Крейна были лишь частично напечатаны в краткой заметке (1948 г.) и в основном излагались в его лекциях и докладах. Только в 1964 г. они опубликованы в монографии «Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве».

Теория М. Г. Крейна обобщалась на уравнения, в которых производная понималась в более слабом смысле (Д. Л. Кучер), и на уравнения с многими «временами» (М. А. Рутман и др.).

В 1950 г. на линейные дифференциальные уравнения в гильбертовом и банаховом пространствах, содержащие параметры, были перенесены асимптотические методы интегрирования, берущие начало от работы Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова (Ю. Л. Далецкий и С. Г. Крейн). В дальнейшем эти методы были развиты и для уравнений с неограниченными операторами (Ю. Л. Далецкий и др.).

2

Нелинейные уравнения с ограниченными операторами

Для нелинейного уравнения (59) с ограниченным оператором $f(t, x)$ одним из первых ставятся вопросы о существовании решения задачи Коши, его единственности и нелокальной по t продолжимости. Многие аналогии со скалярными уравнениями здесь теряются в силу некомпактности шара бесконечномерного банахова пространства. Например, несправедлив аналог теоремы Пеано. Одним из основных методов получения локальных теорем существования является сведение уравнения к интегральному и применение различных принципов неподвижной точки — принципов сжатых отображений, Шаудера, Тихонова и др. Комбинация первых двух принципов позволила М. А. Красносельскому и С. Г. Крейну получить общую теорему существования, когда оператор $f(t, x)$ есть сумма вполне непрерывного и липшицева. Ими же с единой точки зрения были рассмотрены теоремы единственности и нелокальной продолжительности решений. Доказательства проводятся с помощью неравенств, позволяющих оценивать

время движения точки по траектории в банаховом пространстве. Условия носят характер односторонних оценок на $f(t, x)$ (типа условий единственности Осгуда — Тамаркина и нелокальной продолжимости Винтнера).

Интересным является то, что, как выяснилось в дальнейшем, эти односторонние условия являются и достаточными для существования решений (А. В. Кибенко, М. А. Красносельский, Я. Д. Мамедов). Доказательство проводится с использованием идеи Тоннели о переходе к уравнению с запаздывающим аргументом; при этом существенно используются дифференциальные и интегральные неравенства. Разработанные здесь методы применялись большой группой воронежских математиков для исследования различных свойств решений дифференциальных уравнений.

Детально исследовался вопрос о существовании периодических и почти периодических решений уравнения (59) с периодической или почти периодической правой частью (А. И. Перов, Ю. Г. Борисович, Ю. С. Колесов, В. Ш. Бурд, М. А. Красносельский и др.).

Большой цикл работ связан с так называемым принципом усреднения (И. И. Гихман, М. А. Красносельский, С. Г. Крейн, П. П. Забрейко и др.).

Ряд теорем существования, единственности и устойчивости был получен для уравнения (59) в локально выпуклых топологических пространствах (В. М. Миллионщиков).

3

Линейные уравнения с постоянными неограниченными операторами

В случае, когда в уравнении (60) оператор $A(t)$ неограничен, то центральными становятся вопросы существования и единственности решения задачи (60) — (61). Эти вопросы уже не являются простыми для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (0 \leq t < \infty) \quad (62)$$

с постоянным замкнутым неограниченным оператором A . На простейших примерах видно, что решения задачи (61) — (62) могут не существовать вообще, могут обрываться на конечном интервале времени, могут разветвляться и т. п.

Если задача Коши (61) — (62) в определенном смысле равномерно корректна, то ее решения задаются формулой

$$x(t) = U(t)x_0,$$

где $U(t)$ — сильно непрерывная полугруппа ($U(t + \tau) = U(t)U(\tau)$) ограниченных операторов, такая, что $U(t)$ сильно сходится к I при $t \rightarrow 0$ (С. Г. Крейн, П. Е. Соболевский, Р. Филлипс). Таким образом,



П. Е. Соболевский.

теория уравнения (62) тесно смыкается с теорией полугрупп, развитой в работах американских и японских математиков (Э. Хилле, Р. Филлипс, В. Феллер, К. Иосида, И. Миядера и др.). В этих работах были найдены необходимые и достаточные условия, которым должен удовлетворять оператор A , чтобы соответствующая полугруппа обладала указанными свойствами, т. е. чтобы задача Коши была равномерно корректной.

В приложениях эта абстрактная задача Коши включает в себя задачу Коши и смешанные задачи для параболических, гиперболических уравнений и систем, для уравнения Шредингера, для линейаризованных уравнений Новье — Стокса гидродинамики вязкой жидкости и т. п. Как известно, решения таких задач имеют существенно различные свойства, поэтому важной является проблема классификации

различных типов уравнений (62). В ряде работ советских и зарубежных математиков (М. А. Красносельский, С. Г. Крейн, П. Е. Соболевский, М. З. Соломяк) был выделен и детально изучен класс абстрактных параболических уравнений, решения которых аналитичны по t . В связи с указанным циклом работ была развита теория дробных степеней операторов, которая нашла особенно важные применения при исследовании нелинейных задач. В частности, М. А. Красносельским и П. Е. Соболевским построена теория дробных степеней так называемых позитивных операторов. Важным примером таких операторов являются эллиптические операторы произвольного четного порядка в пространствах L_p . Установлено, из каких пространств в какие пространства ограничено или вполне непрерывно действуют их отрицательные дробные степени (М. А. Красносельский, С. Г. Крейн, П. Е. Соболевский, В. П. Глушко, Е. И. Пустыльник, П. П. Забрейко).

Менее подробно изучены абстрактные гиперболические уравнения и связанные с ними общие понятия характеристик (Ю. Л. Далецкий, В. П. Маслов и др.).

Если отказаться от требования равномерной корректности задачи Коши, то можно отдельно ставить вопросы о единственности ее решения, о разрешимости при определенных начальных данных, о непрерывной зависимости от этих начальных данных и т. д.

Основная теорема единственности для уравнения (62) была получена Ю. И. Любичем. В ней утверждается, что при условии

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\ln \|R_A(\lambda)\|}{\lambda} = h < T$$

решение уравнения (62) при заданном начальном значении единственно на отрезке $[0, T - h]$. Примеры показывают, что при $t > T - h$ это решение может разветвляться. Развивая теорию локального преобразования Лапласа, Любич исследовал и другие указанные выше вопросы без предположения о равномерной корректности задачи Коши. К этому направлению относятся исследования Л. Н. Проккопенко, установившего теорему единственности для более общих операторов A и уравнений (62). Ему также принадлежит ряд результатов о классах единственности и существовании решений в случае оператора A , зависящего от t .

Вне зависимости от корректности задачи Коши ставится также вопрос о построении частных решений с заданным асимптотическим поведением при $t \rightarrow \infty$ и об отщеплении этих частных решений от других решений уравнения (62). Для некоторых классов уравнений этот вопрос решался в работах М. А. Евграфова, Ю. И. Любича, Ю. И. Домшлага и американских математиков С. Агмона и Л. Н. Ниренберга.

Если для уравнения (62) задача Коши корректна, то при неограниченном операторе A обратная (по времени t) задача Коши не является корректной. Однако можно исследовать различные классы решений этой задачи и в этих классах может иметь место единственность и непрерывная зависимость от начальных данных. Оказывается, например, что для параболических уравнений обратная задача Коши корректна в классах решений априори, ограниченных фиксированной константой (С. Г. Крейн, О. И. Прозоровская).



Ю. И. Любич.

4

Линейные уравнения с переменными неограниченными операторами

Первыми работами в СССР, в которых систематически изучались нестационарные уравнения с неограниченными операторами в гильбертовом пространстве, были работы М. И. Вишика и О. А. Ладыженской (1955—1956 гг.). Оба автора пришли к изучению абстрактных уравнений, отправляясь от своих исследований по теории смешанных граничных задач для различных классов дифференциальных уравнений в частных производных. Нестационарные уравнения в гильбертовом пространстве H рассматривались как стационарные уравнения в пространстве H_1 функций со значениями в H . Обобщенные решения

уравнений определялись с помощью различных интегральных тождеств. Были исследованы различные типы уравнений первого и второго порядка, построены приближенные методы их решения. В дальнейшем эти исследования развивались и обобщались другими учеными (П. Е. Соболевским в СССР, Ж. Л. Лионсом во Франции). П. Е. Соболевский построил теорию обобщенных решений параболических уравнений в банаховом пространстве.

Важный класс так называемых гамильтоновых уравнений в гильбертовом пространстве этими методами был изучен в работах В. А. Якубовича и его учеников (В. И. Дергузов, В. М. Фомин и др.).

С другой стороны, для уравнения (60) с неограниченным диссипативным оператором в банаховом пространстве еще в 1953 г. японский математик Т. Като получил фундаментальные теоремы существования и единственности сильных решений. Начиная с 1958 г. в работах П. Е. Соболевского независимо от японского математика Х. Танабе разработан новый метод доказательства теорем существования, который позволил установить разрешимость задачи Коши для абстрактных параболических уравнений в банаховом пространстве, исследовать гладкость и аналитичность ее решений.

В дальнейшем эти методы были применены к более широким классам уравнений (Я. Д. Мамедов, П. Е. Соболевский, С. Я. Якубов). Условия, которые налагались на оператор $A(t)$, формулировались в свойствах его резольвенты, что часто затрудняло их проверку. В последнее время П. Е. Соболевскому удалось сформулировать условия существования решения в терминах форм оператора и его сопряженного. Эти условия в приложениях дают теорему существования параболических уравнений с общими нормальными граничными условиями в пространствах L_p .

Долгое время сдерживающим фактором для приложений общей теории было требование зависимости от t области определения оператора $A(t)$. В конкретных задачах это означало независимость от t коэффициентов граничных условий. Первый существенный шаг в преодолении этой трудности был сделан П. Е. Соболевским в 1958 г. Ему удалось ограничиться условием постоянства области определения некоторой дробной степени оператора $A(t)$. Естественность этого условия исследовалась О. М. Козловым, С. Г. Крейном, П. Е. Соболевским, Т. Като и др.

5

Линейные уравнения высших порядков

Изучение уравнений высшего порядка обычно различными заменами сводится к изучению уравнений первого порядка в прямом произведении нескольких экземпляров исходного пространства. Подробнее всего исследованы уравнения второго порядка, где естественным образом выделены классы гиперболических, параболических и эллиптических уравнений. Детально изучена задача Коши

для гиперболических уравнений (Ю. Л. Далецкий, Я. Д. Мамедов, П. Е. Соболевский, В. А. Погореленко, С. Я. Якубов) и для параболических уравнений (П. Е. Соболевский, С. Я. Якубов).

Рассмотрены задачи с малыми параметрами при второй производной (Б. С. Митягин, Б. Н. Панайоти, П. Е. Соболевский и др.).

Для эллиптических уравнений второго порядка проводилось исследование краевых задач, выделение из них корректных и полукорректных задач, рассматривались задачи на собственные значения (С. Г. Крейн, Г. И. Лаптев, В. А. Тревогин).

В работах А. А. Дезина исследовались граничные задачи для уравнений 1-го порядка в гильбертовом пространстве.

М. А. Красносельский и Е. И. Пустыльник разработали новый способ исследования метода Фурье (условия применимости, быстрота сходимости и др.) решения различных уравнений в гильбертовом пространстве, основанный на теории дробных степеней операторов.



Я. Д. Мамедов.

6

Нелинейные уравнения с неограниченными операторами

Локальные и простейшие нелокальные теоремы существования решений для нелинейных уравнений вида (60) с замкнутым неограниченным оператором впервые были получены в совместных работах М. А. Красносельского, С. Г. Крейна и П. Е. Соболевского. К исследованию этих уравнений были применены дробные степени операторов. В дальнейшем для параболического случая П. Е. Соболевскому удалось развить метод дробных степеней операторов настолько, что полученные им в приложениях локальные теоремы существования решений общих граничных задач для квазилинейных параболических уравнений являются наиболее общими. Для гиперболического случая существенный результат был получен в работе С. Я. Якубова. Детально изучались решения нелинейных уравнений с потенциальными нелинейностями в работах Я. Д. Мамедова (за рубежом — в работах Браудера, Штрауса, Сегала и др.).

Одним из важных примеров нелинейных уравнений является система уравнений Навье — Стокса, описывающая движение вязкой несжимаемой жидкости. Главная особенность этой системы та, что она не является системой типа Коши — Ковалевской. Оказывается, что для оп-

ределенного класса задач система может быть сведена к эквивалентному уравнению в некотором гильбертовом пространстве (С. Г. Крейн). Исследованию вопроса о существовании решений этого уравнения, их устойчивости и др. был посвящен большой цикл работ (С. Г. Крейн, П. Е. Соболевский, В. И. Юдович и др.).

В последние годы начали закладываться основы качественной теории дифференциальных уравнений с неограниченными операторами. Отметим в первую очередь обобщения известной теоремы Кнезера о так называемой воронке. Эта теорема позволяет утверждать, что из наличия двух решений, выходящих из одной точки, следует существование континуума таких решений (М. А. Красносельский, П. Е. Соболевский, В. А. Погореленко, В. Г. Раскин).

Существенный прогресс был достигнут в вопросе о существовании периодических решений уравнений (М. А. Красносельский, П. Е. Соболевский, Ю. С. Колесов и др.) и, в частности, уравнений с релейным регулированием (Ю. С. Колесов).

Получены различные теоремы об устойчивости и неустойчивости решений, о существовании ограниченных решений (З. И. Халилов, Ю. И. Домшляк и др.).

7

Континуальные интегралы и уравнения в функциональных производных

Под континуальными (функциональными) интегралами обычно понимают различные процедуры интегрирования или усреднения по бесконечномерному пространству.

Среднее по пространству функций естественным образом возникает в теории случайных процессов. С каждым случайным процессом $x(t)$ ($0 \leq t \leq T$) связана некоторая мера μ в пространстве функций на промежутке $[0, T]$, причем средние для функционалов от процесса $x(t)$ являются интегралами по этой мере

$$M\Phi[x(\cdot)] = \int \Phi[x(\cdot)] d\mu.$$

Таким образом, описываемая область теснейшим образом связана с теорией случайных процессов и именно в рамках этой теории первоначально происходило ее развитие.

С другой стороны, рассмотрение континуальных интегралов с позиций функционального анализа совершенно естественно, поскольку оно связано с построением анализа функций, зависящих от бесконечномерного аргумента.

Развитие подобной дисциплины было намечено еще в семинаре Адамара лет 50 назад, но затем в связи с бурным развитием линейного функционального анализа работа в этой области почти прекратилась.

Необходимость развития бесконечномерного анализа диктуется также и потребностями ряда результатов теоретической физики (например, квантовой теории поля и гидродинамики).

Исследования в области континуального интегрирования в СССР с позиций функционального анализа были начаты по инициативе И. М. Гельфанда. В его выступлениях на семинаре, проблемном докладе на конференции по функциональному анализу в 1956 г. и опубликованной совместно с А. М. Ягломом статье в «Успехах математических наук» был приведен обзор многих важных результатов, относящихся к вине-ровским интегралам, и указано на физические применения этих результатов. Был также сформулирован ряд задач; некоторые из них были решены впоследствии.

Пусть X — линейное топологическое пространство, $\mathfrak{A}$ — некоторая σ -алгебра его подмножеств, содержащая алгебру $\mathfrak{A}_0$ цилиндрических множеств.

Нормированная мера μ на измеримом пространстве $(X, \mathfrak{A})$ порождает меру μ_0 на алгебре $\mathfrak{A}_0$. Последняя полностью определяется системой согласованных между собою мер в конечномерных пространствах (система конечномерных распределений или слабое распределение в X), которую будем обозначать тем же символом μ_0 . Задание слабого распределения в X эквивалентно заданию соответствующего характеристического функционала $\chi(\varphi)$ на сопряженном пространстве X' , введенного А. Н. Колмогоровым (1936 г.).

Возникает вопрос о том, всякая ли согласованная система конечномерных распределений определяет σ -аддитивную меру в X . В случае, когда пространство X состоит из всех функций $x(q)$ на некотором множестве Q и цилиндрические множества определяются конечными наборами точек из Q , положительный ответ на этот вопрос дается ставшей уже классической теоремой А. Н. Колмогорова (1933 г.). А. Н. Колмогоров указал (1937 г.) также некоторые условия, при которых порождаемая системой μ_0 мера μ сосредоточена на непрерывных функциях (здесь предполагается, что Q — отрезок вещественной оси).

В общем случае из теоремы Колмогорова можно вывести лишь тот факт, что μ_0 порождает меру μ на некотором расширении $\tilde{X}$ пространства X . Во многих случаях, однако, важно знать, не будет ли эта мера сосредоточена в более узком пространстве, например в X .

Условия, при которых слабое распределение X или, что то же самое, характеристический функционал) порождает счетно-аддитивную меру в X , были найдены Р. А. Минлосом (1958 г.) для случая, когда пространство X является сопряженным со счетно-гильбертовым пространством, и В. В. Сазоновым (1958 г.), опиравшимся на результаты Ю. В. Прохорова (1956 г.), для случая, когда пространство X гильбертово. А. Н. Колмогоров указал (1959 г.), что метод, примененный В. В. Сазоновым, распространяется и на случай счетно-гильбертова пространства. Это условие имеет топологический характер и приводит к обобщению известной теоремы Бохнера о представлении положительно определенного функционала на случай ядерного счетно-нормированного пространства.

В работе Ю. В. Прохорова был установлен критерий слабой компактности семейства мер в полном метрическом сепарабельном

пространстве. В частности, для гильбертова пространства подобный критерий был сформулирован в терминах характеристических функционалов. Эти результаты обобщены Ю. В. Прохоровым и В. В. Сазоновым (1960 г.) на случай ядерного счетно-гильбертова пространства.

Новый подход к проблеме продолжения слабого распределения до σ -аддитивной меры был указан А. М. Вершиком (1966 г.), показавшим, что рассмотрение пары (линейного пространства с мерой) (X, μ) эквивалентно рассмотрению пары (S_μ, L_μ) , где S_μ — пространство измеримых функций на X , L_μ — подпространство S_μ , состоящее из всех измеримых линейных функционалов. Условия продолжимости слабого распределения до меры при этом формулируются в терминах вложения пространства X' в некоторое стандартное пространство измеримых функций. Это условие имеет не топологический характер и лишь в случае счетно-гильбертова пространства превращается в топологическое условие Минлоса — Сазонова.

Наиболее изученным классом мер в линейных пространствах являются гауссовы меры, в особенности мера Винера. Последовательное изложение свойств винеровских интегралов с точки зрения конструкции Даниеля было дано Г. Е. Шиловым (1963 г.).

В ряде работ рассматривались функционалы на пространстве R_∞ бесконечных последовательностей с гауссовой мерой μ .

А. М. Вершиком построил (1962 г.) разложение пространства $L_\mu^2(R_\infty)$ функций на R_∞ , интегрируемых в квадрате по мере μ , по обобщенным полиномам Эрмита; это разложение обобщает известную конструкцию Винера. Линейные и квадратичные функционалы в пространстве R_∞ с мерой μ , являющейся произведением счетного числа одинаковых одномерных гауссовых мер ν , изучены Г. Е. Шиловым и Фан Дык Тинем (1966 г.). О. Г. Смолянов рассмотрел аксиоматически определенные измеримые линейные, полилинейные и степенные функционалы на таком пространстве (при этом мера ν не обязательно гауссова).

Большое количество работ посвящено преобразованиям мер при различных преобразованиях пространства. Камерон и Мартин установили, что мера Винера не является квазиинвариантной (это означает, что не при всех сдвигах она переходит в меру, абсолютно непрерывную относительно исходной). И. М. Гельфанд поставил задачу: доказать отсутствие квазиинвариантных мер в бесконечномерных линейных топологических пространствах. Эта задача была независимо решена И. В. Гирсановым и Б. С. Митягиным (1959 г.) и, в более общем случае, В. Н. Судаковым (1959 г.).

И. М. Гельфанд предложил (1957 г.) изменить определение квазиинвариантности, требуя, чтобы сдвинутая мера была абсолютно непрерывной относительно исходной лишь при сдвигах на элементы некоторого подмножества основного пространства (множество квазиинвариантности меры). Исследованию множеств квазиинвариантности мер в гильбертовом пространстве посвящены работы Б. С. Митягина (1961 г.) и В. Н. Судакова (1963 г.).

Дальнейшее исследование квазиинвариантных мер было проведено А. М. Вершиком (1966 г.), который нашел простые доказательства ряда

полученных ранее результатов, а также показал, что кроме гауссовых квазиинвариантными являются сферически симметричные меры.

И. М. Гельфанд использовал (1961 г.) квазиинвариантные меры для построения представления системы коммутационных соотношений квантовой теории поля. Многие из описанных выше результатов в развитой и дополненной форме излагаются в книге И. М. Гельфанда и Н. Я. Виленкина «Некоторые применения гармонического анализа».

Более общие линейные и нелинейные преобразования гауссовских случайных процессов рассмотрел А. Д. Шаташвили (1963 г.), обобщивший относящиеся к винеровскому процессу результаты Камерона и Мартина. В. В. Баклан и А. Д. Шаташвили перенесли (1965 г.) эти результаты на случай мер в гильбертовом пространстве.

Некоторые условия абсолютной непрерывности меры, получающейся при обратимом нелинейном преобразовании пространства из меры, не обязательно гауссовой, получены А. В. Скороходом (1966 г.).

В ряде работ развивались и детализировались общие результаты Фельдмана — Гаека об эквивалентности гауссовых мер.

В работах Ю. А. Розанова найден (1965 г.) удобный критерий эквивалентности двух мер, порождаемых стационарными гауссовыми процессами. Близкий результат для нестационарных процессов получен Ю. И. Голосовым (1966 г.).

Общий вид измеримого линейного преобразования пространства R_∞ с гауссовой мерой, являющейся произведением одинаковых одномерных мер, найден Фан Дык Тинем (1965 г.).

В работах А. М. Вершика изучались (1962, 1966 гг.) спектральные свойства измеримых автоморфизмов в линейных пространствах с мерой.

Важным классом мер в пространстве функций $x(t)$ вещественного аргумента $t \in [0, T]$ являются марковские меры, порожденные марковскими случайными процессами. В простейшем случае марковская мера порождается переходной плотностью, удовлетворяющей интегральному уравнению Чепмана — Колмогорова. В качестве переходной плотности может быть использовано фундаментальное решение задачи Коши для параболического дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = L\psi. \quad (63)$$

В частности, получаем меру Винера, когда в качестве L берется оператор Лапласа.

Фундаментальные решения уравнения

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = L\psi + v(x, t)\psi \quad (64)$$

порождают новую меру, которая при определенных предположениях о функции $v(x, t)$ абсолютно непрерывна относительно исходной с плотностью

$$\exp \int_0^T v(x(\tau), \tau) d\tau. \quad (65)$$

Этот результат для случая меры Винера составляет содержание известной теоремы М. Каца, на произвольные однородные марковские меры он был перенесен Е. Б. Дынкиным (1956 г.).

Более сложное преобразование марковской меры происходит при переходе от уравнения (63) к уравнению

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = L\psi + \sum_k a_k(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x_k}. \quad (66)$$

Это преобразование при некоторых предположениях о коэффициентах также оказывается абсолютно непрерывным, а выражение для плотности более сложно, чем соотношение (65), и содержит так называемые стохастические интегралы.

Описанный результат был впервые получен Ю. В. Прохоровым (1956 г.) в одномерном случае. В многомерном случае он был установлен А. В. Скороходом (1960 г.), изучавшим преобразования марковских процессов, связанные со стохастическими дифференциальными уравнениями.

Ю. Л. Далецкий получил (1961, 1962 гг.) аналогичный результат исходя из рассмотрения полугрупп операторов, соответствующих уравнениям типа (66). Эти рассмотрения были проведены и для систем уравнений, когда меры являются матричнозначными.

Часто под винеровским интегралом понимают не интеграл по мере Винера, а предел конечнократных интегралов по соответствующим конечномерным распределениям. Соотношение между этими двумя конструкциями было выяснено С. В. Фоминым (1958 г.) и Е. В. Майковым (1958 г.).

Для функционала типа (65) такой предел конечнократных интегралов может быть получен при рассмотрении некоторой последовательности разностных схем для уравнения (64).

Е. В. Майков и С. В. Фомин исследовали (1963 г.) связь между сходимостью разностных схем и сходимостью соответствующей последовательности мер к мере Винера.

Еще в работе И. М. Гельфанда и А. М. Яглома (1956 г.) был поставлен вопрос о том, нельзя ли, используя разностные схемы, получить представление в виде континуальных интегралов решений параболических уравнений порядка выше второго.

При этом следует заметить, что фундаментальные решения таких уравнений знакопеременны и потому порождают знакопеременную систему конечномерных распределений (квазимеру).

В. Ю. Крылов показал (1960 г.), что квазимера, соответствующая уравнению

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = (-1)^{p+1} \frac{\partial^{2p} \psi}{\partial x^{2p}} \quad (p > 1), \quad (67)$$

имеет неограниченную вариацию.

Ю. Л. Далецкий привел (1962 г.) критерий ограниченности вариации марковских квазимер и показал неограниченность вариации квазимер для широкого класса параболических уравнений. В. И. Ладохин

показал (1963 г.), что квазимера, отвечающая уравнению (67), разрывна уже на алгебре цилиндрических множеств.

Представление решений уравнения типа (64), (66) в виде континуальных интегралов, понимаемых как пределы конечнократных, для широкого класса параболических (и более общих операторных) уравнений и систем было получено Ю. Л. Далецким (1960, 1961 гг.).

Для уравнения $\frac{\partial \psi}{\partial t} = (-1)^{p+1} \frac{\partial^{2p} \psi}{\partial x^{2p}} +$
 $+ v(x)\psi$ подобное представление получил В. Ю. Крылов (1960 г.).

В ряде работ В. И. Ладохина (1963—1965 гг.) и в работе Ю. Л. Далецкого и В. И. Ладохина (1963 г.) был расширен класс функционалов, для которых существуют континуальные интегралы, понимаемые в указанном выше смысле. Этим же вопросам посвящена работа Е. В. Майкова (1963 г.), где континуальный интеграл понимается в несколько ином смысле. В работе Ю. Л. Далецкого и А. Т. Заплитной (1965 г.) были рассмотрены меры и интегралы на пространстве ветвящихся траекторий, связанные с некоторыми нелинейными параболическими уравнениями.

В связи с потребностями квантовой механики Р. П. Фейнман ввел без строгого обоснования в рассмотрение континуальные интегралы, построенные подобно винеровским, но с использованием в качестве переходной функции фундаментальных решений уравнения Шредингера

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} = i\Delta\psi. \quad (68)$$

В этом случае неограниченной оказывается вариация даже для конечномерных распределений при фиксированной размерности.

В работах Ю. Л. Далецкого (1960—1962 гг.) фейнмановским интегралам от функционалов типа (65) и более общим, связанным с уравнением, которое отличается от уравнения (68) членами, содержащими производные первого порядка, был придан строгий смысл на том же пути, что и для параболических уравнений старших порядков.

Ряд результатов В. И. Ладохина и Е. В. Майкова, описанных в предыдущем разделе для параболических уравнений, был установлен и для уравнения Шредингера.

Континуальные интегралы использовались при рассмотрении физических задач И. М. Гельфандом, Р. А. Минлосом, Ф. А. Березиным, Л. Д. Фаддеевым и др.

Дифференциальные уравнения в функциональных производных являются естественным бесконечномерным аналогом уравнений с частными производными.



Ю. Л. Далецкий.

Эти уравнения в последнее время часто встречаются в работах физического характера, однако строго обоснованных результатов в этой области немного.

Большое количество результатов, полученных довольно давно последователями Адамара, в не вполне строгой форме изложено в известной книге П. Леви «*Problemnes concrets d'analyse fonctionnelle*».

В работах А. В. Свидзинского (1959 г.), А. Н. Шерстнева (1961 г.), М. Н. Феллера (1965 г.) рассматривались отдельные дифференциальные уравнения в вариационных производных, аналогичные некоторым обыкновенным дифференциальным уравнениям, причем при решении использовались методы, связанные с восстановлением примитивного функционала по его функциональной производной.

Ю. Л. Далецкий и Н. М. Кухарчук дали (1965 г.) строгое изложение теории характеристик и теории полного интеграла для уравнений первого порядка от функций на области банахова пространства. Некоторые из таких уравнений в линейном топологическом пространстве рассмотрены В. И. Авербухом (1967 г.).

Рассмотрение дифференциальных уравнений второго порядка, аналогичных классическим уравнениям математической физики, оказывается существенно более трудным, поскольку оно требует в том или ином виде интегрирования по бесконечномерному пространству.

Леви в цитированной выше книге ввел в рассмотрение дифференциальный оператор в вариационных производных второго порядка, аналогичный оператору Лапласа, и рассмотрел некоторые задачи, связанные с ним. Изучение различных краевых задач, связанных с этим оператором, было продолжено Е. М. Полищуком (1962—1965 гг.) и М. Н. Феллером (1965—1966 гг.).

Оператор Леви — Лапласа обладает рядом парадоксальных свойств, напоминающих свойства операторов первого порядка. Запас связанных с ним гармонических функционалов очень велик.

Г. Е. Шилов построил (1967 г.) теорию этого оператора, связанную с теорией нормированных колец, рассмотрел несколько краевых задач и показал, что в некотором смысле он действительно является оператором первого порядка.

Некоторые другие операторы второго порядка в функциональных производных рассмотрены Е. А. Новиковым (1961 г.).

В. В. Баклан (1964 г.) и Т. Л. Чатладзе (1964 г.) независимо рассмотрели стохастические уравнения в гильбертовом пространстве. Обратным уравнением А. Н. Колмогорова для диффузионного процесса, являющегося решением этого уравнения, служит параболическое уравнение второго порядка в функциональных производных. Было доказано существование решения задачи Коши для некоторых уравнений такого типа.

Используя тот же метод, но не в гильбертовом пространстве, а в ядерной шкале таких пространств, Ю. Л. Далецкий рассмотрел (1966—1967 гг.) более общий класс параболических уравнений второго порядка, связанных с эллиптическими операторами в функциональных производных вида

$$l(F) = Sp [B(x) F''(x)].$$

Коммутативные нормированные кольца (банаховы алгебры)

И. М. Гельфанду принадлежит (1939—1941 гг.) создание нового большого направления в функциональном анализе — общей теории коммутативных нормированных колец (банаховых алгебр). В этой теории замечательным образом сочетаются идеи современной алгебры и общей теории банаховых пространств, и она позволяет исследовать многие вопросы классического анализа.

Теория коммутативных нормированных колец в настоящее время переживает период зрелости, основные ее понятия стали весьма популярными и прочно вошли в математический обиход.

В 1956 г. вышла монография М. А. Наймарка «Нормированные кольца» (второе издание — в 1968 г.), а в 1960 г. — монография И. М. Гельфанда, Д. А. Райкова и Г. Е. Шилова «Коммутативные нормированные кольца».

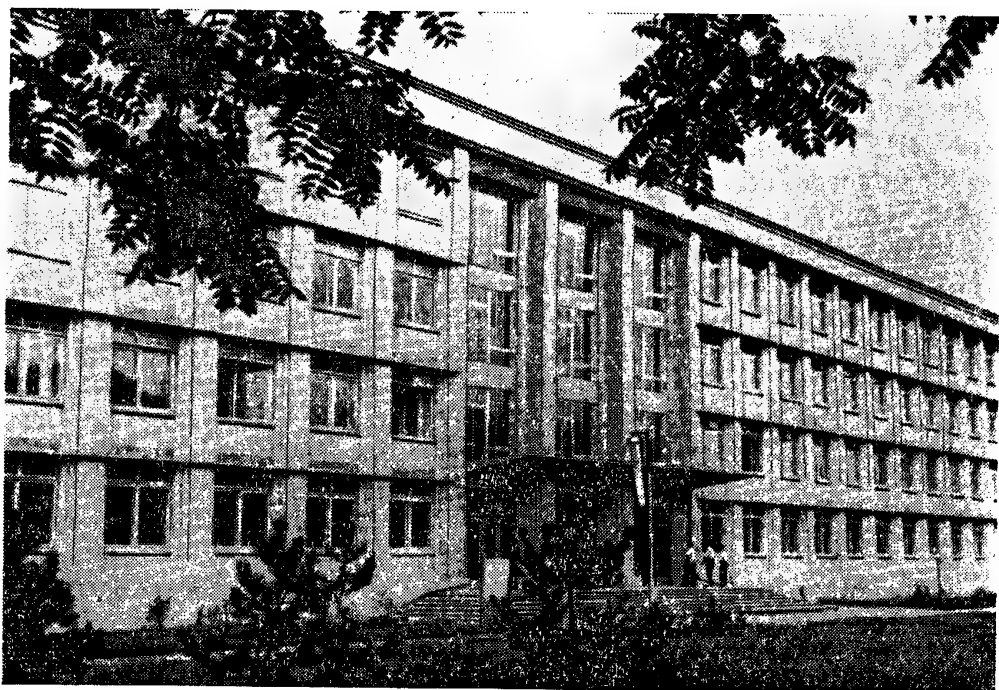
Обе эти монографии, посвященные нормированным кольцам, переведены на многие иностранные языки.

1

Общая теория коммутативных нормированных колец

Коммутативная алгебра A над полем комплексных чисел называется коммутативным нормированным кольцом или коммутативной банаховой алгеброй (ниже для краткости чаще всего употребляется термин «алгебра»), если A одновременно является банаховым пространством, причем алгебраические операции непрерывны. Заменяя, если необходимо, норму в A эквивалентной, можно предположить, что $\|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ ($f, g \in A$) и $\|e\| = 1$ (e — единица алгебры A).

Центральным в гельфандовской теории является понятие максимального идеала. В рассматриваемом случае множество обратимых (относительно умножения) элементов алгебры A открыто, и поэтому максимальные идеалы замкнуты. С другой стороны, в силу теоремы Гельфанда — Мазура всякое полное нормированное поле изометрически изоморфно полю комплексных чисел. Тем самым возникает естественная двойственность между максимальными идеалами алгебры A и мультипликативными функционалами (необходимо имеющими норму 1) на этой алгебре: всякий максимальный идеал есть ядро однозначно определенного мультипликативного линейного функционала, т. е. гомоморфизма алгебры A в поле C^1 комплексных чисел. Мультипликативные функционалы образуют компакт (не обязательно метризуемый) в слабой топологии сопряженного к A пространства. Перенося эту топологию на множество максимальных идеалов, получаем топологическое пространство $\mathfrak{M}$, которое называется пространством максимальных идеалов алгебры A . Естественно возникающий непрерывный гомоморфизм $A \rightarrow C\mathfrak{M}$ называется



Кишиневский государственный университет.

гельфандовским представлением алгебры A . Символом $\hat{f}$ обозначается образ элемента $f \in A$ при этом гомоморфизме.

Оказывается,

$$\max_{M \in \mathcal{M}} |\hat{f}(M)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}}$$

для любого $f \in A$. Элементы, для которых $\|f^n\|^{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), называются обобщенными нильпотентными, а их совокупность называется радикалом алгебры A . Радикал совпадает с пересечением максимальных идеалов. Для того чтобы элемент $f \in A$ был обратим (относительно умножения), необходимо и достаточно, чтобы $\hat{f}(M) \neq 0$ при всех $M \in \mathcal{M}$, т. е. чтобы $\varphi(f) \neq 0$ для всех мультипликативных линейных функционалов φ . Алгебра A называется полупростой или алгеброй функций, если гельфандовский гомоморфизм является мономорфизмом, т. е. радикал состоит из одного нуля. Полупростая алгебра называется алгеброй с равномерной сходимостью, если, кроме того, этот гомоморфизм является гомеоморфизмом в $C(\mathcal{M})$.

Весьма важный класс алгебр — так называемые регулярные алгебры — был глубоко изучен Г. Е. Шиловым (1947 г.). Полупростая алгебра A называется регулярной, если ее пространство максимальных идеалов $\mathcal{M}$ обладает следующим свойством: для любого замкнутого множества $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$ и не принадлежащей к нему точки $M \in \mathcal{M}$ можно найти элемент $f \in A$, такой, что $\hat{f}(M) = 0$ ($M \in \mathcal{M}_1$) и $\hat{f}(M_0) \neq 0$. Шило-

вым установлено, что в регулярных алгебрах имеет место «критерий локальной принадлежности»: если некоторая числовая функция $x(M)$ ($M \in \mathfrak{M}$) в окрестности каждой точки $M_0 \in \mathfrak{M}$ совпадает с некоторой функцией $\hat{f}(M)$ (зависящей от M_0), то существует элемент $f_0 \in A$, такой, что

$$x(M) = \hat{f}_0(M) \quad (M \in \mathfrak{M}).$$

Очень интересны исследования Г. Е. Шилова структуры примарных идеалов в регулярной алгебре. Они позволили на основе общей теории получать тауберовы теоремы типа Винера, играющие значительную роль в современном анализе.

Г. Е. Шилову принадлежит также важное понятие границы множества $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов, которое оказалось весьма плодотворным, в частности в современной теории приближений.

В теории И. М. Гельфанда доказывается, что если значения функции $\hat{f}(M)$ лежат в области G комплексной плоскости и $F(z)$ — однозначная аналитическая функция в этой области, то в кольце есть элемент, которому отвечает функция $F(\hat{f}(M))$. Обобщение этой теоремы на случай аналитических функций от нескольких переменных было выполнено Г. Е. Шиловым. Как следствие была получена теорема о возможности разложения кольца с несвязным носителем $\mathfrak{M}$ в прямую сумму идеалов. При попытке обобщить этот результат на многозначные аналитические функции Шилов допустил неточность, и в общем случае, как показала Е. Каллин, утверждение теоремы неверно. Впоследствии Шилов предложил исправление формулировки. В частности, теорема оказалась верной для важнейших многозначных функций, существенно зависящих лишь от одной переменной. Кроме того, справедливы те следствия этой теоремы, которые использованы И. Ц. Гохбергом и М. Г. Крейном при построении теории интегральных уравнений на полуоси.

2

Изучение конкретных алгебр

Как уже отмечалось, важным достижением теории коммутативных нормированных алгебр является получение тауберовых теорем типа Винера. По существу эти теоремы связаны с отысканием примарных идеалов некоторых алгебр со свертыванием. Г. Е. Шилов обнаружил, что в алгебре A аналитических функций $f(z)$ в круге $|z| < 1$, непрерывных в замкнутом круге $|z| \leq 1$, максимальные идеалы, отвечающие граничным точкам $|z_0| = 1$, содержат континуальную цепочку вложенных друг в друга примарных идеалов. Впоследствии Берлингом и Рудиным было дано описание всех замкнутых идеалов этой алгебры A . Б. И. Коренблюм описал все примарные идеалы, соответствующие бесконечно удаленной точке, для алгебры W_α аналитических функций в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq \alpha$, являющихся преобра-

зованиями Фурье функций $\varphi(t)$, абсолютно интегрируемых на оси $-\infty < t < \infty$ с весом $e^{\alpha|t|}$. Это дало возможность получить для такого случая правильную формулировку тауберовой теоремы Винера. Интересно также, что была обнаружена связь этой обобщенной теоремы Винера с тауберовыми теоремами типа теоремы Келдыша для отношения функций.

Задача выяснения структуры замкнутых или даже максимальных идеалов в конкретных алгебрах зачастую оказывается весьма сложной.

Пусть, например, $\{\alpha_k\}$ — последовательность положительных чисел, причем $\alpha_{k+l} \leq \alpha_k \alpha_l$, $\alpha_0 = 1$. Рассмотрим алгебру $R(\alpha_k)$ формальных степенных рядов

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k$$

с естественными операциями и нормой

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k |a_k|.$$

Если $\alpha_{\frac{1}{k}} \rightarrow 0$, то $R(\alpha_k)$ обладает единственным максимальным идеалом $I_0 = \{f : a_k = 0 \text{ при } k = 0\}$. Ясно, что $I_m = \{f : a_k = 0 \text{ при } k \leq m\}$ суть замкнутые идеалы в $R(\alpha_k)$, и при достаточно регулярных $\{\alpha_k\}$ этими идеалами исчерпываются все замкнутые идеалы. Однако, как показал Н. К. Никольский, в общем случае картина гораздо сложнее: система замкнутых идеалов $R(\alpha_k)$ может оказаться несчетной.

Американский математик Э. Глисон в связи с исследованием конечно порожденных максимальных идеалов поставил следующую задачу. Пусть A — алгебра непрерывных функций в шаре $|z_1|^2 + |z_2|^2 \leq 1$ пространства C^2 , голоморфных внутри этого шара. Порождается ли максимальный идеал, отвечающий началу координат, координатными функциями? Положительный ответ на этот вопрос получен Э. Л. Лейбензоном.

В. В. Грушин описал все замкнутые идеалы в алгебре векторно-гладких функций на торе. Оказалось, в частности, что всякий такой идеал есть пересечение примарных.

Б. С. Митягин дал полное описание пространств максимальных идеалов n -мерных аналогов винеровских алгебр степенных рядов с весами, как замкнутых n -кратно круговых областей в C^n , являющихся замыканиями областей голоморфности.

В. П. Гурарием и Б. Я. Левиным дано описание примарных идеалов алгебр функций на полуоси, абсолютно интегрируемых с весом, с операцией свертывания в качестве умножения элементов.

Важным достижением было решение Ю. А. Шрейдером весьма трудной задачи описания максимальных идеалов в кольце W , ограниченных мер на прямой

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} d\mu_t(s), \quad \text{var } \mu_t(s) = \|f\| < \infty.$$

Винер и Питт конструктивно показали, что существуют функции $\varphi(t) \in W$, такие, что $|f(t)| \geq d > 0$ и $\frac{1}{f(t)} \in W$. Это показывает, что множество значений $f(t)$ при вещественных t не только не исчерпывает совокупности $\mathfrak{M}$ мультипликативных функционалов кольца W , но и не плотно в этой совокупности.

В своих работах (1948—1951 гг.) Ю. А. Шрейдер дал полное описание совокупности $\mathfrak{M}(W)$. Оказалось, что мультипликативные функционалы кольца W описываются формулой

$$\hat{f}(M) = \int M(s) d\mu_f(s),$$

где $M(s)$ есть так называемый обобщенный характер; эта функция удовлетворяет условию $M(s+t) = M(s)M(t)$ для почти всех пар (s, t) по отношению к произведению мер $\mu_f(s)$ и $\mu_f(t)$. Эта функция $M(s)$, вообще говоря, изменяется вместе с функцией $f(t)$, но если мера μ_{f_1} абсолютно непрерывна относительно меры μ_{f_2} , то $M_{f_1}(s) = M_{f_2}(s)$ почти всюду по мере μ_{f_1} . Шрейдер детально описал строение всего носителя $\mathfrak{M}$ кольца W и расположение в нем совокупности функционалов типа $f(t_0)$. Результат Винера и Питта при этом получается из общих соображений.

3

Алгебры с равномерной сходимостью

Естественный путь возникновения алгебр с равномерной сходимостью состоит в следующем. Пусть X — компакт, $C(X)$ — алгебра всех непрерывных функций на X с обычной нормой. Всякая замкнутая подалгебра A алгебры $C(X)$ есть алгебра с равномерной сходимостью (хотя пространство максимальных идеалов такой алгебры может и не совпадать с X). Известная теорема Стоуна — Вейерштрасса утверждает, что если A разделяет точки X и $f \in A$ вместе с f (это свойство называется симметричностью), то $A = C(X)$.

В общем случае в A можно выделить замкнутую подалгебру A_1 , обладающую тем свойством, что если f принадлежит этой подалгебре, то и $\bar{f}$ обладает этим свойством. Поскольку вещественными функциями из A_1 компакт X , вообще говоря, не разделяется, возникает разбиение этого компакта на классы эквивалентных между собой точек. Сужение алгебры A на каждый такой класс K есть замкнутая подалгебра алгебры $C(K)$. Г. Е. Шиловым было показано, что если $f \in C(X)$ и $f/K \in A/K$ при всяком K , то $f \in A$. Е. А. Горин обнаружил, что если для любого K алгебра A/K имеет своим пространством максимальных идеалов само K , то X есть пространство максимальных идеалов A . С каждой из алгебр A/K можно проделать ту же процедуру выделения симметричной части. Повторяя этот процесс, если необходимо, по трансфинитам, в результате приходим к разбиению компакта X на такие замкнутые множества Y , что алгебры A/Y все являются антисимметричными.

Такие множества Y называются множествами антисимметрии, и в данном случае процесс приводит к максимальным множествам антисимметрии. Шилов предположил, что его теорема остается справедливой, если классы K заменить максимальными множествами антисимметрии. Американский математик Э. Бишоп доказал справедливость этой гипотезы. Е. А. Горин построил пример, показывающий, что для получения множества Y , вообще говоря, требуется бесконечное число раз повторять шиловский процесс выделения симметричной подалгебры.

Теорема Шилова — Бишоп в принципе сводит изучение произвольных алгебр с равномерной сходимостью к изучению антисимметричных. Алгебры аналитических функций являются антисимметричными. Однако произвольная антисимметричная алгебра, даже заданная на своем пространстве максимальных идеалов, состоит из функций, по своим свойствам далеких, вообще говоря, от аналитических функций. Так, антисимметричная алгебра, как это следует из теоремы Шилова — Бишоп и одного примера, построенного американским математиком Р. Мак-Киссиком, может образовывать нормальное семейство на своем пространстве максимальных идеалов (т. е. разделять любые два непересекающихся замкнутых множества). Конструкция Мак-Киссика основана на некоторых специфических свойствах неединственности для аналитических функций с особенностями. Простой метод построения таких функций предложил А. А. Гончар.

Большой интерес представляют различные критерии совпадения данной алгебры с равномерной сходимостью с алгеброй всех непрерывных функций на компакте.

Пусть X — локально связный компакт и A — замкнутая подалгебра алгебры $C(X)$, содержащая константы и разделяющая X . Предположим, что в A при любом g разрешимо уравнение $f^2 = g$. Как показал Е. М. Чирка, отсюда следует, что $A = C(X)$. Из этой теоремы вытекает, в частности, следующее утверждение. Пусть γ — жорданова дуга в C^2 и $A(\gamma)$ — алгебра равномерных пределов голоморфных на γ функций. Тогда либо $A(\gamma) = C(\gamma)$, либо $f|_{\gamma}$ содержит внутренние точки для любой непостоянной голоморфной на γ функции f .

Е. А. Горин доказал, что если A — замкнутая подалгебра алгебры $C(X)$ на метризуемом компакте X , причем для любой строго положительной функции $g \in C(X)$ существует такой обратимый элемент $f \in A$, что $|f(x)| = g(x)$, то $A = C(X)$.

4

Кольца

с локально компактным базисом

В связи с исследованием уравнений Штурма — Лиувилля Б. М. Левитан в 1940 г. ввел операцию обобщенного сдвига интегрируемых функций на $(0, \infty)$, позволившую построить обобщенную свертку двух таких функций. Наличие обобщенной свертки позволяет превратить совокупность интегрируемых функций на $(0, \infty)$

в нормированное кольцо, закономерности которого тесно связаны с рассматриваемым дифференциальным оператором.

В частности, для решений определенного класса уравнений Штурма — Лиувилля А. Я. Повзнером в 1944 г. впервые были получены аналоги теорем Планшереля и Бохнера.

Ю. М. Березанский и С. Г. Крейн в 1950 г. изучили обобщенную свертку «в чистом виде» для интегрируемых функций на локально компактном пространстве Q , определив ее формулой

$$(x * y)(q) = \int_Q x(t) dt \int_Q y(\tau) d\tau C(E_t, E_\tau, q),$$

где функция множеств $C(A, B, q)$ играет роль, аналогичную роли кубической матрицы структурных констант гиперкомплексной системы. При выполнении некоторых дополнительных условий на $C(A, B, q)$ эта операция свертывания порождает коммутативную банахову алгебру, которую называют кольцом с базисом Q . Исследование этого кольца позволяет ввести в него «характеры», которые связаны с его максимальными идеалами так же, как и в обычных групповых кольцах по Гельфанду — Райкову. Это позволяет развить теорию, аналогичную теории гармонического анализа на локально компактных группах, вплоть до построения аналога теоремы двойственности Л. С. Понтрягина. Кольца с базисом нашли также глубокие применения в спектральной теории дифференциальных операторов и теории ортогональных многочленов.

5

Некоторые другие вопросы

1. Пусть A — замкнутая подалгебра алгебры B . Алгебра A называется максимальной, если между A и B не существует других замкнутых подалгебр алгебры B . Первый нетривиальный пример максимальной подалгебры алгебр всех непрерывных функций на компакте был обнаружен Вермером. Пусть Γ — единичная окружность в комплексной плоскости, $B = C(\Gamma)$ и A — совокупность тех функций из B , которые допускают голоморфное распространение внутрь единичного круга. Теорема Вермера утверждает, что алгебра A максимальна. Е. А. Горин нашел аналог теоремы Вермера для функций n переменных, $n > 1$. Разумеется, алгебра тех непрерывных функций на n -мерном торе (естественно реализованном в C^n), которые допускают голоморфное распространение внутрь соответствующего полицилиндра при $n > 1$, далека от максимальной. Однако эта алгебра является максимальной в классе U^+ -инвариантных алгебр, где U^+ — полугруппа сохраняющих ориентацию автоморфизмов тора, относительно которых инвариантна алгебра A (всякий такой автоморфизм задается целочисленной унимодулярной матрицей с неотрицательными элементами; при $n = 1$ полугруппа тривиальна).

2. Еще в 1952 г. Г. Е. Шилов дал полную классификацию однородных алгебр типа C на двумерном торе, содержащих алгебру D_1 непрерывно дифференцируемых функций. Б. С. Митягин исследовал запас алгебр того же типа между D_1 и D_2 .

3. В 1954 г. З. Л. Лейбензон показал, что гомоморфизмы (гладкие) винеровской алгебры W абсолютно сходящихся рядов Фурье являются аффинными, т. е. имеют вид $f(x) \rightarrow f(\omega(x))$, где $\omega(x) = vx + \theta$, v — целое. Аналогичный результат был получен Берлингом для интегралов Фурье. Однако долгое время оставался открытым вопрос об аффинности гомоморфизмов винеровских алгебр с весами. В 1965 г. З. Л. Лейбензоном даны близкие необходимые и достаточные условия.

4. Пусть A_0 и A_1 — две алгебры, причем $A_1 \subset A_0$. Говорят, что выполнено винеровское соотношение, если множество обратимых элементов алгебры A_1 есть пересечение множества обратимых элементов алгебры A_0 с A_1 . Типичный пример: алгебра всех непрерывных функций на окружности и винеровская алгебра абсолютно сходящихся рядов Фурье. Различные свойства, связанные с винеровскими соотношениями, исследованы М. Г. Сонисом и С. И. Рабиновичем.

Представления локально компактных групп

1

Введение

Источником теории представлений, по крайней мере той ее части, которая принадлежит функциональному анализу, является классическая теория рядов Фурье. Обозначим через H линейное пространство комплексных непрерывных периодических (с периодом 2π) функций на числовой оси. Такие функции можно рассматривать как функции $f(x)$ на единичной окружности. При этом точку x окружности будем обычным образом отождествлять с соответствующим центральным углом. Углы $0 \leq x < 2\pi$ образуют группу относительно сложения углов. Каждому элементу α этой группы можно отнести линейный оператор сдвига $U(\alpha)$ в пространстве H : $f(x) \rightarrow f(x + \alpha)$. Легко видеть, что $U(\alpha_1)U(\alpha_2) = U(\alpha_1 + \alpha_2)$. Функции e^{inx} ($n = 0; \pm 1, \pm 2, \dots$) и только они с точностью до числового множителя являются собственными векторами операторов $U(\alpha)$. Каждая функция из H может быть разложена в ряд по этим функциям (ряд Фурье).

Следующее определение связано с далеко идущим обобщением только что описанной ситуации.

Отнесем каждому элементу g группы G линейный оператор $U(g)$, действующий в фиксированном линейном топологическом пространстве H так, чтобы выполнялись следующие условия: 1) $U(g_1)U(g_2) = U(g_1g_2)$; 2) $U(e) = I$ (e — единица группы, I — единичный оператор); 3) $U(g)\xi$ ($\xi \in H$) — непрерывная функция на группе G со зна-

чениями в H . Полученное соответствие называется представлением U группы G в пространстве H . Группа G предполагается локально компактной. Рассмотрение представлений не локально компактных групп очень желательно, но приводит к непреодолимым в настоящее время трудностям. В этом направлении имеются лишь отдельные результаты. Теория представлений локально компактных групп в бесконечномерных пространствах является важной быстроразвивающейся частью функционального анализа. Наиболее развита теория унитарных представлений. В этом случае H — гильбертово пространство, а операторы $U(g)$ унитарны. Ниже, как правило, будем рассматривать унитарные представления.

Подпространство $H' \subset H$ называется инвариантным, если $U(g)H' \subset H'$ при всех $g \in G$. Сужение операторов $U(g)$ на H' определяет в H' представление, называемое частью представления U . Часто удается свести изучение представления к изучению его частей. В связи с этим центральную роль играют представления, не имеющие частей. Они называются неприводимыми.

Известно, что на каждой локально компактной группе существует правоинвариантная борелевская мера dg . Она характеризуется тем, что для любой суммируемой функции $f(g)$ на группе имеет место равенство

$$\int f(g\gamma) dg = \int f(g) dg \quad (69)$$

для всех $\gamma \in G$. Равенство (69) определяет меру, с точностью до числового множителя, единственным образом. Рассмотрим гильбертово пространство $L^2(G)$ функций на группе суммируемых с квадратом относительно меры dg . Из равенства (69) следует, что операторы сдвига $R_\gamma : f(g) \rightarrow f(g\gamma)$ определяют в $L^2(G)$ унитарное представление — регулярное представление группы. Изучение этого представления составляет основной предмет гармонического анализа на группе G . Более общим образом гармонический анализ изучает представления, порожденные операторами сдвига в тех или иных семействах функций на группе (например, финитные функции, обобщенные функции и т. п.). Вместо функций на группе можно также рассматривать функции на однородном пространстве G/Γ , т. е. функции на множестве правых классов смежности группы G по подгруппе Γ . На таких функциях естественным образом определены операторы сдвига R_γ . Они определяют регулярное представление на однородном пространстве. Соответствующие задачи составляют предмет гармонического анализа на однородных пространствах.

Наиболее простым является случай, когда G компактная группа. Теория представления компактных групп была построена в 20-х годах Р. Петер и Г. Вейлем и послужила отправной точкой для построения куда более сложной и все еще не завершенной теории представлений локально компактных групп. Приведем вкратце основные результаты теории представлений компактных групп.

Для компактной группы мера dg инвариантна как относительно правых, так и левых сдвигов (двусторонне инвариантна).

Все неприводимые непрерывные представления компактной группы конечномерны и унитарны. Последнее означает, что в пространство H можно так ввести скалярное произведение, что относительно него представление окажется унитарным.

Каждое унитарное представление U распадается в прямую сумму неприводимых

$$U = U^1 + U^2 + \dots \quad (70)$$

Это означает, что пространство H распадается в прямую сумму инвариантных неприводимых подпространств H^n . Через U^n обозначена неприводимая часть представления U , соответствующая подпространству H^n . При этом кратность, с которой неприводимое представление U^n входит в правую часть выражения (70), однозначно определена. Она может быть бесконечной. В частности, каждое неприводимое представление входит прямым слагаемым в разложение регулярного представления столько раз, какова его размерность. Если обозначить через U^n неприводимые представления группы G , то матричные элементы $U_{\alpha\beta}^n(g)$ образуют полный ортогональный базис в $L^2(G)$.

Таким образом, любая функция $f(g)$ из $L^2(G)$ может быть разложена в ортогональный ряд

$$f(g) = \sum_{n,\alpha,\beta} C_{\beta\alpha}^n U_{\alpha\beta}^n(g) = \sum_n S_p(C^n U^n(g)). \quad (71)$$

Отсюда следует

$$\|f\|^2 = \sum_{n,\alpha,\beta} (C_{\beta\alpha}^n \bar{C}_{\beta\alpha}^n) r_n = \sum_n r_n S_p(C^n C^{n*}) \quad (72)$$

(r_n — константы, определяемые нормировкой меры dg).

Каждое неприводимое представление U^n однозначно определяется своим характером $\chi^n(g) = S_p U^n(g)$.

Если G — коммутативная группа, то все неприводимые представления одномерны и совпадают, таким образом, с характерами¹. В этом случае равенства (71) и (72) принимают особо простой вид. Так, если G — единичная окружность: $g = e^{i\varphi}$, то $\chi^n(g) = U^n(g) = e^{in\varphi}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В этом случае равенство (71) является разложением в ряд Фурье, а (72) — равенством Парсеваля.

В некомпактном случае описанная выше ситуация усложняется. Группа имеет множество неунитарных представлений. Неприводимые представления, как правило, бесконечномерны. Не существует аналога равенства (70). Оно, однако, имеет место, если ограничиться унитарными представлениями и заменить в правой части равенства прямую сумму прямым интегралом представлений

$$U = \int U^\lambda d\lambda. \quad (73)$$

Последнее понятие обобщает прямую сумму представлений в том же смысле, в каком интеграл обобщает обыкновенную сумму.

¹ Это утверждение справедливо для унитарных представлений любых локально компактных коммутативных групп.

2

Гармонический анализ на коммутативных локально компактных группах

В классическом гармоническом анализе рассматривалась группа R всех вещественных чисел. В этом случае характеристиками являются функции $\chi^\lambda(x) = U^\lambda(x) = e^{i\lambda x}$ ($-\infty < \lambda, x < \infty$). Имеют место аналоги равенств (71), (72)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad (74)$$

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |c(\lambda)|^2 d\lambda. \quad (75)$$

Первое из них является интегралом Фурье, а второе называется формулой Планшереля. В соответствии со сказанным в конце предыдущего раздела суммы оказались замененными интегралами.

Созданная И. М. Гельфандом в конце 30-х годов теория коммутативных банаховых алгебр² по-новому осветила классический гармонический анализ и дала аппарат для построения гармонического анализа на произвольных коммутативных локально компактных группах. И. М. Гельфанд и Д. А. Райков выяснили связь между характеристиками коммутативной локально компактной группы и максимальными идеалами ее групповой алгебры, а также построили интеграл Фурье на группе. Затем Д. А. Райков получил интегральное представление положительно определенных функций (см. § 3) на коммутативной группе, а М. Г. Крейн (1941 г.) перенес на такие группы теорему Планшереля³.

Важную роль сыграло открытие Л. С. Понтрягиным (1934 г.) принципа двойственности для коммутативных локально компактных групп. Пусть $\hat{G}$ — множество характеров коммутативной локально компактной группы G . Если $\chi^v(g)$ и $\chi^{v'}(g)$ — характеры, то их произведение $\chi^v(g)\chi^{v'}(g)$ также является характером. Полагая по определению $\chi^v(g)\chi^{v'}(g) = \chi^{vv'}(g)$, вводим в множество характеров такую операцию, что множество G относительно этой операции оказывается коммутативной группой. Более того, в $\hat{G}$ естественным образом можно ввести топологию, после чего она оказывается локально компактной коммутативной группой. Она называется группой характеров группы G . Л. С. Понтрягин в результате исследования структуры коммутативных групп получил принцип двойственности: группой характеров группы $\hat{G}$ является исходная группа G . Впоследствии Д. А. Райков (1941 г.) дал новое, чисто функциональное, доказательство принципа двойственности.

² Коммутативные нормированные кольца.

³ Независимо эти результаты были получены также А. Вейлем.

Приведенные выше результаты по существу завершили построение гармонического анализа на коммутативных группах. Их изложение можно найти в монографиях М. А. Наймарка «Нормированные кольца» (1956 г.) и И. М. Гельфанда, Д. А. Райкова, Г. Е. Шилова «Коммутативные нормированные кольца» (1960 г.).

3

Общая теория представлений локально компактных групп

Начало общей теории унитарных представлений локально компактных групп положила работа И. М. Гельфанда и Д. А. Райкова (1943 г.), в которой была установлена связь между положительно определенными функциями на локально компактной группе и унитарными представлениями этой группы. Функция $\varphi(g)$ на группе G называется положительно определенной, если для любого набора элементов $g_i \in G$ и комплексных чисел c_i имеет место неравенство

$$\sum \varphi(g_i g_j^{-1}) c_i \bar{c}_j \geq 0.$$

Положительно определенная функция $\varphi(g)$ называется элементарной, если разложение вида $\varphi(g) = \psi_1(g) + \psi_2(g)$, где ψ_1 и ψ_2 положительно определены, возможно лишь при условии, что $\psi_1 = \lambda_1 \varphi$, $\psi_2 = \lambda_2 \varphi$. С каждым унитарным представлением $U(g)$ и вектором $\xi \in H$ можно связать положительно определенную функцию

$$\varphi(g) = (U(g)\xi, \xi). \quad (76)$$

Гельфанд и Райков показали, как по заданной положительно определенной функции $\varphi(g)$ построить связанное с ней равенством (76) унитарное представление. При этом оказалось, что неприводимые представления и только они связаны с элементарными положительно определенными функциями. Далее они показали, что для любого элемента $g_0 \neq e$ группы существует такое неприводимое унитарное представление $U(g)$ (возможно бесконечномерное), что $U(g_0) \neq I$, т. е. имеет место полнота системы неприводимых унитарных представлений.

Развивая далее те же методы, И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк (1948 г.) построили теорию представлений $*$ - банаховских алгебр⁴ и установили взаимно однозначное соответствие между неприводимыми унитарными представлениями группы и неприводимыми представлениями ее групповой алгебры (рассматриваемой как $*$ - банаховская алгебра). В дальнейшем теория унитарных представлений групп развивалась в неразрывной связи с теорией представлений $*$ - банаховских алгебр. Особо важную роль при этом играют $*$ -алгебры операторов в гильбертовом пространстве, замкнутые в слабой топологии операторов или по норме операторов. Они называются соответственно W $*$ -алгебрами (ал-

⁴ Нормированные кольца с инволюцией.

гебры Неймана) и C^* -алгебрами. C^* -алгебры были введены И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком. Им принадлежат фундаментальные результаты в этой области. Важные для теории представлений гильбертовы алгебры были впервые (в коммутативном случае) введены В. А. Рохлиным (1948 г.) в связи с теорией динамических систем.

В теории конечномерных представлений важную роль играет лемма Шура.

М. А. Наймарку (1954 г.) принадлежит аналог леммы Шура для случая бесконечномерных представлений.

Центральной задачей теории представлений является задача о разложении унитарного представления группы или соответственно $*$ -представления $*$ -алгебры на неприводимые. Первый результат в этом направлении получил А. Н. Колмогоров (1944 г.) для счетных групп, затем Г. М.

Адельсон-Вельский получил разложение для представлений $*$ -алгебр. Независимо задача о разложении представлений алгебр была разрешена Нейманом и затем распространена Маутнером на унитарные представления групп. Дальнейшие результаты в этом направлении в Советском Союзе получены М. А. Наймарком и С. В. Фоминым.

Основным результатом всего этого цикла работ явилось доказательство существования разложения (73) унитарного представления U локально компактной группы на неприводимые. В общем случае такое разложение существенно неоднозначно. Вместо него часто целесообразнее рассматривать аналогичное центральное разложение, введенное Нейманом. В этом разложении U^λ , вообще говоря, не неприводимы, но являются фактор-представлениями. Это означает, что центр слабого замыкания линейной оболочки операторов $U^\lambda(g)$ состоит только из операторов, кратных единице. Каждое фактор-представление может быть далее разложено на неприводимые. Если такое разложение однозначно, фактор-представление относят к типу I. В противном случае (тип II₁, II_∞ и III) изучение фактор-представлений очень затруднено. Интересные результаты получены М. А. Наймарком, установившим достаточные условия того, что прямой интеграл фактор-представлений является фактор-представлением.

В наиболее важных случаях элементы g группы можно описать набором (конечным) вещественных координат g^i . В этом случае группа называется группой Ли. На дифференцируемых функциях $f(g) = f(g_1, \dots, g_n)$ на группе Ли можно определить n операторов $X_j : X_j f = \left(\frac{\partial f(g\gamma)}{\partial \gamma^j} \right)_{\gamma=e}$. Они называются инфинитезимальными операторами группы. Изучение группы Ли и ее представлений во многом связано с



Д. А. Райков.

изучением инфинитезимальных операторов и в особенности с изучением обертывающей алгебры — алгебры, образованной полиномами от X_j . В недавних работах И. М. Гельфанда и А. А. Кириллова (1965 г.) предложен новый многообещающий подход к изучению обертывающих алгебр групп Ли.

Новый вид алгебр, тесно связанный с обертывающими, был рассмотрен П. К. Рашевским.

4

Представления классических групп

Исключительную роль играет созданная И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком, а также их учениками глубокая и содержательная теория представлений классических групп. Вместе с работами Неймана по кольцам операторов она открывает новый этап в теории представлений. Началом послужил цикл работ И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка (1941 г.), в которых изучались представления групп всех матриц второго порядка с комплексными элементами и определителем, равным единице. Обозначим через $SL(n, K)$ группу всех матриц порядка n с элементами из данного поля K и определителем, равным единице. Таким образом, речь идет о группе $SL(2, C)$ (C — поле комплексных чисел). Это простейшая локально компактная группа, относящаяся к хорошо изученному классу комплексных полупростых групп. Она локально изоморфна группе преобразований Лоренца, и потому теория представлений группы по существу является теорией представлений группы Лоренца⁵. Были получены конструкции неприводимых представлений (унитарных и неунитарных). Для этих представлений удалось определить характеры. Были построены интеграл Фурье и формула Планшереля, являющиеся аналогом (71), (72). Оказалось, что в отличие от компактного и коммутативного случая неприводимые унитарные представления, входящие в разложение регулярного представления, не исчерпывают всех неприводимых унитарных представлений группы. Все эти результаты были затем распространены Гельфандом и Наймарком на комплексные классические группы, включающие, в частности, все группы $SL(n, C)$ ⁶.

Оставался открытым вопрос — исчерпывают ли полученные конструкции все неприводимые представления. Положительный ответ был получен Наймарком. Березину удалось, не обращаясь к конструкции неприводимых представлений, найти явные формулы для характеров. Дальнейшее уточнение в описании неприводимых представлений комплексных полупростых групп недавно получено Д. П. Желобенко и М. А. Наймарком.

⁵ Независимо и одновременно Баргманом были рассмотрены представления группы $SL(2, R)$ (R — поле вещественных чисел).

⁶ Общая теория унитарных представлений комплексных полупростых групп была затем построена Хариш-Чандра.

Последнее время в теории представлений широко применялись методы обобщенных функций. Изучалось преобразование Фурье быстроубывающих (в том или ином смысле) функций на группе. Желобенко получил для группы $SL(2, \mathbb{C})$ аналог классической теоремы Пэли — Винера, характеризующей преобразование Фурье финитных функций. Независимо близкий результат был получен И. М. Гельфандом и распространен затем им и М. И. Граевым на обширный класс групп. Недавно Желобенко также перенес свои результаты на произвольные комплексные полупростые группы.



М. И. Граев.

Важную роль в изучении гармонического анализа на однородных пространствах, связанных с классическими группами, играет метод орисфер, предложенный Гельфандом и Граевым. На однородном пространстве особым образом выделяется семейство подпространств — орисферы. Орисферы в свою очередь образуют однородное пространство. Задача построения интеграла Фурье разделяется на две: переход от функций на однородном пространстве к функциям на пространстве орисфер и построение интеграла Фурье для последнего пространства. Первая из этих задач является частным случаем задач, охарактеризованных Гельфандом как задачи интегральной геометрии.

Если некоторое подпространство функций на однородном пространстве G/Γ инвариантно и неприводимо относительно операторов сдвига R_γ ($\gamma \in G$), то функции, принадлежащие подпространству, называются сферическими. Классической моделью служат обычные сферические функции. В этом случае G — группа вращений в трехмерном пространстве и G/Γ — сфера.

Для случая компактной группы теория сферических функций была построена Картаном. В некомпактном случае для конкретных групп сферические функции рассматривались Гельфандом и Наймарком. Дальнейшее развитие теории сферических функций принадлежит И. М. Гельфанду, М. Г. Крейну. Ряд результатов, связанных с гармоническим анализом на однородных пространствах и сферическими функциями, получен Ф. А. Березиным, Г. С. Бхану-Мурти, Н. Я. Вилениным, С. Г. Гиндикиным, Ф. И. Карпелевичем, В. Ф. Молчановым.

Общая теория представлений полупростых групп сложнее, чем комплексных полупростых, и значительно хуже развита.

В ряде работ И. М. Гельфанда и М. И. Граева рассмотрены представления групп $SL(n, \mathbb{R})$ и выяснены характерные особенности теории представлений вещественных, т. е. некомплексных, полупростых групп. Граевым были также рассмотрены представления некоторых других вещественных полупростых групп. Представления вещественных

полупростых групп изучались также А. А. Кирилловым, И. Я. Вахутинским, Б. Д. Роммом, А. И. Штерном. Последний показал, что известные неприводимые представления группы $SL(2, R)$ исчерпывают все возможные.

Обозначим через H_1 пространство функций $f(x)$ на однородном пространстве G/Γ_1 и через H_2 аналогичное пространство функций $\varphi(y)$ на однородном пространстве G/Γ_2 . Операторы сдвига R_γ определяют в этих пространствах представления

$$R_i (i = 1, 2): f(x) \rightarrow f(x\gamma) \quad \text{и} \quad \varphi(y) \rightarrow \varphi(y\gamma).$$

Операторы сдвига естественным образом определяют в пространстве функций двух переменных $F(x, y)$ ($x \in G/\Gamma_1$, $y \in G/\Gamma_2$) представление $F(x, y) \rightarrow F(x\gamma, y\gamma)$, называемое тензорным произведением представлений R_1 и R_2 . Аналогичным образом можно определить тензорное произведение любых представлений. Как правило, произведение неприводимых представлений не неприводимо. Задача о разложении такого произведения на неприводимые слагаемые является одной из типичных задач теории представлений. Она была полностью решена М. А. Наймарком (1959 г.) для неприводимых унитарных представлений группы $SL(2, C)$. Для группы $SL(2, R)$ существует частный результат Б. Д. Ромма.

Применяя методы, подсказанные теорией бесконечномерных представлений, Д. П. Желобенко получил новое построение теории конечномерных неприводимых представлений полупростых групп Ли. Рассмотрим представление $U(g)$ группы G в конечномерном пространстве H . Через P обозначим пространство многочленов от координат вектора из H . В P естественным образом определено представление $V(g)$ группы G . Элемент $p \in P$ называется инвариантом, если $V(g)p = p$ для всех $g \in G$. Теория инвариантов имеет важные применения, особенно в геометрии. Простейший хорошо известный пример: классификация кривых второго порядка с помощью инвариантов. Новые результаты в теории инвариантов получены Дж. Хаджиевым.

Изучение приводимых неунитарных представлений в настоящее время очень затруднено в связи с существованием приводимых представлений, не распадающихся в прямую сумму неприводимых. Некоторые типы таких представлений группы $SL(2, C)$ рассмотрел Д. П. Желобенко.

Пространство с неположительным (индефинитным) скалярным произведением, содержащим k отрицательных квадратов, обозначается через Π_k . В большом цикле работ М. А. Наймарк (1963 г.) построил теорию коммутативных $*$ -алгебр операторов в пространствах Π_k и на ее основе изучил унитарные в смысле Π_k представления локально компактных групп, и в частности представления группы $SL(2, C)$. Ряд результатов в этом направлении получен также Р. С. Исмагиловым.

Подробное изложение теории представлений полупростых групп применительно к группам $SL(2, C)$ и $SL(2, R)$ можно найти в монографии И. М. Гельфанда, М. И. Граева, Н. Я. Виленина «Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений» (1962 г.).

5

Специальные функции и теория представлений

Связь специальных функций с теорией представлений групп была впервые обнаружена в двадцатых годах Э. Картаном. На нее многократно указывал И. М. Гельфанд в связи с теорией бесконечномерных представлений.

В большом цикле работ Н. Я. Виленкин показал, что многие специальные функции естественным образом возникают при рассмотрении матричных элементов неприводимых представлений классических групп. Это позволяет теоретико-групповым путем изучить такие функции. С другой стороны, естественным образом возникают новые классы функций, аналогичных классическим специальным функциям. Подробное изложение этого круга вопросов содержится в монографии Н. Я. Виленикина «Специальные функции и теория представлений» (1965 г.). Различные специальные функции, связанные с представлениями, рассматривались также Э. Л. Акимом, И. М. Гельфандом и М. И. Граевым, В. Я. Голодцом, А. З. Долгиновым, Е. Н. Ламбиной, А. А. Левиным, Л. Д. Эскиным.

Рассмотрим выпуклый конус в аффинном пространстве, инвариантный относительно транзитивно действующей группы аффинных преобразований. На таком конусе может быть определен аналог степенной и показательной функции. С помощью этих функций подобно тому, как это делается в классическом анализе, можно получить аналоги специальных функций. Анализ на выпуклых конусах и соответствующие специальные функции изучались С. Г. Гиндикиным, И. И. Пятецким-Шапиро.

6

Некоторые другие вопросы

В ряде работ И. М. Гельфанда и М. И. Граева (1963 г.) построена теория представлений группы $SL(2, K)$, где K — локально компактное недискретное поле. Такие группы не являются, вообще говоря, группами Ли. Тем не менее на них удастся во многом перенести технику изучения представлений классических групп. Вычислены неприводимые представления и их характеры. Получена формула Планшереля. Представления групп $SL(2, K)$ приводят к интересным аналогам специальных функций. А. А. Кириллов показал, что группы $SL(2, K)$ принадлежат типу I. Это значит, что все их унитарные фактор-представления относятся к типу I и упомянутая в разделе 3 неоднозначность при разложении на неприводимые представления не возникает (отметим, что все связные полупростые группы тоже принадлежат типу I; этот результат принадлежит Хариш-Чандра). В случае, когда поле K дискретно, группа $SL(n, K)$ не является группой типа I. Кириллов получил описание всех положительно определенных



А. А. Кириллов.

функций на такой группе, являющихся постоянными на классах сопряженных элементов и вместе с этим описание всех унитарных фактор-представлений типа II. Работа в этом направлении была продолжена С. В. Смирновым.

И. М. Гельфанд и М. И. Граев рассмотрели также представления класса групп, связанного с конечными полями.

С большинством упомянутых результатов можно подробнее ознакомиться в монографии «Теория представления и автоморфные функции» (1966 г.). Там же указаны важные связи и приложения к теории чисел.

А. А. Кириллов построил теорию унитарных представлений нильпотентных групп Ли. Она оказалась много проще теории представлений полупростых групп.

В недавнем цикле работ А. А. Кириллову удалось получить единую формулу

для характеров неприводимых представлений, справедливую для широкого класса групп Ли.

В связи с некоторыми задачами, возникшими в теории дифференциальных уравнений, Б. М. Левитан (1940 г.) ввел операторы обобщенного сдвига, являющиеся аналогом операторов группового сдвига (но не связанные с группой) и определил с помощью них операцию светки. В ряде работ он исследовал возникающий при этом аналог гармонического анализа.

Коммутативный случай был рассмотрен методами теории банаховских алгебр Ю. М. Березанским и С. Г. Крейном. Эти исследования были продолжены в ряде работ Ю. М. Березанского.

Б. М. Левитан установил для операторов обобщенного сдвига теоремы типа основных теорем Ли.

М. Г. Крейн получил (1949 г.) для компактных (некоммутативных) групп аналог принципа двойственности Л. С. Понтрягина. Этот результат был перенесен Г. И. Кацом на локально компактные группы с двусторонне инвариантной мерой. В связи с принципом двойственности Кац ввел новые объекты — кольцевые группы, которые могут рассматриваться как естественное обобщение локально компактных групп. Рассмотрены некоторые общие вопросы гармонического анализа и теории представлений кольцевых групп. В. Г. Палюткин доказал в компактном случае для кольцевых групп аналог теоремы о существовании инвариантной меры.

Теория представлений находит многочисленные приложения в математике и теоретической физике. Приложения к теории динамических систем рассмотрены в работе И. М. Гельфанда и С. В. Фомина. Серия работ И. М. Гельфанда и И. И. Пiateцкого-Шапиро посвящена приме-

нениям теории представлений к автоморфным функциям. Теория разложения унитарных представлений была применена А. М. Ягломом к изучению однородных случайных полей. И. М. Гельфанд и А. М. Яглом получили описание релятивистски инвариантных уравнений квантовой теории поля. Систематическому изложению применения теории представлений в теоретической физике посвящена монография Г. Я. Любарского.

В современной квантовой теории поля приходится иметь дело с операторами в гильбертовом пространстве, являющимися в определенном смысле функциями от системы операторов a_i ($i = 1, 2, \dots$) и их сопряженных. Эти операторы называются операторами рождения и уничтожения и удовлетворяют одному из двух вариантов перестановочных соотношений:

$$\begin{aligned} a_i a_j + a_j a_i &= 0, & a_i a_j - a_j a_i &= 0, \\ a_i a_j^* + a_j^* a_i &= \delta_{ij}, & a_i a_j^* - a_j^* a_i &= \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (77)$$

Некоторым сложным математическим вопросам, возникающим в квантовой теории поля, посвящен ряд работ Ф. А. Березина. Трудной и нерешенной задачей является эффективное описание всех представлений коммутационных соотношений (77) операторами в гильбертовом пространстве.

Новые нетривиальные примеры таких представлений построил В. Я. Голодец.

Полуупорядоченные пространства и пространства с конусом

1

Пространства Л. В. Канторовича

Соотношения порядка, понятие положительности элементов и монотонности операторов играют существенную роль во многих разделах классического анализа. В связи с этим в функциональном анализе выделяются и подвергаются специальному изучению так называемые полуупорядоченные пространства. При этом полуупорядоченность означает, что выделено множество «положительных» элементов и что некоторые элементы можно сравнивать по следующему правилу: $x \leq y$, если элемент $y - x$ «положителен». В различных пространствах вещественных функций полуупорядоченность можно ввести, например, если считать положительными функции, принимающие неотрицательные значения. Развернутая аксиоматика полуупорядоченных пространств была дана Л. В. Канторовичем в 1935 г. Его фундаментальные исследования легли в основу последующих многочисленных работ советских и зарубежных математиков.

Л. В. Канторович выделяет такие полуупорядоченные пространства, в которых каждое ограниченное сверху множество M имеет точную верхнюю границу $\sup M$. В таких пространствах естественно вводятся понятия верхнего и нижнего пределов ограниченной последовательности:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{(n)} \sup \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\},$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{(n)} \inf \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}.$$

После этого определяются так называемые $|o|$ - и $|*|$ -сходимости:

$x_n \xrightarrow{(o)} x$, если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, а также $x_n \xrightarrow{*} x$, если каждая частичная последовательность x_{n_k} содержит подпоследовательность $|o|$ -сходящуюся к x . Сходимости в классических функциональных пространствах оказываются, как правило, $|o|$ - или $|*|$ -сходимостями.

Теория пространств Канторовича богата важными результатами: исследование полноты пространства, разложение на дизъюнктные подпространства, изучение базы пространства с единицей, исследование вполне линейных функционалов, изучение характера погружения полуупорядоченного пространства во второе сопряженное, распространение линейных операторов, построение различных представлений полуупорядоченных пространств и др. Эти результаты получены как самим Л. В. Канторовичем, так и его учениками и последователями: Б. З. Вулихом, А. Г. Пинскером, Г. П. Акиловым и др. Выяснено, что многие утверждения конкретного анализа типа теорем о предельном переходе под знаком интеграла являются весьма частными следствиями простых предложений общей теории полуупорядоченных пространств. Это привело к интересным и неожиданным доказательствам многих трудных теорем.



А. Г. Пинскер.

Теория пространств Канторовича позволила развить абстрактную теорию метода мажорант; была построена абстрактная теория известного метода Чаплыгина приближенного решения дифференциальных уравнений (А. Н. Балувев (1952 г.), С. Н. Слугин (1955 г.)).

Были предложены новые доказательства важных теорем спектральной теории самосопряженных операторов, основанные на теории полуупорядоченных пространств. Первый результат такого типа в советской литературе элементарными средствами был получен В. И. Соболевым (1952 г.); В. Д. Любовиным (1956 г.) аналогичным методом получена теорема о спектральном разложении неограничен-

ного оператора. Б. З. Вулих получил (1956 г.) новое доказательство теоремы Неймана о функциях от самосопряженных операторов.

Интересное приложение теории полуупорядоченных пространств указал А. И. Фет (1956 г.). Он выяснил, что задача Коши — Ковалевской становится корректной (из сходимости начальных функций вытекает сходимость решений), если ее рассматривать в полуупорядоченном пространстве аналитических функций. Этот важный результат позволил показать, что решение задачи может быть получено при помощи сходящегося по $|o|$ -сходимости метода последовательных приближений.

2

Конусы М. Г. Крейна

Геометрический аспект теории полуупорядоченных пространств был развит М. Г. Крейном (1937 г.) в связи с некоторыми задачами проблемы моментов, теории интегральных операторов с положительными ядрами и матриц с положительными элементами. Конусом называется такое замкнутое выпуклое множество банахова пространства, которое вместе с каждым элементом x содержит весь луч λx ($0 \leq \lambda < \infty$) и которое не содержит полностью ни одну прямую. Конус K порождает полуупорядоченность: $x \leq y$, если $y - x \in K$. Знак $\leq$ обладает свойствами обычного знака $\leq$ (неравенства можно складывать, умножать на положительные числа, в неравенствах можно переходить к пределу и т. д.). М. Г. Крейн, его ученики и последователи (Д. П. Мильман, М. А. Рутман, Ю. И. Гросберг, В. Л. Шмульян и др. (1937—1940 гг.)) установили ряд интересных и важных для приложений фактов, связанных с геометрическими свойствами конусов. Формулировка соответствующих теорем требует специальных определений. Мы ограничимся лишь одной.

Конус K называется нормальным, если существует такое $\delta > 0$, что при любых $x, y \in K$, $\|x\| = \|y\| = 1$ выполнено неравенство $\|x + y\| \geq \delta$. Соответствующая теорема утверждает, что произвольный линейный непрерывный функционал на пространстве E можно представить в виде разности двух неотрицательных на конусе K функционалов в том и только в том случае, когда K нормален. Если K нормален, то пространство E можно при помощи линейного взаимно однозначного и непрерывного отображения отобразить в некоторое подпространство пространства всех непрерывных функций, определенных на некотором бикompакте Q . При этом отображении элементы из K , и только они, переходят в неотрицательные функции. Если E сепарабельно, то в качестве Q можно взять отрезок $[0, 1]$.

Ряд важных теорем, относящихся к геометрии конусов, установлен в последние годы воронежскими математиками (М. А. Красносельский (1960 г.), И. А. Бахтин, В. Я. Стеценко (1961 г.) и др.). Получены новые признаки нормальности конуса, изучены пространства с двумя выделенными конусами, введены в рассмотрение и исследованы правильные и вполне правильные конусы и т. д.

Линейные положительные операторы

Линейный оператор A , действующий в пространстве с выделенным конусом K , называется положительным, если он оставляет этот конус инвариантным: $AK \subset K$. В случае конечномерного пространства с конусом векторов с неотрицательными координатами класс положительных линейных операторов совпадает с классом операторов, порожденных матрицами из неотрицательных элементов. Интегральный оператор

$$Ax(t) = \int_a^b K(t, s) x(s) ds, \quad (78)$$

действующий в пространстве C непрерывных на $[ab]$ функций с выделенным конусом неотрицательных функций, положителен, если ядро $K(t, s)$ неотрицательно.

Для матриц с положительными элементами хорошо известна теорема Фробениуса — Перрона; в силу этой теоремы у такой матрицы есть единственное собственное значение, которому соответствует собственный вектор с положительными координатами. Это собственное значение λ_0 простое, абсолютные величины остальных собственных значений меньше λ_0 . Теорема Фробениуса — Перрона была перенесена на интегральные операторы с положительными непрерывными ядрами Ентчем. Результат Ентча послужил отправным пунктом для серии работ по теории линейных положительных операторов. В этих работах были выделены различные классы положительных операторов, имеющих, по крайней мере, один собственный вектор в конусе, классы операторов, у которых такой собственный вектор единственен, исследована кратность соответствующего собственного числа, проведено сравнение с другими собственными значениями. Первые результаты здесь были получены (для вполне непрерывных операторов) М. А. Рутманом (1938 г.), который использовал одну идею П. С. Александрова и Э. Хопфа. Далее важные теоремы доказал М. Г. Крейн (1939—1940 гг.). Затем новые классы операторов изучались в работах М. А. Красносельского, Л. А. Ладыженского, И. А. Бахтина, В. Я. Стеценко, А. Р. Есаяна, С. Н. Мухтарова и др. (1954—1966 гг.).

Важное направление в теории линейных положительных операторов связано с развитием идей, содержащихся в замечательных работах Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова (1936 г.) по теории инвариантных мер в динамических системах. Теорема Боголюбова — Крылова о существовании инвариантных мер была обобщена А. А. Марковым (1937 г.), который установил критерий существования интегрального инварианта для коммутативной совокупности отображений абстрактного множества с заданной на нем мерой в себя. Затем М. Г. Крейн нашел (1939 г.) общую теорему, содержащую результат А. А. Маркова.

Конус K называется телесным, если он содержит внутренние элементы. Множество неотрицательных на K линейных функционалов обо-

значим через K^* . Пусть Γ — коммутативная совокупность линейных непрерывных операторов, преобразующих внутренность телесного конуса K в себя. М. Г. Крейн показал, что тогда у всех сопряженных операторов A^* ($A \in \Gamma$) есть общий собственный вектор $\psi \in K^* : A^*\psi = \lambda_A \psi$ ($A \in \Gamma$); если, кроме того, все операторы A имеют внутри K общий неподвижный вектор, то все числа $\lambda_A = 1$. И. А. Бахтиным эта теорема распространена на некоторые классы операторов, оставляющих инвариантными нетелесный конус.

Теорема М. Г. Крейна и ее обобщения нашли применения при доказательстве существования мультипликативных мер для различных классов гиперкомплексных систем (Ю. М. Березанский и С. Г. Крейн (1950 г.), И. А. Бахтин). Теория линейных положительных операторов была применена в работах М. Г. Крейна (1948 г.) при исследовании и классификации лоренцовых и полулоренцовых преобразований гильбертова пространства.

4

Нелинейные положительные операторы

Нелинейный оператор называется положительным, если он оставляет инвариантным конус. Первая работа по теории нелинейных операторов была выполнена в классических терминах — без применения понятий абстрактных полуупорядоченных пространств. Имеется в виду известная работа П. С. Урысона, в которой изучались положительные решения уравнения

$$x(t) = \mu \int_a^b K[t, s, x(s)] ds. \quad (79)$$

Основные предположения Урысона заключались в том, что $K(t, s, 0) \equiv 0$ и что производная $K_u(t, s, u)$ непрерывна, положительна и монотонно убывает с возрастанием u ($u \geq 0$). В этих предположениях уравнение (79) имеет положительные решения при значениях μ из некоторого промежутка (μ_P, μ_Q) и только при этих значениях μ . Числа μ_P и μ_Q оказываются наибольшими характеристическими значениями некоторых выписываемых в явном виде линейных интегральных операторов. Каждому $\mu \in (\mu_P, \mu_Q)$ соответствует единственное положительное решение $x(t, \mu)$ уравнения (79). Если $\mu_1 < \mu_2$, то $x(t, \mu_1) < x(t, \mu_2)$.

Результаты Урысона без труда можно истолковать в терминах, относящихся к абстрактным операторам в полуупорядоченных пространствах. Эти результаты можно трактовать как теоремы о существовании собственных векторов x у положительного оператора $A : Ax = \lambda x$, о количестве таких собственных векторов и о характере их зависимости от собственного значения λ .

Первые абстрактные теоремы о существовании собственных векторов у положительных вполне непрерывных нелинейных операторов установил М. А. Рутман (1938 г.). Далее существенно более общие

результаты были указаны М. А. Красносельским, Л. А. Ладыженским (1954—1955 гг.), И. А. Бахтиным (1957—1958 гг.), В. Я. Стеценко (1960—1966 гг.) и др. Ограничимся формулировкой одной общей теоремы.

Пусть S — пересечение с конусом K границы ограниченной области, содержащей нуль пространства. Пусть положительный вполне непрерывный оператор A удовлетворяет условию

$$\|Ax\| \geq \alpha > 0 \quad (x \in S). \quad (80)$$

Тогда A имеет на S , по крайней мере, один собственный вектор.

Оператор A называется монотонным, если из $x \leq y$ вытекает неравенство $Ax \leq Ay$. Пусть оператор B вполне непрерывен и на каждой ограниченной части конуса имеет монотонную миноранту A (оператор A монотонен и $Ax \leq Bx$ для любого $x \in K$), удовлетворяющую условию (80). Тогда собственные векторы оператора B образуют в конусе K непрерывную ветвь бесконечной длины, т. е. собственные векторы есть на пересечении K с границей любой ограниченной области, содержащей нуль пространства. Тот факт, что собственные векторы образуют непрерывную ветвь, позволяет исследовать структуру множества собственных значений и в общих условиях показать, что собственные значения заполняют целый промежуток.

Наличие полуупорядоченности позволяет естественным образом определить понятия вогнутости и выпуклости оператора. Как оказалось, уравнения с вогнутыми операторами обладают существенно лучшими свойствами, чем уравнения с выпуклыми операторами. Например, для уравнений с вогнутыми операторами при естественных предположениях легко устанавливается единственность собственного вектора, отвечающего заданному собственному значению. Для выпуклых же операторов единственность является исключительным явлением. Теория вогнутых операторов богата и другими интересными фактами.

Общая теория уравнений с положительными монотонными (вогнутыми и выпуклыми) операторами была применена к изучению различных конкретных задач многими учеными (М. А. Красносельский, Л. А. Ладыженский, И. Я. Бакельман, Г. Я. Любарский, И. А. Бахтин, Ю. П. Красовский, А. И. Гусейнов, Я. Д. Мамедов, П. Е. Соболевский, Ю. С. Колесов, Ю. Г. Борисович, В. А. Марченко и др. (1954—1967 гг.)). Уже в применении к уравнению (79) эти исследования привели к более общим утверждениям, чем результаты П. С. Урысона. Грубо говоря, оказалось, что теоремы Урысона полностью сохраняют силу, если функции $K(t, s, u)$ возрастают, а функции $\frac{1}{u} K(t, s, u)$ убывают при возрастании u . При помощи этой теории были получены новые признаки единственности переходных решений у дифференциальных уравнений высших порядков, исследованы формы потери устойчивости сжатых стержней переменной жесткости, доказаны новые нелокальные теоремы о существовании волн на поверхности тяжелой жидкости, изучены некоторые классы уравнений с операторами Монжа — Ампера и т. д. Особо отметим, что общая теория привела к существенно новым теоремам о периодических решениях как систем обыкновенных дифференциальных

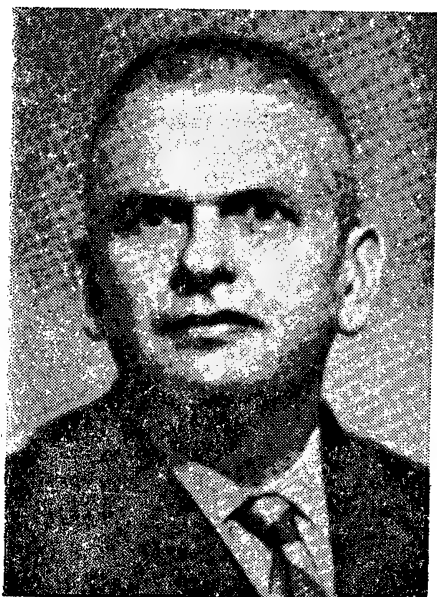
уравнений, так и уравнений, описывающих колебания систем с бесконечным числом степеней свободы. Здесь был установлен общий принцип: если оператор сдвига по траекториям дифференциального уравнения вогнут, то периодическое решение устойчиво по Ляпунову, если выпуклый, то неустойчиво. Этот принцип нашел применения в теории периодических решений смешанной краевой задачи для квазилинейных параболических уравнений.

5

Дополнительные замечания

Проведенная советскими математиками работа по построению теории пространств Канторовича (K -пространств) в значительной части подытожена в большой монографии Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера «Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах» (1950 г.). Некоторым аспектам этой теории посвящена монография Б. З. Вулиха «Введение в теорию полуупорядоченных пространств» (1963 г.). Основные факты теории М. Г. Крейна изложены в весьма содержательной статье М. Г. Крейна и М. А. Рутмана «Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха» (1948 г.). Теория уравнения с нелинейными операторами, оставляющими инвариантным конус, и теория некоторых новых классов линейных положительных операторов изложены в монографии М. А. Красносельского «Положительные решения операторных уравнений» (1962 г.). Применения методов теории полуупорядоченных пространств к теории периодических решений дифференциальных уравнений изложены в монографии М. А. Красносельского «Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений» (1966 г.). Основные факты теории полуупорядоченных пространств и действующих в них операторов читатель может найти в справочнике «Функциональный анализ» (1964 г.). Новое и весьма интересное направление в теории полуупорядоченных пространств развивают В. Г. Болтянский, Т. А. Сарымсаков и М. Я. Антоновский. Их результаты частью изложены в серии монографий, опубликованных в Ташкенте в 1960—1966 гг.

В настоящее время теория полуупорядоченных пространств развивается как в направлении решения внутренних задач этой теории, так и в направлении применений ее к самым различным задачам. Активно работает в Ленинграде под руководством Б. З. Вулиха большая группа молодых математиков (Г. Я. Лозановский, А. И. Векслер и др.). В Москве В. Г. Болтянский и в Ташкенте Т. А. Сарымсаков, а также М. Я. Антоновский с группой молодежи развивают теорию новых классов полуупорядоченных пространств. В Воронеже В. И. Соболев исследует полуупорядоченные кольца. Здесь же большая группа математиков (М. А. Красносельский, И. А. Бахтин, Ю. Г. Борисович, В. Я. Стеценко, П. П. Забрейко, Е. А. Лифшиц, Ю. С. Колесов и др.) изучают нелинейные задачи теории полуупорядоченных пространств.



В. З. Вулих.

В Одессе М. А. Рутман и З. И. Рехлицкий используют методы теории конусов при исследовании устойчивости решений некоторых уравнений с частными производными, уравнений с запаздывающими аргументами и др. В Душанбе А. Р. Есаян, С. Н. Мухтаров и другие применяют методы теории конусов для получения оценок спектральных радиусов операторов и для решения других задач. В Ижевске Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк и большая группа их сотрудников применяют методы полуупорядоченных пространств к исследованию так называемой задачи Чаплыгина, к исследованию краевых задач и др. Естественно, что названные ученые — это лишь небольшая часть исследователей. Однако видно, что теория полуупорядоченных пространств привлекает большой интерес и находит широкое применение.

Полуупорядоченные пространства являются одним из важных разделов современного функционального анализа.

Уравнения с нелинейными операторами

1

Начало развития нелинейного функционального анализа

Основные понятия и задачи нелинейного функционального анализа возникли в рамках классической теории нелинейных интегральных уравнений и вариационного исчисления. Существенную роль в разработке этих вопросов сыграли советские математики.

В теории нелинейных интегральных уравнений наибольшие трудности возникают при исследовании ветвления решений при изменении параметров. Общие методы исследования ветвления в начале века развил А. М. Ляпунов в своих знаменитых работах по устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости. Работы Ляпунова вместе с известными мемуарами Э. Шмидта легли в основу теории ветвления решений операторных уравнений. К работам А. М. Ляпунова примыкают исследования нелинейных интегральных уравнений, проведенные в двадцатые годы А. И. Некрасовым, в связи с теорией установившихся волн на поверхности тяжелой жидкости. В исследованиях Некрасова разрабатывается метод неопределенных коэффициентов для построения решений

интегральных уравнений в виде рядов по целым или дробным степеням приращения параметра. В середине тридцатых годов метод Некрасова был подвергнут дальнейшему развитию в цикле работ ташкентского математика Н. Н. Назарова.

В первые годы советской власти были выполнены работы П. С. Урысона по нелинейным интегральным уравнениям, о которых говорилось в предыдущем параграфе. В конце двадцатых годов начаты глубокие исследования Л. А. Люстерника по топологическим методам в вариационных задачах. Эти исследования и дальнейшие работы Л. А. Люстерника (1937—1939 гг.) и его учеников (В. И. Соболева (1941 г.), Э. С. Цитладзе (1946 г.) и др.) нашли широкие применения при исследовании уравнений с так называемыми потенциальными операторами. Они и до сих пор оказывают влияние на многие разделы нелинейного анализа.

Существенный цикл работ был выполнен в середине тридцатых годов в связи с методом неподвижной точки. В эти годы А. Н. Тихонов доказал свой принцип неподвижной точки для слабо непрерывных отображений, ставший в настоящее время классическим. В это же время В. В. Немыцкий публикует серию статей, в которых принципы неподвижной точки применяются для доказательства теорем существования и единственности решений у разных классов интегральных уравнений. В дальнейшем схема В. В. Немыцкого применяется многими авторами.

После Великой Отечественной войны проблемы нелинейного анализа привлекают внимание исследователей во многих городах Советского Союза: Москве, Воронеже, Ленинграде, Ташкенте, Киеве, Баку, Ростове-на-Дону, Иркутске, Новосибирске, Душанбе и др. Это связано, в первую очередь, с тем, что все большее число конкретных задач нелинейной механики и физики, теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, теории численных методов и т. д. получают естественные формулировки в терминах, относящихся к операторным уравнениям в банаховых пространствах. Во-вторых (и это особенно важно), стало совершенно ясно, что во многих случаях методы нелинейного функционального анализа наиболее коротким и удобным путем приводят к решению трудных задач. Наконец, интерес к нелинейному функциональному анализу отражает и то обстоятельство, что в настоящее время во многих задачах естествознания нельзя ограничиться линейными моделями.

Нелинейному анализу, его внутренним задачам и его приложениям посвящены сотни работ. Упомянем лишь небольшое число результатов.



В. И. Соболев.

2

Методы неподвижной точки

Рассмотрим вопрос о существовании решений у интегрального уравнения

$$x(t) = \int_a^b K[t, s, x(s)] ds. \quad (81)$$

Допустим, что нам удалось подобрать такое функциональное пространство E , в котором действует оператор

$$Ax(t) = \int_a^b K[t, s, x(s)] ds. \quad (82)$$

Тогда вопрос о существовании в E решения уравнения (81) равносильен вопросу о существовании неподвижной точки у оператора A . Как оказалось, достаточные условия существования неподвижных точек у нелинейных преобразований могут быть сформулированы в весьма простых общих терминах. Такие условия называют принципами неподвижной точки. Основным методом доказательства существования решений у различных уравнений является в настоящее время проверка выполнения условий одного из принципов неподвижной точки.

Наиболее широкие применения находят хорошо известные принципы — принцип сжатых отображений и принцип Шаудера. В упомянутых выше исследованиях В. В. Немыцкого и работах других ученых именно эти принципы используются при исследовании нелинейных интегральных уравнений. Они широко применяются и при исследовании краевых задач, исследовании интегро-дифференциальных уравнений и др.

Большой цикл новых принципов точки доказан в последние годы М. А. Красносельским, А. И. Перовым, М. А. Рутманом, П. П. Забрейко, М. М. Вайнбергом, Ю. Г. Борисовичем, Р. И. Качуровским (1950—1965 гг.) и др. Приведем наиболее просто формулируемые.

Непрерывный оператор A называется вполне непрерывным, если он преобразует каждое ограниченное множество в компактное. Пусть A вполне непрерывен на шаре $T \{ \|x\| \leq \rho \}$ и пусть

$$\frac{x - Ax}{\|x - Ax\|} \neq \frac{-x - A(-x)}{\|x + A(-x)\|} \quad (\|x\| = \rho). \quad (83)$$

Тогда A имеет на T , по крайней мере, одну неподвижную точку. В частности, в случае гильбертова пространства для существования неподвижной точки достаточно выполнения неравенства

$$(Ax, x) \leq (x, x) \quad (\|x\| = \rho). \quad (84)$$

Рассмотрим далее вполне непрерывный оператор A , оставляющий инвариантным конус K в банаховом пространстве E . Пусть $r_1 \neq$

$\neq r_2$ и $Ax - x \in K (x \in K; \|x\| = r_1) \quad x - Ax \notin K (x \in K; \|x\| = r_2)$.

Тогда A имеет, по крайней мере, одну неподвижную точку.

Приведем теперь формулировку одного принципа неподвижной точки для дифференцируемых операторов A , действующих в гильбертовом пространстве и не обладающих свойством полной непрерывности. Оказывается, что для существования и единственности неподвижной точки достаточно выполнения условия

$$(A'(x)h, h) \geq b(\|x\|)(h, h) \quad (x, h \in H), \quad (85)$$

где $b(u) > 1$ и

$$\int_0^\infty [b(u) - 1] du = \infty. \quad (86)$$

Большинство принципов неподвижной точки имеет топологическую природу. Однако топологические идеи важны не только при доказательстве теорем существования. Пусть изучаемому уравнению поставлен в соответствие некоторый геометрический объект (например, отображение некоторого пространства или векторное поле), причем соответствие таково, что допустимым малым изменениям уравнения соответствуют малые изменения геометрического объекта. Предположим, далее, что нас интересуют такие вопросы (количество решений, связность множества решений, наличие разветвления решений, возможность применять какой-либо приближенный метод и т. д.), ответы на которые не должны меняться при малых изменениях уравнения. Лишь такие вопросы, вообще говоря, нужно считать корректными — ответы на них описывают грубые свойства уравнения. Тогда естественно ожидать, что полный ответ на поставленные вопросы можно получить, если знать полную систему топологических характеристик геометрических объектов, которые ставятся в соответствие изучаемым уравнениям. Если рассматривать уравнение с вполне непрерывными операторами A , то оказалось удобным ставить им в соответствие векторные поля $x - Ax$ на границах некоторых ограниченных областей. Основная топологическая характеристика таких векторных полей — их вращение (которое может быть любым целым числом). Отличие вращения от нуля гарантирует существование решения у рассматриваемого уравнения. (Это теорема Лерэ — Шаудера в других терминах.) Отличие вращения от нуля обеспечивает сходимость галеркиновских приближенных методов решения уравнений. В естественных предположениях ветвление решения связано с изменением вращения поля на границе некоторого шара.

В связи с изложенными утверждениями важную роль играет фактическое вычисление вращения векторных полей $x - Ax$ с вполне непрерывным оператором A . Здесь в настоящее время получен ряд общих теорем для наиболее важных случаев, разработаны алгоритмы вычисления вращения.

Приведем еще одну общую теорему, которую естественно назвать принципом связности. Пусть оператор A удовлетворяет условиям прин-

ципа Шаудера и его можно сколь угодно точно приблизить гладким вполне непрерывным оператором B , таким, что уравнения $x = Bx + b$ при малых b имеют единственное решение. Тогда множество неподвижных точек оператора A связно. Принцип связности находит применения при доказательстве утверждений следующего типа: если смешанная краевая задача для квазилинейного параболического уравнения имеет ряд различных решений, то она имеет континуум различных решений.

Приведенные выше утверждения о вполне непрерывных векторных полях и ряд их приложений указаны М. А. Красносельским, А. И. Перовым, П. П. Забрейко, В. Б. Меламедом, П. Е. Соболевским, Э. Мухамадиевым, В. В. Стрыгиным (1957—1965 гг.) и др.

Топологические методы нашли широкие применения в нелинейных задачах механики. Особо отметим работы И. И. Воровича и его учеников (В. И. Юдович, Ю. П. Красовский, Л. С. Срубщик и др.) по теории пластин и оболочек, в гидродинамике.

3

Исследование свойств конкретных операторов

Применение принципов неподвижной точки и других общих методов нелинейного функционального анализа к исследованию конкретных уравнений требует изучения свойств конкретных операторов: интегральных, интегро-дифференциальных, дифференциальных и т. д. Многие математики (В. В. Немыцкий и М. М. Вайнберг, А. И. Гусейнов и Я. Д. Мамедов, Л. А. Ладыженский и М. А. Красносельский, П. П. Забрейко и Я. Б. Рутицкий (1950—1966 гг.) и др.) получили разнообразные признаки непрерывности, полной непрерывности, дифференцируемости и т. д. конкретных классов операторов. Получены как отдельные частные результаты, так и созданы общие приемы, применимые в весьма широких условиях. Мы не будем приводить формулировки соответствующих теорем и ограничимся лишь несколькими замечаниями.

Подчеркнем, что при исследовании операторов, возникающих в задачах математической физики, определяющую роль играют теоремы вложения С. Л. Соболева и их обобщения. В этих задачах находит широкое применение и теория отрицательных дробных степеней дифференциальных операторов, значительно развитая воронежскими математиками.

Исследования интегральных и других операторов с «сильными» нелинейностями (например, экспоненциальными) потребовали применения нестандартных функциональных пространств (пространства Орлича, Марцинкевича и др.) и развития их теории. Одновременно с этим возникла задача аксиоматического описания пространств функций, в которых, например, интегральные операторы обладают «хорошими»

свойствами. П. П. Забрейко выяснил (1965 г.), что такое описание можно дать в терминах полуупорядоченных пространств.

Чтобы выяснить трудности, возникающие при исследовании дифференциальных свойств нелинейных операторов, рассмотрим в качестве примера оператор (82). Допустим, что этот оператор действует в некотором пространстве L_p . Кроме того, считаем, что функция $K(t, s, u)$ сколь угодно гладкая (даже аналитическая). Естественно предположить, что гладкость функции $K(t, s, u)$ влечет дифференцируемость оператора (82). Однако такое предположение неверно. Операторы типа (82) в общих условиях оказываются дифференцируемыми лишь на плотных множествах. Доказательство дифференцируемости является сложной задачей. Возникают трудности при определении и вычислении производных высших порядков и т. д.

4

Теория ветвлений решений

Рассмотрим уравнения

$$x = A(x; \lambda) \quad (87)$$

с оператором A , зависящим от скалярного параметра λ . Здесь и в дальнейшем в этом пункте ограничимся уравнениями с вполне непрерывными операторами. Можно считать, например, что (87) — это интегральное уравнение

$$x(t) = \int_a^b K[t, s, x(s); \lambda] ds, \quad (88)$$

рассматриваемое в пространстве C непрерывных функций, в котором функция $K(t, s, u, \lambda)$ непрерывна по совокупности переменных и аналитична по переменным u, λ .

Допустим, что нам известно решение x_0 уравнения (87) при фиксированном значении λ_0 параметра λ . Важную роль в приложениях играет вопрос о том, как изменится решение при малом изменении параметра. Здесь могут представиться разные случаи. Может оказаться, что при близких к λ_0 значениях λ уравнение не имеет близких к x_0 решений, а может случиться, что такое решение существует и единственно. Могут быть неединственные, близкие к x_0 решения, или решения существуют лишь при некоторых близких к λ_0 значениях λ и т. п. Общ. метод исследования близких к x_0 решений дали, как было указано выше, А. М. Ляпунов и Э. Шмидт, рассматривавшие интегральные уравнения. Переход к операторным уравнениям более общих видов, осуществленный в дальнейшем, не потребовал преодоления каких-либо трудностей.

Введем обозначения $x = x_0 + h$, $\lambda = \lambda_0 + \mu$. Тогда уравнение (87) можно переписать в виде

$$h = A'_x(x_0, \lambda_0)h + B(h, \mu), \quad (89)$$

где $B(h, \mu)$ содержит слагаемые, обращающиеся в нуль при $\mu = 0$,

и слагаемые, содержащие члены высшего порядка малости, чем $\|h\|$. В случае уравнения (88) оператор $A'_x(x_0, \lambda_0)$ определяется равенством

$$A'_x(x_0, \lambda_0)h(t) = \int_a^b K_u[t, s, x_0(s); \lambda_0]h(s)ds. \quad (90)$$

Так как мы ищем малые решения h уравнения (89) при малых μ , то естественно ожидать, что они в основном определяются линейной частью уравнения. Действительно, если 1 не является собственным значением линейного оператора $A'_x(x_0, \lambda_0)$ (например, оператора (90)), то уравнение (89) имеет при малых μ единственное малое решение; иначе говоря, решение x_0 уравнения (87) (или (88)) при изменении параметра λ остается единственным и непрерывно меняется.

Основные трудности возникают, когда 1 является собственным значением оператора $A'_x(x_0, \lambda_0)$. Кратность k этого собственного значения конечна, так как из полной непрерывности нелинейного оператора вытекает полная непрерывность его производной.

Фундаментальный результат Ляпунова — Шмидта заключается в том, что задача о малых решениях уравнения (89) эквивалентна отысканию малых решений $c_1, \dots, c_k$ некоторой конечной системы скалярных уравнений

$$\varphi_i(c_1, \dots, c_k; \mu) = 0 \quad (i = 1, \dots, k), \quad (91)$$

построение которой требует решения вспомогательного нелинейного уравнения уже с единственным решением. Систему (91) принято называть уравнением разветвления Ляпунова — Шмидта. Анализ уравнения разветвления позволяет дать полный ответ на все вопросы, связанные с близкими к x_0 решениями уравнения (87).

Если оператор $A(x; \lambda)$ аналитичен по обоим переменным, то функции $\varphi_i(c_1, \dots, c_k; \mu)$ аналитичны. Поэтому некоторые (или все) решения системы (91) могут быть представлены в виде рядов по целым или дробным степеням параметра. Соответствующие решения $h(\mu)$ уравнения (89) тогда также представимы рядами вида

$$h(\mu) = \mu^{\frac{1}{s}} h_1 + \mu^{\frac{2}{s}} h_2 + \dots \quad (92)$$

Возникает естественная мысль о непосредственном отыскании решений уравнения (89) в виде рядов (92) методом неопределенных коэффициентов. Этот метод заключается в том, что элементы $h_1, h_2, \dots$ считаются неизвестными, ряд (92) подставляется в уравнение (89), затем приравняются коэффициенты при одинаковых степенях μ ряда (89) и в формальном разложении правой части уравнения (89) по степеням μ , наконец, полученную бесконечную систему уравнений стараются решить и найти $h_1, h_2, \dots$. Допустим, что все описанные построения удалось провести. Тогда ряд (92) называют формальным решением уравнения (89). Ряд (92) может при этом оказаться расходящимся при всех ненулевых μ . Если его ряд сходится в некоторой окрестности нуля, то его сумма является настоящим решением. В связи с этим нужно уметь доказывать схо-

димось получающихся рядов. Обычно для этого применяются мажорантные числовые ряды.

Метод неопределенных коэффициентов и мажорантных рядов развит, как уже упоминалось, А. И. Некрасовым и Н. Н. Назаровым. Этот метод получил дальнейшее развитие в работах ряда советских и зарубежных ученых — он распространен на новые классы уравнений, улучшены оценки радиусов сходимости рядов (92) и т. д.

Ряд интересных результатов по теории ветвления получен К. Т. Ахмедовым, В. В. Покорным, А. Э. Стапаном, П. П. Рыбиным, В. А. Треногиным, И. В. Гельманом, А. М. Тер-Крикоровым (1955—1965 гг.) и др.

Важные результаты о сходимости формальных решений совсем недавно получил В. Б. Меламед. Он показал, что все формальные решения сходятся в некоторой окрестности нуля, если число формальных решений конечно. Если же число формальных решений бесконечно, то среди формальных решений есть расходящиеся. Если решение x_0 уравнения (87) при $\lambda = \lambda_0$ изолировано, то число формальных решений уравнения (89) конечно и, следовательно, все они являются настоящими решениями. Приведем одно важное следствие из построений В. Б. Меламеда: допустим, что после определения элементов $h_1, \dots, h_r$ остальные неопределенные коэффициенты h_i ($i > r$) определяются однозначно — тогда и это формальное решение и другие формальные решения сходятся. Следует подчеркнуть, что в теоремах В. Б. Меламеда нет оценок радиусов сходимости формальных решений. Поэтому методы построения мажорантных рядов полностью сохраняют интерес.

Специальному анализу в последние годы была подвергнута частная задача — теория точек бифуркации. В этой теории решение уравнения (87) предполагается известным не при одном значении параметра, а при всех его значениях. Такая ситуация имеет место во многих прикладных задачах. Имеющаяся дополнительная информация позволяет совсем просто ответить на многие трудные вопросы. Для простоты изложения считаем, что рассматриваются уравнения (87) частного вида $x = \lambda Ax$, которые при всех значениях параметра λ имеют нулевое решение ($AO = 0$). Число λ_0 назовем точкой бифуркации, если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$, при котором уравнение $x = \lambda Ax$ имеет ненулевое решение в шаре $\|x\| < \varepsilon$. В задачах о формах потери устойчивости упругих систем точки бифуркации соответствуют критическим нагрузкам, в теории волн — критическим скоростям потока и т. д. Справедлива, например, следующая теорема: каждое нечетнократное характеристическое значение линеаризованного



Н. Н. Назаров.

оператора является точкой бифуркации (М. А. Красносельский (1951 г.)). Более тонкие и полные результаты требуют дополнительных понятий. Отметим, что ряд интересных результатов по теории точек бифуркации получен В. Б. Меламедом, П. П. Забрейко, И. А. Бахтиным, Ю. Г. Борисовичем, А. И. Поволоцким (1957—1966 гг.) и другими учеными.

Ряд трудных задач теории дифференциальных уравнений сводится к доказательству непрерывной зависимости от параметров решений операторных уравнений для случаев, когда соответствующие операторы зависят непрерывно от параметров лишь в том или ином более слабом смысле. Например, были найдены (И. И. Гихман, М. А. Красносельский и С. Г. Крейн, В. П. Рубаник, П. П. Забрейко и И. Б. Ледовская, В. В. Стрыгин, В. Ш. Бурд (1955—1966 гг.) и др.) новые общие условия применимости известного метода усреднения Н. Н. Боголюбова — Н. М. Крылова, играющего важную роль в нелинейной механике.

5

Дополнительные замечания

В настоящем обзоре мы не рассмотрели многие важные разделы нелинейного функционального анализа. В первую очередь следует обратить внимание читателя на роль советских ученых в развитии вариационного исчисления, являющегося одновременно и одним из истоков функционального анализа и одной из его важнейших составных частей. Вариационное исчисление, в частности, привело к созданию общего дифференциального исчисления в функциональных пространствах. Здесь нужно отметить работы Л. А. Вишневского (1918—1921 гг.) и их интересный обзор Н. М. Крылова, а также монографию М. К. Гавурина «Аналитические методы исследования нелинейных функциональных преобразований» (1950 г.). Большой интерес представляют работы Н. Н. Боголюбова и его учеников по применению уравнений с вариационными производными. В связи с задачами вариационного исчисления Л. А. Люстерником и его учениками развивалась теория локально линейных пространств. Ряд результатов по вариационным методам в теории операторных уравнений получен Л. А. Люстерником, В. И. Соболевым, Э. С. Цитладзе, Ю. Г. Борисовичем, М. М. Вайнбергом, Я. В. Быковым, М. А. Красносельским, А. И. Поволоцким (1940—1960 гг.) и др. Результаты М. М. Вайнберга подытожены в его



Я. Б. Рутцкий.

монографии «Вариационные методы исследования нелинейных операторов» (1956 г.). Исследования М. А. Красносельского и его учеников освещены в его монографии «Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений» (1956 г.). В этой монографии дано систематическое изложение топологических методов исследования общих нелинейных уравнений с вполне непрерывными операторами. Большой цикл работ был связан с теоремой Л. А. Люстерника о существовании бесконечного числа нормированных собственных векторов у градиентов слабо непрерывных четных функционалов (Люстерником эта теорема была доказана при жестких дополнительных предположениях, которые затем некоторыми учеными ослаблялись). Теорема Люстерника имеет топологическую природу и основана на использовании теории категорий Люстерника — Шнирельмана, позволяющей оценивать число критических значений функционалов. Задача об устойчивости критических значений привела М. А. Красносельского к новому топологическому инварианту — роду пространства. Этот инвариант в его естественном обобщении на расслоенные пространства изучался и широко применялся в исследованиях А. С. Шварца.

В настоящее время создаются принципиально новые главы вариационного исчисления, с одной стороны, в связи с принципом максимума Л. С. Понтрягина и, с другой стороны, в связи с математическими проблемами экономики.

Важной главой нелинейного анализа является общая теория приближенных методов, созданная Л. В. Канторовичем. Этой теории, т. е. исследованию различных приближенных методов решения операторных уравнений и ее приложениям, посвящены многие работы. Упомянем здесь лишь большую работу Л. В. Канторовича «Функциональный анализ и прикладная математика» (1948 г.).

Систематический анализ свойств нелинейных интегральных операторов (непрерывность, полная непрерывность, дифференцируемость и т. д.) в различных функциональных пространствах дан в монографиях М. А. Красносельского и Я. Б. Рунца «Выпуклые функции и пространства Орлича» (1958 г.), М. А. Красносельского, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльника и П. Е. Соболевского «Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций» (1966 г.), П. П. Забрейко «Нелинейные интегральные операторы» (1966 г.).

В последние годы интенсивно развивается новое направление в нелинейном функциональном анализе — теория дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Здесь важные результаты по теории устойчивости получены М. Г. Крейном и его учениками. Эти результаты подытожены в его монографии «Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве» (1964 г.).

Многочисленные исследования в этом направлении проведены также группой воронежских математиков: получены различные признаки существования решений, в частности выяснена роль односторонних оценок в теоремах существования; предложены различные признаки единственности и нелокальной продолжимости решений, изучена

структура интегральной воронки; исследована зависимость решений от параметров, построена теория периодических решений и др. К сожалению, эти исследования пока не систематизированы.

Теория дифференциальных уравнений в банаховых пространствах охватывает конечные и бесконечные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, многие классы интегро-дифференциальных уравнений, различные граничные задачи для параболических и гиперболических уравнений. После опубликования работ Н. Н. Красовского в эту теорию включается ряд проблем теории уравнений с отклоняющимися аргументами.

В заключение отметим, что методы нелинейного анализа находят все более широкие применения в теории колебаний, гидромеханике, теоретической физике и т. д.

Эргодическая теория

1

Основные понятия.

Проблема классификации

Под эргодической теорией, или метрической теорией динамических систем, понимается такое изучение движений, в котором основное внимание уделяется «статистическим» свойствам этих движений. Эргодическая теория в ее современном понимании возникла в начале 30-х годов в работах Биркгофа, Неймана, Э. Хопфа, но ряд относящихся сюда идей имелся, по существу, еще в прошлом веке у Пуанкаре, Больцмана и Гиббса. Начиная с 40-х годов эргодическая теория развивалась в значительной мере в работах советских математиков, причем особенно интенсивно на протяжении последнего десятилетия.

Одним из основных источников эргодической теории были вопросы качественной теории дифференциальных уравнений. Предположим, что на некотором n -мерном многообразии X задана система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad (x = (x_1, \dots, x_n); \quad F = (F_1, \dots, F_n)).$$

Если при любых начальных условиях $x = x^0$ эта система имеет единственное решение $x_t = f(x^0, t)$, определенное при всех t , то тем самым на X определена некоторая однопараметрическая группа движений S_t , которая каждое множество $A \subset X$ переводит за время t в множество $A_t = S_t A$. Пусть на X задана некоторая функция $M(x)$, такая, что для каждого измеримого A

$$\int_A M(x) dx = \int_{A_t} M(x) dx.$$

Такая функция M называется интегральным инвариантом. Ясно, что интегральный инвариант определяет на X меру $\mu(A)$, удовлетворяющую условию инвариантности $\mu(A_t) = \mu(A)$ при всех t .

С точки зрения статистического исследования движений, существующей в эргодической теории, естественно обобщить понятие группы преобразований, определяемой системой дифференциальных уравнений и понятие интегрального инварианта и рассматривать следующую более общую схему.

Пусть X — некоторое топологическое (в частности, метрическое) пространство и S_t — однопараметрическая группа его гомеоморфизмов на себя. Совокупность пространства X и группы S_t называется непрерывной динамической системой. Если при этом на X задана некоторая мера μ , определенная на σ -алгебре, порожденной открытыми множествами, и удовлетворяющая условию $\mu(A) = \mu(A_t)$ для всякого измеримого A и всех t , $-\infty < t < \infty$, то μ называется инвариантной мерой данной динамической системы.

Исходя из этих понятий, можно проводить исследования в двух различных, хотя и не изолированных друг от друга направлениях. Можно, сохраняя предположение о том, что X есть топологическое пространство, а S_t — группа его гомеоморфизмов, развивать топологическую теорию динамических систем. В этом плане, помимо чисто топологического изучения траекторий в такой системе, важным является вопрос об изучении совокупности всех возможных инвариантных мер в такой системе. Для динамических систем, у которых фазовое пространство X есть метрический компакт, инвариантные меры исчерпывающе изучили Н. Н. Боголюбов и Н. М. Крылов. Позже эти результаты были обобщены на некомпактный случай.

Другое возможное направление, которое обычно и имеют в виду, когда говорят об эргодической теории, связано с чисто метрической постановкой проблемы.

Пусть X — некоторое пространство с мерой μ , которое будем считать пространством Лебега без точек положительной меры и, следовательно, изоморфным mod 0 единичному отрезку с лебеговской мерой на нем, и пусть S_t — однопараметрическая группа сохраняющих меру и почти всюду взаимно однозначных отображений X на себя. Совокупность пространства X , меры μ и группы S_t назовем метрической динамической системой⁷ или, короче, потоком.

Как с точки зрения чисто теоретической, так и в интересах ряда приложений здесь естественно сделать дальнейшее обобщение и рассматривать пространство с мерой, на котором задана некоторая, не обязательно однопараметрическая и даже может быть некоммутативная группа измеримых, сохраняющих меру преобразований. Таким образом, в самом общем смысле под динамической системой понимается совокупность (X, μ, G) абстрактного пространства X с заданной на нем мерой μ и группа G сохраняющих меру отображений этого пространства на

⁷ Такая система должна еще удовлетворять некоторому условию измеримости по параметру t , но на этом не будем останавливаться.

себя. Хотя имеются некоторые результаты для динамических систем, понимаемых в таком общем смысле (об этих результатах будет сказано ниже), почти все, сделанное в эргодической теории, относится к тем случаям, когда G или однопараметрическая группа (мы назовем этот случай потоком), или циклическая группа, состоящая из всех целых степеней некоторого фиксированного автоморфизма S (т. е. сохраняющего меру отображения на себя) пространства X . Ясно, что в этом последнем случае изучение свойств динамической системы означает, на самом деле, изучение свойств отдельного автоморфизма S . Для краткости будем называть динамическую систему, в которой G — циклическая группа, просто автоморфизмом. Случай потока и случай автоморфизма во многом аналогичны друг другу, поэтому мы, как правило, будем говорить об автоморфизмах, упоминая о потоках лишь тогда, когда переход к ним от автоморфизмов делается не автоматически.

Пусть (X, μ, S) и (Y, ν, T) — два автоморфизма. Они называются метрически изоморфными между собой, если существует такое изоморфное $\text{mod } 0$ отображение W пространства с мерой (X, μ) на (Y, ν) , которое переводит S в T : $T = WSW^{-1}$. Это понятие распространяется, очевидно, и на динамические системы, понимаемые в самом общем смысле.

Вопрос о классификации динамических систем, в частности автоморфизмов, с точностью до их метрического изоморфизма занимает центральное место во всей эргодической теории. Хотя в этом направлении получено много важных результатов, полностью проблема классификации не решена даже для автоморфизмов.

Изучение динамических систем можно свести, в известном смысле, к изучению так называемых эргодических систем: система (X, μ, G) называется эргодической, если X нельзя разбить на два инвариантных (относительно G) множества, каждое из которых имеет положительную меру. Как показал Дж. Нейман, каждый автоморфизм (и поток) может быть представлен как сумма (возможно континуальная) эргодических систем. В дальнейшем речь будет идти, как правило, об эргодических системах.

2

Спектральные методы

Пусть S — автоморфизм пространства X с мерой μ . Рассмотрим пространство $L_2(X, \mu)$ функций на X с интегрируемым по μ квадратом модуля. Автоморфизм S определяет в этом пространстве унитарный оператор

$$Uf(x) = f(Sx).$$

Его спектр называется спектром автоморфизма S . Ясно, что изоморфные автоморфизмы имеют один и тот же спектр. Иначе говоря, если мы назовем автоморфизмы с одним и тем же спектром спектрально изоморфными, то из метрического изоморфизма следует спектральный изо-

морфизм. Вопрос о том, верно ли обратное утверждение, на протяжении многих лет был в центре исследований по эргодической теории. Сейчас известно, что в общем случае ответ на него — отрицательный: существуют неизоморфные эргодические автоморфизмы с одним и тем же спектром⁸.

В рамках спектральной теории динамических систем естественна постановка следующих вопросов:

1) описание классов автоморфизмов, для которых из спектрального изоморфизма следует метрический;

2) описание возможных спектральных типов эргодических автоморфизмов;

3) вычисление спектров тех или иных конкретных автоморфизмов.

Как показал еще в начале 30-х годов Дж. Нейман, спектральный подход позволяет дать исчерпывающее описание всех эргодических автоморфизмов с точечным спектром, т. е. тех, для которых соответствующий унитарный оператор U имеет полную систему собственных функций. Именно, установлено следующее.

1. Для эргодического автоморфизма каждое собственное значение имеет кратность 1, а все собственные функции постоянны почти всюду по модулю.

2. Спектр эргодического автоморфизма с чисто точечным спектром есть счетная подгруппа комплексной окружности $|\lambda| = 1$. Обратно, для каждой такой подгруппы Λ существует эргодический автоморфизм, спектр которого чисто точечный и совпадает с Λ . Именно, такой автоморфизм реализуется как сдвиг на группе характеров группы Λ .

3. Эргодический автоморфизм с чисто точечным спектром определяется своим спектром однозначно, с точностью до метрического изоморфизма.

Унитарный оператор U , порожденный любым автоморфизмом S , обязательно имеет своим собственным значением число 1, ему отвечают собственные функции, принимающие на всем X постоянное значение. Действительно, если $f(x) = \text{const}$, то $Uf(x) = f(Sx) = f(x)$. Если U не имеет никаких других собственных значений, то говорят, что спектр автоморфизма U непрерывен. Возможен для эргодических автоморфизмов и случай смешанного спектра, когда существуют собственные функции, отличные от постоянных, но они не образуют в $L_2(X, \mu)$ полной системы.

Естественно, что за результатами Неймана об автоморфизмах с чисто точечным спектром последовали попытки перенести их на случай непрерывного и смешанного спектров. Однако результаты здесь оказались отрицательными. Сперва для смешанного, а потом для непрерывного спектра было показано существование эргодических автоморфизмов с одним и тем же спектром, но не изоморфных. Этот последний результат был получен в 1957 г. А. Н. Колмогоровым с помощью введенного им нового инварианта — так называемой энтропии динамических систем (см. стр. 768).

⁸ Тот факт, что неэргодический автоморфизм не определяется своим спектром, устанавливается легко.



С. В. Фомин.

Усилия ряда исследователей были направлены на изучение спектральных характеристик автоморфизмов с непрерывным спектром. Многочисленные примеры автоморфизмов с непрерывным спектром были известны еще в 30-х годах, но все они относились к одному и тому же спектральному типу — счетнократному лебеговскому. Первые примеры динамических систем с непрерывным, но не лебеговским спектром были построены в 1949 г. С. В. Фоминым с помощью стационарных гауссовых процессов. Получающийся таким путем класс динамических систем — так называемые гауссовы или нормальные системы — был детально изучен в работах А. М. Вершика (1962 г.), а И. В. Гирсанов (1958 г.), также занимавшийся такими системами, доказал здесь предположение А. Н. Колмогорова о существовании

среди гауссовых систем систем с простым непрерывным спектром. Спектральные свойства гауссовых систем породили ряд гипотез о спектральных свойствах произвольных систем с непрерывным спектром. Одна из гипотез состояла в том, что максимальный спектральный тип эргодического автоморфизма обязательно эквивалентен своей свертке. Это свойство, являющееся естественным обобщением того факта, что дискретный спектр эргодического автоморфизма есть группа, имеет место для гауссовых систем. Я. Г. Синай доказал (1963 г.) его для автоморфизмов, удовлетворяющих некоторому дополнительному предположению, которое казалось не очень существенным. Однако в последнее время появился цикл работ молодых московских математиков А. Б. Катка, В. И. Оселедца и А. М. Степина, в которых были развиты методы, позволившие обнаружить новые неожиданные спектральные свойства у эргодических автоморфизмов, в том числе и построить автоморфизмы, не обладающие указанным выше «групповым» свойством максимального спектрального типа. На этих методах остановимся в следующем параграфе.

3

Аппроксимация динамических систем

Еще в 1944 г. в работе американского математика П. Р. Халмоша было начато изучение «пространства динамических систем», т. е. совокупности D всех автоморфизмов некоторого пространства Лебега, в качестве которого можно, очевидно, принять отрезок $[0, 1]$. Вводя в D метрику и аппроксимируя в D произвольные автоморфизмы элементарными периодическими, Халмош по-

казал, в частности, что автоморфизмы с непрерывным спектром образуют в D множество 2-й категории, т. е. являются в некотором смысле «правилом». Продолжая эти исследования, В. А. Рохлин показал, что автоморфизмы с лебеговским спектром, напротив, образуют в D множество 1-й категории. Тем самым было показано существование автоморфизмов с непрерывным, но не лебеговским спектром (примерно за год до того, как были построены упомянутые выше примеры таких автоморфизмов).

В самое последнее время в исследовании «пространства динамических систем» D новые важные результаты были получены в упомянутых выше работах А. Б. Катка, В. И. Оселедца и А. М. Степина. В основе их результатов лежит понятие скорости аппроксимации данного автоморфизма S периодическими. Вот одно из основных определений.

Пусть $f(t)$ — некоторая стремящаяся к нулю при $t \rightarrow \infty$ функция. Говорят, что автоморфизм S допускает аппроксимацию циклическими автоморфизмами со скоростью $f(t)$, если для некоторой последовательности целых чисел $q_n \rightarrow \infty$ найдется последовательность разбиений ξ_n пространства X на q_n множеств $C_i^{(n)}$ одинаковой меры и последовательность автоморфизмов S_n , такие, что выполнены следующие условия.

А.1. Для любого измеримого $A \subset X$ найдется такая последовательность множества A_n , состоящих из элементов разбиения ξ_n , что $\mu(A_n \Delta A) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

А.2. $S_n \xi_n = \xi_n$ и S_n циклически переставляет элементы $C_i^{(n)}$ разбиения ξ_n .

А.3.

$$\sum_{i=0}^{q_n-1} \mu(SC_i^{(n)} \Delta S_n C_i^{(n)}) < f(q_n).$$

В этих работах вводятся также и другие варианты понятия аппроксимации, на которых мы не будем останавливаться. Оказалось, что в терминах скорости аппроксимации можно сформулировать ряд существенных свойств автоморфизма. Например:

1. Если S допускает аппроксимацию со скоростью $\frac{\Theta}{t}$, где $\Theta < 4$, то автоморфизм S эргодичен.

2. Если S допускает аппроксимацию со скоростью $\frac{\Theta}{t}$, где $\Theta < \frac{1}{2}$, то автоморфизм S имеет простой спектр.

3. Если S допускает аппроксимацию со скоростью $o\left(\frac{1}{t}\right)$, то его максимальный спектральный тип сингулярен (относительно меры Лебега).

Аппроксимационные методы позволили получить ряд результатов для конкретных динамических систем. В частности, А. Б. Като́к построил очень простой пример автоморфизма с простым непрерывным

спектром. Далее, он же в 1967 г. дал исчерпывающее описание спектра динамической системы на двумерном торе

$$\frac{dx}{dt} = A(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = B(x, y),$$

показав, что если A, B — пять раз дифференцируемые функции, то спектр такой системы простой и сингулярный. Тот факт, что в последней системе спектр может оказаться непрерывным (даже для аналитических правых частей), был установлен в 1954 г. А. Н. Колмогоровым.

Обнаружение автоморфизмов с непрерывным простым спектром вызвало попытки обобщить на них теорему Дж. Неймана о том, что эргодический автоморфизм с дискретным (простым) спектром определяется своим спектром полностью. Однако недавно В. И. Оселедец, используя так называемые косые произведения, введенные японским математиком Анзай, построил автоморфизм с простым непрерывным спектром, не изоморфный своему обратному, и тем самым дал отрицательное решение поставленной проблемы.

4

Энтропия

Одним из центральных вопросов эргодической теории в течение ряда лет был вопрос о том, определяется ли эргодический автоморфизм с непрерывным (в частности, счетно кратным лебеговским) спектром своим спектром однозначно или нет. Хотя мнение о том, что ответ здесь отрицательный, было распространено среди специалистов, долгое время не было никаких подходов к доказательству этого. Решение проблемы было дано в 1957 г. А. Н. Колмогоровым, который ввел для автоморфизма новый инвариант — так называемую энтропию.

Приведем необходимые определения. Пусть S — автоморфизм пространства с мерой X и ξ — некоторое конечное разбиение пространства X на измеримые множества $C_1, \dots, C_k$. Величина $H(\xi) = - \sum_{i=1}^k \mu(C_i) \log \mu(C_i)$ называется энтропией разбиения ξ . Обозначим через $\prod_{j=0}^n S^j \xi$ разбиение, элементами которого служат множества вида

$$C_{i_0} \cap SC_{i_1} \cap \dots \cap S^n C_{i_n}.$$

Можно показать, что всегда существует предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H\left(\prod_{j=0}^n S^j \xi\right)}{n+1} = h(S, \xi).$$

Верхняя грань $h(S)$ чисел $h(S, \xi)$ по всем конечным разбиениям ξ называется энтропией автоморфизма S .

Эффективное вычисление энтропии основано на следующем факте. Назовем разбиение ξ образующим для S ; если $\prod_{j=-\infty}^{\infty} S^j \xi$ представляет собой с точностью до множества меры нуль разбиение пространства X на отдельные точки. Для всякого образующего разбиения имеет место равенство

$$h(S, \xi) = h(S).$$

Следовательно, для вычисления $h(S)$ достаточно взять какое-либо образующее разбиение и вычислить для него $h(S, \xi)$. В. А. Рохлин показал (1965 г.), что для всякого апериодического автоморфизма существует конечное или счетное образующее разбиение. Примеры автоморфизмов со счетнократным лебеговским спектром, но с различной энтропией, а следовательно и неизоморфные между собой, были указаны А. Н. Колмогоровым уже в упомянутой работе. После этого была вычислена энтропия для ряда различных типов автоморфизмов. Важно отметить, что энтропия автоморфизмов с сингулярным (в частности, дискретным) спектром обязательно равна нулю. Весьма важен класс автоморфизмов, называемых K -автоморфизмами.

K -автоморфизмы могут быть определены как такие автоморфизмы, для которых $h(S, \xi) > 0$ для всякого конечного разбиения ξ , не сводящегося к одному элементу. Первоначальное определение K -автоморфизмов было дано в иных терминах, его равносильность приведенному здесь была доказана В. А. Рохлиным и Я. Г. Синаем (1961 г.). Всякий K -автоморфизм имеет счетно-кратный лебеговский спектр (но не наоборот), поэтому, установив, что данный автоморфизм есть K -автоморфизм, мы тем самым находим и его спектр.

Энтропийные свойства автоморфизмов, подобно спектральным, оказались тесно связанными с их аппроксимационными свойствами, о которых говорилось в предыдущем пункте. После появления понятия энтропии в эргодической теории естественно возник вопрос о том, определяется ли эргодический автоморфизм совокупностью инвариантов спектр + энтропия. В общем случае здесь легко получается отрицательный ответ, однако для K -автоморфизмов вопрос остается открытым; возможно, что ответ здесь — положительный, но пока в этом направлении есть лишь частные результаты. Новый подход к проблеме изоморфизма был предложен Я. Г. Синаем, который ввел понятие так называемого слабого изоморфизма, дающее *argiori* более грубую классификацию, чем понятие метрического изоморфизма. А. Г. Кушниренко ввел так называемую A -энтропию, обобщающую приведенное выше понятие энтропии и представляющее интерес и для таких автоморфизмов, энтропия которых равна нулю, в частности для автоморфизмов с дискретным спектром.

В энтропийной теории динамических систем нетривиальным оказался переход от дискретного времени, т. е. автоморфизмов, к непрерывному, т. е. к потокам, однако такое перенесение, в частности построение теории K -потоков, аналогичных K -автоморфизмам, оказалось вполне возможным.

5

Обобщенные динамические системы

В п. 1 мы определили обобщенную динамическую систему как совокупность пространства X с мерой μ на нем и группы G сохраняющих меру отображений. Как уже отмечалось, такие общие системы исследованы еще мало. В 1951 г. С. В. Фомин рассматривал вопрос о том, в какой форме результаты Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова об инвариантных мерах в компактных динамических системах могут быть перенесены на случай более общей группы непрерывных преобразований некоторого метрического (в частности, компактного) пространства. При этом выяснилось существенное различие между случаем коммутативной группы G и некоммутативным случаем, в котором возникает ряд новых обстоятельств.

Теория общих динамических систем (X, μ, G) естественно сопрягается с теорией представлений. Действительно, в пространстве $L_2(X, \mu)$ эта система определяет унитарное представление группы G , если положить

$$U_g f(x) = f(g, x).$$

Ряд результатов и постановок задач, относящихся к обобщенным динамическим системам и связям их с теорией унитарных представлений, получил А. А. Кириллов.

Перенесению эргодических теорем на случай групп, более общих, чем однопараметрические или циклические, был посвящен ряд работ, в том числе работы советских математиков А. А. Темпельмана, В. И. Оселедца, В. И. Арнольда и А. А. Крылова, Д. А. Каждана и др.

Следует подчеркнуть, что изучение мер, инвариантных относительно групп преобразований, более общих, чем циклические или однопараметрические, представляет существенный интерес; эта проблема связана с теорией колец операторов, интегральной геометрией и некоторыми прикладными вопросами теории случайных функций.

6

Гладкие системы

Переход в эргодической теории к чисто метрической точке зрения — рассмотрению абстрактного пространства с мерой и группы сохраняющих меру преобразований этого пространства — оказал глубокое влияние на развитие общих сильных методов эргодической теории: спектральных, энтропийных и др. Вместе с тем, сохранялся также интерес к тем конкретным, связанным с дифференциальными уравнениями, механикой, статистической физикой, системам, которые, собственно говоря, и послужили источником эргодической теории. Поэтому естественны были попытки применить те новые методы и понятия, которые возникли в метрической теории динамических си-

стем, к тем или иным классическим системам, интересным с точки зрения приложений.

Первыми системами, для исследования которых было применено понятие энтропии, были системы вероятностного происхождения. Однако скоро после этого появился ряд работ, в которых была вычислена энтропия для различных систем алгебраического и аналитического происхождения: автоморфизмы компактных групп, геодезические потоки и др. Среди такого рода систем значительный интерес представляют геодезические потоки на многообразиях отрицательной кривизны, связанные с широким кругом проблем механики. Эргодичность такого потока была доказана Э. Хопфом и Хедлундом в 30-х годах, а в 1951 г. И. М. Гельфандом и С. В. Фоминым был вычислен спектр такого потока на многообразиях постоянной отрицательной кривизны. Дальнейшее продвижение здесь оказалось возможным с помощью новых энтропийных методов. Именно, Я. Г. Синай показал (1951 г.), что геодезические потоки на компактных поверхностях отрицательной кривизны являются K -системами и, следовательно, имеют счетно-кратный лебеговский спектр. При этом кривизна поверхности может быть переменной, требуется лишь, чтобы она была ограничена двумя отрицательными константами. В. И. Арнольд рассмотрел соответствующие потоки на n -мерных многообразиях отрицательной кривизны и нашел условия, когда они являются K -системами.

Геодезические потоки на поверхностях отрицательной кривизны обладают резкой неустойчивостью: две траектории такого потока, проходящие через близкие точки, удаляются друг от друга (в противоположном направлении — сближаются) так, что расстояние между ними растет (соответственно убывает) с экспоненциальной скоростью. Исходя из этого свойства, Д. В. Аносов определил аксиоматически и весьма важный класс гладких динамических систем, названных им Y -системами и обладающих аналогичным свойством неустойчивости. Для изучения эргодических и энтропийных свойств Y -систем Д. В. Аносовым, Я. Г. Синаем, В. И. Арнольдом и другими авторами была разработана теория так называемых трансверсальных слоев, т. е. таких разбиений фазового пространства на гладкие многообразия некоторой фиксированной размерности k (слои), которые под действием заданного в динамической системе сдвига переходят друг в друга.

В последнее время появился ряд работ, посвященных исследованию динамических систем на многообразиях с краем. К такого рода системам естественно приводит изучение механических систем, в которых происходят соударения частиц. В этом направлении важные результаты получены Я. Г. Синаем (1963 г.), доказавшим эргодичность системы твердых шариков с упругими соударениями.

Среди классических динамических систем, определяемых дифференциальными уравнениями, важный и интересный класс образуют гамильтоновы системы. Еще Пуанкаре обнаружил, что поведение траекторий у таких систем может быть чрезвычайно сложным и неожиданным, в силу чего аналитическое рассмотрение таких систем весьма затруднительно. За последние 15 лет в исследовании таких систем фундаменталь-

ные результаты были получены в работах А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда, продолженных затем и другими математиками. Основная идея этих работ состоит в следующем. Пусть сперва имеется динамическая система, для которой координаты $q_1, \dots, q_n$ пробегают n -мерный тор, а пространство импульсов есть некоторая область в n -мерном пространстве, и пусть функция Гамильтона этой системы $H = H_0(p)$ зависит только от импульсов. Такая система интегрируема и ее фазовое пространство расслаивается на n -мерные торы. Пусть теперь рассматривается система, функция Гамильтона которой имеет вид $H(p, q) = H_0(p) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k H_k(p, q)$, где ε — малый параметр.

А. Н. Колмогоров показал, что в такой возмущенной системе сохраняется множество инвариантных торов, имеющее положительную меру; однако это множество обладает весьма сложной «слоистой» структурой.

Развитые здесь методы позволили получить ряд важных теорем устойчивости в задаче трех тел, задаче о движении частицы в магнитном поле и т. д. Обобщая методы А. Н. Колмогорова, В. И. Арнольд получил фундаментальный результат в задаче n тел, доказав существование множества начальных данных положительной меры, при которых движение n тел, взаимодействующих по закону Ньютона, всегда остается в пределах некоторой ограниченной области.

Из приведенного выше следует, что эргодическая теория представляет собой важное и интенсивно развивающееся направление в математике, охватывающее широкий круг проблем, от чистой теории меры до конкретных задач механики. В настоящее время эргодическая теория, созданная в значительной мере работами советских математиков, еще далека от своего завершения. Дальнейшие исследования в этой области несомненно приведут как к новым теоретическим результатам, так и к важным приложениям.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе мы даем краткий исторический обзор основных результатов теории интегральных уравнений. В настоящее время большинство этих результатов можно рассматривать как конкретные иллюстрации абстрактной теории операторов. Несмотря на это, теория специальных классов интегральных уравнений и по сей день имеет самостоятельный интерес. Дело в том, что не всегда удается сразу построить абстрактную теорию операторных уравнений, конкретной реализацией которой являлось бы интегральное уравнение, встречающееся при решении некоторых задач теоретической или прикладной математики. Такие уравнения часто сами становятся источником постановки новых задач в абстрактной теории операторов. Возникновение теории операторов в первую очередь обязано теории интегральных уравнений, разработка которой была начата в работах В. Вольтера, И. Фредгольма, А. Пуанкаре, Д. Гильберта и Э. Шмидта.

Исходя из сказанного выше, в настоящее время трудно провести определенную грань между теорией абстрактных операторных уравнений и теорией интегральных уравнений. В этой главе, как правило, не будем касаться теории абстрактных операторных уравнений и их приложений к различным классам линейных и нелинейных интегральных уравнений.

Рассмотрим лишь те интегральные уравнения, теория которых была построена без привлечения общей абстрактной теории операторов и явилась отправным пунктом для дальнейших обобщений или же сыграла важную роль при решении различных задач математической физики. В этом отношении из различных классов интегральных уравнений особо выделяются сингулярные интегральные уравнения, в которых искомая функция находится под знаком отличных от обычного несобственных интегралов.

В. И. Смирнов в своей статье, которая опубликована в сборнике «Математика в СССР за тридцать лет», пишет, что «наиболее крупным циклом работ по интегральным уравнениям в Советском Союзе

является цикл работ по теории сингулярных интегральных уравнений». Такое положение сохранилось и в двух последующих десятилетиях.

В связи с этим в данной главе мы в основном останавливаемся на обзоре развития теории сингулярных интегральных уравнений.

Относительно других классов интегральных уравнений мы ограничиваемся лишь краткими указаниями.

1

Одномерные сингулярные интегральные уравнения

Под одномерными сингулярными интегральными уравнениями понимают такие интегральные уравнения, в которых несобственные интегралы, распространенные по некоторой плоской кривой, рассматриваются в смысле главного значения по Коши. Такие уравнения начали исследоваться, с одной стороны, Пуанкаре в связи с разработкой математической теории приливов, а с другой — Гильбертом в связи с изучением граничных задач теории функций комплексного переменного. В докторской диссертации Ю. В. Сохоцкого, опубликованной в 1873 г. в Петербурге, изучался ряд основных свойств интеграла типа Коши с привлечением понятия главного значения интеграла и говорилось о задаче решения интегрального уравнения, содержащего интеграл типа Коши. С исторической точки зрения важно то, что в этой работе впервые затронуты вопросы теории сингулярных интегральных уравнений. Однако упомянутые результаты Сохоцкого были забыты и они впоследствии не оказали какого-либо влияния на дальнейшее развитие теории.

Работы, которые легли в дальнейшем в основу разработки теории сингулярных интегральных уравнений, принадлежат Нетеру¹ и Карлеману². Нетер в своей работе рассмотрел сингулярное интегральное уравнение вида

$$N\varphi(s) \equiv a(s)\varphi(s) + \frac{b(s)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma + \int_{-\pi}^{\pi} k(s, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma = f(s), \quad (1)$$

где $a(s)$, $b(s)$, $f(s)$ и $k(s, \sigma)$ — заданные непрерывные функции, $\varphi(s)$ — искомая функция и несобственный интеграл, содержащий котангенс, рассматривается в смысле главного значения по Коши. Нетер впервые доказал теоремы, описывающие общие свойства уравнений вида (1), известные в настоящее время под названием теорем Нетера. Для удобства дальнейшего изложения сформулируем эти теоремы в современных терминах. Введем для этого некоторые определения.

¹ F. Noether. Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, Math. Ann., Bd 82, 1921.

² T. Carleman. Sur la résolution de certaines équations intégrales, Arkiv för mat., astr. och fys., Bd 16, N 26, 1922.

Пусть E — функциональное пространство Банаха, в котором ищется решение линейного уравнения $N\varphi = f$. Через N^* и E^* обозначим соответственно сопряженный оператор и сопряженное пространство. Число линейно независимых решений однородных уравнений $N\varphi = 0$, $N^*\psi = 0$ соответственно в пространствах E и E^* обозначим через ν и ν^* . Если эти числа конечны, то разность $\nu - \nu^*$ будем называть индексом оператора N (или уравнения $N\varphi = f$) и обозначать через $\text{ind } N$, т. е. $\text{ind } N = \nu - \nu^*$.

Теоремами Нетера о линейных уравнениях $N\varphi = f$ обычно называются следующие теоремы.

Первая теорема. Однородные уравнения $N\varphi = 0$ и $N^*\psi = 0$ имеют конечное число линейно независимых решений в пространствах E и E^* соответственно.

Вторая теорема. Необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения $N\varphi = f$ заключается в том, чтобы $\psi_j(f) = 0$, $j = 1, \dots, \nu^*$, где $\psi_1, \dots, \psi_{\nu^*}$ — полная система линейно независимых решений сопряженного уравнения в пространстве E^* .

Иначе говоря, эта теорема утверждает, что оператор N нормально разрешим.

Третья теорема. Индекс оператора N не зависит от вполне непрерывного слагаемого: $\text{ind } (N + V) = \text{ind } N$, где V — произвольный линейный вполне непрерывный оператор.

Эти теоремы были доказаны Нетером в 1921 г. в случае уравнения (1). Третья теорема сформулирована у Нетера так:

$$\text{ind } N = \frac{1}{\pi} [\arg(a - ib)]_{-\pi}^{\pi}. \quad (2)$$

Отсюда в качестве простого следствия вытекает сформулированная выше третья теорема в случае уравнения (1). Это следствие из формулы (2) Нетера целесообразно сформулировать в виде отдельной теоремы, так как в такой формулировке она допускает далеко идущие обобщения.

Работа Нетера — весьма ценное исследование, которое явилось отправным пунктом для разработки общей теории сингулярных интегральных уравнений. Однако следует отметить, что Нетер не оговаривает точно все те условия, которые обеспечивают справедливость его заключений. Например, от функций $a(s)$, $b(s)$, $\varphi(s)$ в уравнении (1) он требует только непрерывность, что явно недостаточно для его рассуждений, которые сами порой затруднительны для чтения. По-видимому, это явилось причиной того, что работа Нетера в течение долгого периода не имела должного признания.

В работе Карлемана рассмотрено сингулярное интегральное уравнение вида

$$N\varphi = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + V\varphi = f(t), \quad (3)$$

где $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ — данные функции на контуре Γ , $\varphi(t)$ — искомая функция, а $V\varphi$ — некоторый интегральный оператор типа Фредгольма.



Ростовский государственный университет.

В этой работе при некоторых частных предположениях был предложен метод для эффективного (в квадратурах) решения уравнения

$$N_0 \varphi \equiv a(t) \varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t), \quad (4)$$

которое в настоящее время, следуя Н. И. Мусхелишвили, называют характеристическим сингулярным интегральным уравнением.

Карлеман предполагает, что в уравнении (4) контур Γ — отрезок $[-1, 1]$, $b(t)$ — вещественная постоянная, $a(t)$, $f(t)$ — вещественные аналитические функции на сегменте $[-1, 1]$. Относительно же искомой функции $\varphi(t)$ сказано лишь, что она достаточно регулярная функция. Понятно, что решение, полученное в таких весьма жестких предположениях не могло представлять само по себе большого интереса. Однако работа Карлемана является важной не в смысле полученных в ней результатов, а в смысле содержащейся в этой работе плодотворной идеи для эффективного решения уравнения (4), которая, как оказалось, допускает далеко идущие обобщения. Идея эта состоит в следующем. Взамен искомой функции $\varphi(t)$, заданной на контуре Γ , рассматривается функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t - z} dt,$$

аналитическая на разрезанной вдоль линии Γ комплексной плоскости. Пользуясь формулами Сохоцкого — Племеля о предельных значениях интеграла типа Коши, имеем

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t), \quad \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t_1)}{t_1 - t} dt_1 = \Phi^+(t) + \Phi^-(t). \quad (5)$$

С помощью этих формул уравнение (4) принимает вид

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) + g(t), \quad (6)$$

где

$$G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}, \quad g(t) = \frac{f(t)}{a(t) + b(t)}.$$

Следовательно, если $\varphi(t)$ есть решение уравнения (4), то аналитическая функция $\Phi(z)$ является решением граничной задачи (6). Легко видеть, что и обратно, если $\Phi(z)$ есть решение задачи (6), то при определенных условиях первая из формул (5) дает решение уравнения (4). Карлеман в своей работе указывает путь эффективного, в квадратурах, решения граничной задачи (6). Получив эффективное решение уравнения (4), Карлеман этот результат применяет для решения задачи регуляризации в случае полного сингулярного интегрального уравнения (3). Эта задача является одной из основных в общей теории сингулярных интегральных уравнений.

Задача заключается в следующем: для данного сингулярного интегрального уравнения $N\varphi = f$ требуется построить такое уравнение Фредгольма $F\varphi = g$, чтобы всякое решение сингулярного уравнения было бы решением построенного уравнения Фредгольма (уравнение называют фредгольмовым, если для него справедливы теоремы Фредгольма).

Если дополнительно требуется, чтобы уравнения $N\varphi = f$ и $F\varphi = g$ были эквивалентными, тогда задачу называют задачей эквивалентной регуляризации или задачей эквивалентности. Решение задачи регуляризации имеет двойное значение: во-первых, решение этой задачи дает нам возможность свести отыскание решений нефредгольмовых уравнений (каким обычно является сингулярное уравнение) к отысканию решения фредгольмовых уравнений. Во-вторых, решение задачи регуляризации является важным этапом в установлении общих свойств сингулярных интегральных уравнений, в частности теорем Нетера.

Для решений задачи регуляризации в настоящее время существуют два метода. Один из них можно назвать методом регуляризации с помощью умножения операторов, а другой — методом регуляризации с помощью характеристического уравнения. Метод регуляризации с помощью умножения операторов берет свое начало в работах Пуанкаре и Гильберта. Идея этого метода заключается в следующем. С помощью элементов оператора N (содержащегося в сингулярном интегральном уравнении $N\varphi = f$) требуется построить эффективно в квадратурах оператор M типа N так, чтобы уравнение $MN\varphi = Mf$ было фредгольмовым. В этом случае оператор M называют регуляризатором оператора N ,

точнее регуляризатором слева. Если M подобран так, что уравнение $NM\psi = f$, где ψ — некоторая новая неизвестная функция, является фредгольмовым, то M называют регуляризатором оператора N справа.

Нетер при доказательстве своих теорем пользуется методом регуляризации с помощью умножения операторов.

В Советском Союзе научные исследования по теории сингулярных интегральных уравнений начали проводиться во второй половине тридцатых годов и особенно интенсивно развивались с конца тридцатых годов.

Первая работа — обзорная статья В. Д. Купрадзе «О некоторых сингулярных интегральных уравнениях математической физики» (1936 г.) — была посвящена сингулярным интегральным уравнениям. В этой статье прореферированы все те основные результаты, которые были известны к тому времени как по одномерным, так и кратным сингулярным интегральным уравнениям.

В отличие от интегральных уравнений Фредгольма, изучение сингулярных уравнений (когда несобственные интегралы рассматриваются в смысле главного значения по Коши) весьма сильно зависит от тех предположений, которым подчинены все данные и искомые элементы уравнения. Иногда даже незначительное изменение в этих предположениях вызывает значительные осложнения.

В 1937 г. Ф. Д. Гахов получил полное решение задачи (6), когда Γ — замкнутый гладкий контур, а функции $g(t)$, $G(t)$ удовлетворяют условию Гельдера (условию H ; в этом случае будем говорить также, что функция принадлежит классу H). Этот результат совместно с упомянутой выше идеей Карлемана дает возможность эффективного (в квадратурах) решения характеристического уравнения (4). Некоторые результаты в этом направлении были получены С. Г. Михлиным (1939 г.). В 1940 г. И. Н. Векуа с помощью сопоставления идей Карлемана с решением задачи (6), полученным Гаховым, дал полное эффективное (в квадратурах) решение уравнения (4) в классических предположениях, т. е. когда Γ — замкнутый гладкий контур, $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$, $\varphi(t)$ удовлетворяют условию Гельдера и, кроме того, функции

$$S(t) = a(t) + b(t), \quad D(t) = a(t) - b(t) \quad (7)$$

не обращаются в нуль нигде на Γ . Это условие обычно называют условием нормальности соответствующего сингулярного интегрального уравнения или оператора. В этих предположениях было показано, что если индекс уравнения (4)

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)} \right]_{\Gamma} \quad (8)$$

(символ $|_{\Gamma}$ обозначает приращение выражения, заключенного в скобки, когда t один раз обойдет контур Γ) неотрицателен, то уравнение имеет решение и все эти решения представляются формулой

$$\varphi(t) = a^*(t) f(t) - \frac{b^*(t) \omega(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{\omega(\tau)(\tau - t)} + b^*(t) \omega(t) P_{\kappa-1}(t), \quad (9)$$

где

$$a^*(t) = \frac{a(t)}{a^2(t) - b^2(t)}, \quad b^*(t) = \frac{b(t)}{a^2(t) - b^2(t)},$$

а $\omega(t)$ — известная функция, которая выражается явно через функции $a(t)$ и $b(t)$ с помощью квадратур. Если индекс $\kappa < 0$, то уравнение, вообще говоря, не имеет решения. Решение существует тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\int_{\Gamma} \frac{t^k f(t)}{\omega(t)} dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -\kappa - 1. \quad (10)$$

И в этом случае решение дается опять формулой (9), в которой $P_{\kappa-1}(t) \equiv 0$.

Случай, когда в уравнении (4) Γ — конечная совокупность разомкнутых гладких дуг, существенно отличается от случая, когда Γ является замкнутым. Случай разомкнутых дуг был изучен Н. И. Мусхелишвили (1940 г.). Для этой цели им был введен класс функций H^* . Говорят, что $\varphi \in H^*$, если функция $\varphi(t)$, заданная на Γ , удовлетворяет условию Гельдера на каждой закрытой части Γ , не содержащей концов, а вблизи любого конца c представима в виде $\varphi(t) = \varphi_*(t)(t - c)^{-\nu}$, где $0 \leq \operatorname{Re} \nu < 1$, а $\varphi_*(t)$ — удовлетворяют условию Гельдера на Γ . Изучив интеграл типа Коши, когда плотность принадлежит классу H^* , Мусхелишвили, развив идею Карлемана, построил эффективное решение уравнения (4) в том случае, когда Γ — совокупность разомкнутых гладких дуг, $a(t)$, $b(t)$ удовлетворяют условию Гельдера и условию нормальности (7), а $f(t)$ и $\varphi(t) \in H^*$. Определяя соответствующим образом индекс уравнения и функцию $\omega(t)$, эффективное решение уравнения опять можно получить по формуле (9). Мусхелишвили построил также при указанных выше предположениях эффективное (в квадратурах) решение уравнения

$$N_0^* \psi \equiv a(t) \psi(t) - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{b(\tau) \psi(\tau)}{\tau - t} d\tau = g(t), \quad (11)$$

союзного с уравнением (4).

Введение класса H^* и изучение интеграла типа Коши с плотностью, принадлежащей этому классу, явилось основным моментом при разработке теории сингулярных интегральных уравнений в случае разомкнутых линий и разрывных коэффициентов.

Эффективное решение в квадратурах уравнений (4) и (11) в случае, когда Γ — замкнутая линия, коэффициенты уравнений $a(t)$, $b(t)$ удовлетворяют условию Гельдера, кроме конечного числа точек, в которых они могут иметь разрывы первого рода, а $f(t)$, $\varphi(t) \in H^*$, было дано Ф. Д. Гаховым (1942 г.). Полученные формулы аналогичны отмеченным выше.

Предположим теперь, что Γ — конечная совокупность замкнутых или разомкнутых линий, удовлетворяющих условию Ляпунова, $a(t)$, $b(t)$ — непрерывные на Γ функции, кроме конечного числа точек, в которых они имеют разрывы первого рода, и удовлетворены условия нормальности (7). Пусть, кроме того, $f(t)$ и $\varphi(t)$ принадлежат классу

$L_p(\Gamma; \rho)$, $p > 1$, где функция $\rho(t)$ строится определенным образом по точкам разрыва коэффициентов $a(t)$ и $b(t)$ ³. При этих предположениях Б. В. Хведелидзе показал (1956—1958 гг.), что указанные выше результаты относительно эффективного решения уравнений (4) и (11) остаются в силе. Из этого результата вытекает, что если коэффициенты уравнений (4) и (11) вместо условия непрерывности удовлетворяют условию Гельдера, а правые части принадлежат классу H^* , то всякое решение этих уравнений, принадлежащее классу $L_p(\Gamma; \rho)$, будет принадлежать и классу H^* .

В работах И. И. Данилюка (1960 г.) и И. Б. Симоненко (1960 г.) рассмотрены более широкие классы допустимых функций для коэффициентов $a(t)$, $b(t)$.

В отмеченных до сих пор результатах всегда предполагалось, что функции $S(t)$ и $D(t)$, определяемые равенствами (7), отличны на Γ от нуля. Ф. Д. Гаховым (1942 г.), Н. П. Векуа (1949 г.), Л. А. Чикиным (1953 г.), Б. В. Хведелидзе (1956 г.), А. Э. Драчинским (1963 г.) при различных условиях изучены различные случаи, когда это условие нарушается. Случаи, когда Γ является негладким контуром определенных классов, рассмотрели Т. Г. Гегелиа (1952 г.), А. Д. Алексеев (1960 г.), А. А. Бабаев (1963 г.), Э. Г. Гордадзе (1965 г.), В. Ю. Шелепов (1968 г.).

Некоторые случаи, когда Γ есть счетная совокупность гладких замкнутых кривых, рассмотрены И. Н. Карцивадзе и Б. В. Хведелидзе (1949, 1954 гг.), В. А. Пааташвили (1965 г.), а когда Γ является счетной совокупностью отрезков — С. А. Фрейдкиным (1954—1964 гг.).

Когда Γ состоит только из замкнутых контуров и коэффициенты уравнений (4), (11) удовлетворяют условию Гельдера, то Г. А. Хускивадзе (1961 г.) удалось обосновать формулы эффективного решения, когда $f(t)$ и $\varphi(t)$ принадлежат некоторым классам неинтегрируемых в смысле Лебега функций.

Заканчивая обзор эффективных решений в квадратурах сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши, укажем, что идею Карлемана, на которую опираются все указанные выше результаты, оказалось возможным применить и к некоторым отличным от (4) и (11) типам интегральных уравнений. Ряд результатов в этом направлении принадлежит С. Г. Михлину (1948 г.), Ф. Д. Гахову и Л. И. Чибриковой (1954), А. В. Бицадзе (1957 г.) и другим.

Давно было замечено, что некоторые частные случаи сингулярных уравнений (4) или (11) решаются в конечном виде в квадратурах. Прежде всего упомянем известный результат Гильберта, касающийся обращения сингулярного интеграла с ядром Гильберта. В настоящее время опубликовано значительное число работ, в которых в тех или иных предположениях дано эффективное решение в квадратурах простейшего сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - x} = f(x), \quad x \in \Gamma. \quad (12)$$

³ $\varphi(t) \in L_p(\Gamma; \rho)$, где $\rho(t)$ — некоторая неотрицательная функция, определенная на Γ , если произведение $\rho(t) |\varphi(t)|^p$ суммируемо на Γ .

Если Γ — конечная совокупность замкнутых линий, то при довольно общих предположениях уравнение (12) имеет единственное решение, которое определяется формулой

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - x}.$$

Задача решения уравнения (12) усложняется, когда Γ представляет собой совокупность разомкнутых линий. В этом предположении различные частные случаи уравнения (12) встречаются в теории тонкого крыла самолета, а также в некоторых других задачах аэродинамики и теории упругости.

В 1940 г. Н. И. Мусхелишвили построил формулу обращения в случае, когда Γ — совокупность разомкнутых гладких дуг, а функции f и φ принадлежат подклассам класса H^* .

В 1945 г. Н. И. Ахиезер дал формулу обращения интегрального уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} p(\tau) \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad t \in \Gamma,$$

Γ — совокупность взаимно непересекающихся интервалов действительной оси, $p(\tau) \geq 0$ — суммируемая на Γ функция некоторого класса, а $f(t)$ — заданная функция класса $L_2(\Gamma; p)$.

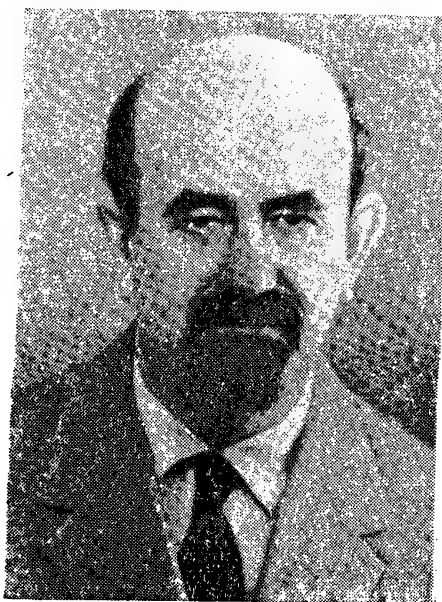
Теперь переходим к историческому обзору основных результатов, касающихся общего уравнения (3) и систем таких уравнений.

Как было указано выше, общую теорию сингулярных интегральных уравнений Нетер развил для уравнения вида (1), т. е. для уравнения с ядром Гильберта. Рассуждения Нетера были уточнены и в ряде случаев существенно упрощены В. Д. Купрадзе (1941 г.) для уравнения (3) с ядром Коши в случае, когда Γ — замкнутая гладкая линия, $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$, $\varphi(t)$ удовлетворяют условию Гельдера, кроме того $a(t)$, $b(t)$ удовлетворяют еще и условию нормальности и вполне непрерывное слагаемое имеет вид

$$V\varphi(t) = \int_{\Gamma} \frac{k(t, \tau)}{|t - \tau|^\alpha} \varphi(\tau) d\tau,$$

где $0 \leq \alpha < 1$, а $k(t, \tau)$ удовлетворяет условию Гельдера относительно обеих переменных. Эти ограничения обычно называют классическими.

Метод Нетера для исследования сингулярного интегрального уравнения существенно основывается на предварительном решении задачи регуляризации с помощью умножения операторов (слева). В связи с этим методом регуляризации еще в 1937 г. Михлин рассмотрел следующую задачу: построить такой регуляризатор M оператора N , чтобы уравнения $N\varphi = f$ и $MN\varphi = Mf$ были эквивалентны, какова бы ни была правая часть $f(t)$. Оператор M , обладающий указанными свойствами, следуя Михлину, называют эквивалентно-регуляризующим для N . Предполагая, что Γ — замкнутый достаточно гладкий контур, коэф-



С. Г. Михлин.

коэффициенты уравнения $a(t)$, $b(t)$ принадлежат классу H и $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ всюду на Γ , $f(t)$, $\varphi(t) \in L_2(\Gamma)$, Михлин доказал, что для существования эквивалентно-регуляризующего оператора необходимо и достаточно, чтобы индекс оператора N был неотрицательным. В случае отрицательного индекса В. Д. Купрадзе показал (1941 г.), что если сингулярное уравнение $N\varphi = f$ разрешимо, то существует такой оператор K , что уравнение $KN\varphi = Kf$ является уравнением Фредгольма, эквивалентным сингулярному уравнению. И. Н. Векуа удалось (1941 г.) оператор K построить эффективно в квадратурах. Так как задача эквивалентной регуляризации не всегда имеет решение, как это показал Михлин, то возник вопрос, нельзя ли постановку задачи эквивалентности видоизменить таким образом, чтобы она

всегда имела решение. Векуа показал (1942 г.), что на поставленный вопрос можно ответить утвердительно. Он рассмотрел следующую видоизмененную задачу эквивалентности: найти оператор P вида N , который удовлетворяет следующим требованиям: 1) операторы PN и NP — фредгольмовы; 2) либо уравнения $N\varphi = f$ и $PN\varphi = Pf$ эквивалентны в обычном смысле, либо эквивалентны уравнения $N\varphi = f$ и $NP\varphi = f$ в том смысле, что если одно из них разрешимо, то разрешимо также другое и их решения связаны соотношением $\varphi = P\psi$. Эту задачу, следуя Векуа, будем называть обобщенной задачей эквивалентности. Таким образом, введя понятия регуляризации оператора справа, Векуа показал, что обобщенная задача эквивалентности всегда имеет решение и что оператор P можно построить эффективно в квадратурах. Воспользовавшись решением этой задачи, Векуа дал один новый, весьма простой способ доказательства теорем Нетера.

В случае системы сингулярных интегральных уравнений, т. е. когда в (3) a , b , V — матрицы, f , φ — векторы, особый интерес представляет построение регуляризатора без использования характеристической системы уравнений, так как в отличие от одного уравнения системы характеристических уравнений не решаются эффективно. Поэтому когда при решении задачи регуляризации применяются характеристические системы, то мы можем показать лишь, что задача регуляризации имеет решение, но мы не имеем возможности эффективно построить соответствующую систему интегральных уравнений Фредгольма. В некоторых предположениях методом умножения операторов задача регуляризации для системы сингулярных интегральных уравнений была впервые решена Жиро (1939 г.); Н. И. Мусхелишвили построил (1942 г.) несколько более общий регуляризатор в классических предположениях (коэффициенты a и b непрерывны в смысле Гельдера), в которых теперь

условие нормальности означает, что матрицы $S(t)$ и $D(t)$ в равенствах (7) неособенные всюду на Γ .

После решения задачи регуляризации Н. И. Мусхелишвили дал доказательства теорем Нетера в указанных выше предположениях.

В 1947 г. С. Г. Михлиным была решена задача регуляризации методом умножения операторов при более общих предположениях относительно заданных и искомым функций. Эти предположения следующие: Γ — замкнутая линия с непрерывной кривизной, коэффициенты уравнений непрерывны и $S(t)$, $D(t)$ — отличные от нуля всюду на Γ функции, если рассматривается одно уравнение, или $S(t)$ и $D(t)$ — неособенные всюду на Γ матрицы, если рассматриваются системы интегральных уравнений, V — вполне непрерывный оператор в пространстве $L_2(\Gamma)$ и $f(t)$, $\varphi(t) \in L_2(\Gamma)$. Далее этот результат С. Г. Михлин применил для доказательств теорем Нетера. В указанных предположениях им были полностью доказаны первая и вторая теоремы и показано, что третья теорема будет справедливой, если известна ее справедливость в случае, когда коэффициенты уравнений удовлетворяют условию Гельдера. Это последнее утверждение было установлено Б. В. Хведелидзе (1947 г.), что и завершило доказательство всех теорем Нетера в указанных выше общих предположениях.

Как видно из сказанного выше, при решении задачи регуляризации, а также при доказательстве теорем Нетера всегда предполагают выполненным условие нормальности. Естественно ставился вопрос, насколько необходимым является такое ограничение. Вопрос этот был исследован (1952 г.) И. Ц. Гохбергом. Он показал, что если Γ — замкнутая линия Ляпунова, коэффициенты уравнения непрерывны и $f(t)$, $\varphi(t) \in L_2(\Gamma)$, то для того чтобы существовал регуляризатор M , являющийся ограниченным оператором в пространстве Гильберта $L_2(\Gamma)$, необходимо, чтобы имело место условие нормальности. Аналогичное утверждение верно и для систем сингулярных уравнений.

Из результата Гохберга следует, что уравнение (3) нельзя регуляризовать ограниченным в L_2 оператором, если $a^2(t) - b^2(t) = 0$ на Γ . Этот результат не исключает возможности решения задачи регуляризации с помощью неограниченных операторов. В такой постановке задача регуляризации, когда $a^2 - b^2 = 0$, при некоторых предположениях была решена Д. И. Шерманом (1951 г.).

Полное решение задачи регуляризации с помощью характеристического уравнения в классических предположениях было дано (1940—1942 гг.) И. Н. Векуа, в связи с чем этот метод в настоящее время в



Д. А. Квеселава.

литературе называется методом Карлемана — Векуа. Идея этого метода заключается в следующем. Пусть нам удалось решить характеристическое уравнение $N_0\varphi = f$ и пусть решение представляется формулой $\varphi = Rf$, где R — некоторый линейный ограниченный оператор. Тогда, переписав общее сингулярное интегральное уравнение (3) в виде $K_0\varphi = f - V\varphi$, получаем, что это уравнение эквивалентно уравнению $\varphi = R(f - V\varphi)$ или

$$\varphi + RV\varphi = Rf. \quad (13)$$

Так как V — вполне непрерывный, а R — ограниченный оператор, то это последнее уравнение является фредгольмовым. Уравнение (13) будет построено эффективно в квадратурах, если эффективно построен оператор R . Таким образом, этот метод является эффективным в смысле эффективного построения уравнения (13) в случае одного сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши, так как в этом случае можно эффективно построить оператор R . Векуа показал, что если индекс уравнения (3), определяемый формулой (8), $\kappa \geq 0$, то уравнение (3) эквивалентно уравнению Фредгольма второго рода (13), которое построено эффективно в квадратурах. В этом случае сразу же решается задача эквивалентной регуляризации. Если $\kappa < 0$, то уравнение (3) эквивалентно системе интегральных уравнений, из которых одно — уравнение Фредгольма второго рода, а остальные $(-\kappa)$ — уравнения Фредгольма первого рода. Далее Векуа показал, что эту систему можно заменить одним интегральным уравнением Фредгольма, эквивалентным сингулярному уравнению, когда это последнее разрешимо. Таким образом, Векуа получил этим путем полное решение задачи эквивалентности. Основываясь на этом результате, Векуа предложил один новый способ для доказательства теорем Нетера в указанных выше предположениях. Этот метод, развитый И. Н. Векуа для решения задачи регуляризации и доказательств теорем Нетера, был использован в работе Н. И. Мухелишвили и Д. А. Квеселава (1942 г.) для изучения аналогичных вопросов в случае, когда контур Γ состоит из разомкнутых дуг.

Мухелишвили и Квеселава показали, что если в уравнении (3) $f(t)$ и $\varphi(t)$ принадлежат к определенным подклассам класса H^* , то получаются результаты, аналогичные случаю замкнутого контура Γ . Используя эти результаты, Ф. Д. Гахов показал (1942 г.), что аналогичные утверждения справедливы и в том случае, когда Γ — замкнутый контур, а коэффициенты $a(t)$, $b(t)$ могут иметь разрывы первого рода в конечном числе точек, а в остальных точках принадлежат классу H . Другим способом аналогичные результаты получил Д. А. Квеселава (1944 г.) Б. В. Хведелидзе установил (1954—1958 гг.), что указанные выше результаты остаются в силе при более общих предположениях, указанных в конце стр. 779. Дальнейшее расширение класса допустимых функций для коэффициентов $a(t)$, $b(t)$ произведено в работах И. Б. Симоненко (1960 г.) и И. И. Данилюка (1960 г.).

В отличие от системы интегральных уравнений Фредгольма, которая сводится к одному уравнению Фредгольма, изучение систем сингулярных интегральных уравнений сопровождается специфическими

трудностями, в особенности для систем с разрывными коэффициентами.

Н. И. Мухелишвили и Н. П. Векуа установили (1943 г.) теоремы Нетера для систем сингулярных интегральных уравнений методом регуляризации Карлемана — Векуа (в классических предположениях, т. е. когда матрицы a , b и векторы f , φ принадлежат классу H , а V — вполне непрерывный оператор со слабой особенностью).

Несмотря на то что в общем случае характеристическая система сингулярных уравнений не решается эффективно, индекс системы был вычислен эффективно:

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \frac{\det D(t)}{\det S(t)} \right].$$

Г. Ф. Манджавидзе, Б. В. Хведелидзе (1958 г.), И. Б. Симоненко (1961 г.) показали, что эти результаты переносятся на случай, когда коэффициенты системы непрерывны, векторы $f(t)$, $\varphi(t) \in L_p(\Gamma)$, $p > 1$, а V — вполне непрерывный линейный оператор в $L_p(\Gamma)$.

Построив теорию граничных задач линейного сопряжения с разрывными коэффициентами в случае нескольких неизвестных функций, Н. П. Векуа исследовал (1944—1945 гг.) важный (в частности, для приложений) класс систем сингулярных уравнений с разрывными коэффициентами; были установлены теоремы Нетера для этого класса уравнений и формула индекса, которая строится эффективно.

Г. Ф. Манджавидзе установил (1950 г.) теоремы Нетера для систем интегральных уравнений, содержащих помимо искомым функций их комплексно сопряженные.

В работе М. А. Лаврентьева (1932 г.), посвященной построению потока, обтекающего дугу заданной формы, указан метод приближенного решения сингулярного интегрального уравнения. За последние годы опубликованы исследования В. В. Иванова в этом направлении, а также работы А. И. Каландия, Г. Н. Пыхтева и др.

В настоящее время имеется также полная теория линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{\alpha=0}^m \left[a_{\alpha}(t) \varphi^{(\alpha)}(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{K_{\alpha}(t, \tau) \varphi^{(\alpha)}(\tau)}{\tau - t} d\tau \right] = f(t),$$

где a_{α} , $K_{\alpha}(t, \tau)$, $f(t)$ — заданные функции, $\varphi^{(\alpha)}(t)$ обозначает производную порядка α от искомой функции. Некоторые частные случаи этого уравнения давно встречаются при изучении задач теоретической аэродинамики, поэтому ему посвящено значительное число работ.



Е. И. Ким.

Указанное уравнение впервые было рассмотрено (1943 г.) Л. Г. Магнарадзе, который свел его к эквивалентному сингулярному уравнению или уравнению Фредгольма. Впоследствии Ю. Н. Крикунов исследовал (1952 г.) задачу нахождения решений уравнения, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям (начальные условия). Простой способ приведения уравнения к сингулярному интегральному уравнению и решения задачи Коши был предложен (1957 г.) Н. П. Векуа. Р. С. Исаханов построил (1960 г.) уравнение, союзное с рассматриваемым уравнением, и доказал теоремы Нетера.

В теории крыла конечного размаха важную роль играет интегродифференциальное уравнение Прандтля. Эффективные способы изучения этого уравнения были предложены И. Н. Векуа и Л. Г. Магнарадзе.

В работах Н. П. Векуа (1948 г.), Г. С. Литвинчука (1961—1967 гг.), Э. Г. Хасабова (1962—1965 гг.), Р. А. Кордзадзе (1964—1968 гг.) и других исследованы сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, в которые неизвестные функции входят при различных значениях аргумента.

Следует упомянуть также исследования (1953—1957 гг.) Е. И. Кима, в которых он рассмотрел некоторые классы интегральных уравнений первого рода с сингулярным ядром и сингулярных интегральных уравнений с контурным интегралом.

2

Многомерные сингулярные интегральные уравнения

Многомерным (точнее n -мерным) сингулярным интегральным уравнением называют уравнение

$$A\varphi \equiv a\varphi + K\varphi = f, \quad (14)$$

где

$$K\varphi = \int_E k(x, y) \varphi(y) d_y E,$$

а E обозначает n -мерное многообразие ($n \geq 2$), $a(x)$, $f(x)$ — заданные на E функции, $K(x, y)$ — заданная на $E \times E$ функция, имеющая особенность порядка n , когда $x = y$.

Основополагающие работы по уравнениям типа (14) были опубликованы Трикоми и Жиро. Трикоми рассмотрел (1926—1928 гг.) уравнение (14), когда $E = E_2$ и $k(x, y)$ имеет весьма специальный вид. Он установил условие существования сингулярного интеграла и получил формулы перестановки сингулярных интегралов. Жиро исследовал (1934—1939 гг.) уравнение (14), когда E является n -мерным гладким компактным многообразием, а ядро $k(x, y)$ — производная функции Леви для линейного дифференциального оператора второго порядка. Он доказал ряд свойств кратных сингулярных интегралов, в частности установил формулу перестановки сингулярных интегралов.

Отметим, что эта формула не оказалась такой полезной при исследовании уравнения (14), как в одномерном случае.

Теория уравнения (14) значительно развилась благодаря работам С. Г. Михлина. Результаты этих работ подытожены в его монографии (1962 г.). Михлин изучил уравнение (14), когда

$$E = E_m, \quad k(x, y) = f(x, \theta) |x - y|^{-m},$$

где

$$\theta = (x - y) |x - y|^{-1},$$

$$\int_{\Sigma} f(x, \theta) d\Sigma = 0;$$

Σ — единичная сфера.

Фундаментальную роль в теории уравнения (14) сыграло понятие символа, введенное Михлиным в 1936 г.

Пусть функция f (которую называют характеристикой оператора K) разлагается в ряд по m -мерным сферическим функциям порядка n относительно второго аргумента:

$$f(x, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{n,m}(x, \theta).$$

Тогда символ оператора A определяется равенством

$$\Phi(x, \theta) = a(x) + \sum \gamma_{n,m} Y_{n,m}(x, \theta),$$

$$\text{где } \gamma_{n,m} = i^m \pi^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) \right]^{-1}.$$

С помощью указанного разложения Михлин, разлагая оператор A в ряд, устанавливает формулу композиции сингулярных интегралов, доказывает, что произведение сингулярных операторов соответствует произведению их символов. Эта теорема позволила Михлину построить регуляризатор, если символ отличен от нуля.

При изучении уравнения (14) важно установить свойства оператора K . Михлин доказал, что оператор K при $E = E_m$ ограничен в пространстве L_2 .

Ограниченность оператора K в пространстве L_p ($p > 1$) при $E = E_m$ в весьма общих предположениях относительно ядра k доказали Кальдерон и Зигмунд. Эта теорема была обобщена (1961 г.) Т. Г. Гегелиа для более общих ядер k и многообразия E . Он установил ограниченность оператора K в пространствах $L_p(E, \rho)$. И. Б. Симоненко доказал (1960 г.) ограниченность оператора K в пространствах Орлича.

Задачу дифференцирования сингулярных интегралов изучили Михлин, Кальдерон и Зигмунд, Гегелиа.

Задачам регуляризации посвящены работы Жиро, С. Г. Михлина, И. Ц. Гохберга, Т. Г. Гегелиа и др. Михлин построил регуляризатор в пространстве L_2 , когда $E = E_m$. Он доказал, что если символ этого оператора — достаточно гладкая функция и его модуль имеет положительную нижнюю грань, то существует регуляризатор. И. Ц. Гохберг



Т. Г. Гегелиа.

доказал (1960 г.), что необращения в нуль не только достаточно, но и необходимо для того, чтобы уравнение (14) допускало регуляризацию в пространстве L_2 . Основываясь на результатах Жиро и Михлина, Гегелиа построил (1963 г.) регуляризатор уравнения (14) в пространстве $L_p(E, \rho)$.

А. В. Бицадзе построил (1953 г.) двумерный аналог интеграла типа Коши, изучил его свойства и получил формулы обращения сингулярных интегралов. Кроме того, А. В. Бицадзе дает (1955 г.) эффективное решение достаточно общих уравнений типа (14). С работами Бицадзе связаны некоторые результаты В. И. Шевченко. Другое доказательство формулы обращения Бицадзе дал Гегелиа (1963 г.).

В. Д. Купрадзе исследовал (1963 г.) системы многомерных сингулярных интегральных уравнений пространственной

теории упругости и доказал, что для этих систем справедливы теоремы Фредгольма. Одно специальное двумерное сингулярное интегральное уравнение, встречающееся в теории обобщенных аналитических функций, исследовано (1959 г.) И. Н. Векуа.

С. Г. Михлин доказал, что если $\inf |\Phi(x, \vartheta)| > 0$, то для уравнения (14) справедливы теоремы Фредгольма, а если нижняя грань модуля определителя символической матрицы системы многомерных сингулярных интегральных уравнений положительна, то эта система — Нетерова.

Т. Г. Гегелиа исследовал (1959—1963 гг.) вопрос о существовании дифференцируемых решений уравнения (14). Он доказал, что если E и k , соответственно, достаточно гладкие многообразия и сингулярное ядро, a и f имеют непрерывные частные производные на E до порядка n включительно и эти производные принадлежат определенным классам непрерывных функций, то всякое решение уравнения (14) класса $L_p(E)$ ($p > 1$) имеет производные до порядка n включительно, причем это решение и его производные принадлежат соответствующим классам непрерывных функций.

Основные теоремы теории уравнения (14) формулируются в терминах символа. Некоторые из этих теорем справедливы при определенных условиях гладкости символа, поэтому важны теоремы, которые устанавливают, при каких условиях, наложенных на a и f , символ Φ обладает требуемыми свойствами гладкости. Теоремы такого рода получены С. Г. Михлиным, а также Р. В. Капанадзе (1967 г.).

Жиро и Михлин рассмотрели также многомерное сингулярное интегральное уравнение с параметром

$$A_\lambda(\varphi) \equiv a\varphi + \lambda K(\varphi) + m(\varphi) = f,$$

где λ — комплексное число, а $m(\varphi)$ — вполне непрерывный оператор в рассматриваемом пространстве.

Пусть $E = \{\lambda : \inf |1 - \lambda \Phi(x, \vartheta)| = 0\}$, а G — связное открытое множество комплексной плоскости, не содержащее точек множества E . Жиро и Михлин доказали, что

$$\operatorname{ind} A_{\lambda_1} = \operatorname{ind} A_{\lambda_2}$$

для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in G$.

А. И. Вольперт получил (1962 г.) формулу для вычисления индекса общих систем сингулярных интегральных уравнений, распространенных на двумерные компактные ориентируемые многообразия. Эту формулу обобщили Б. Боярский (1964 г.) и Н. А. Берикашвили (1964 г.). Атья и Зингер получили формулу индекса для общих систем типа (14), распространенных на n -мерные компактные многообразия. Более того, они исследовали общую ситуацию, частным случаем которой являются интегральные и интегро-дифференциальные уравнения. Эти уравнения, рассмотренные на многообразиях с краем, исследовали М. Ф. Атья, М. И. Вишик и Г. И. Эскин (1964—1967 гг.), И. Б. Симоненко (1964 г.) и др.

Все сказанное выше относится к уравнениям типа (14), символ которых не обращается в нуль. Очень трудной задачей является рассмотрение случая с обращающимся в нуль символом. Этим вопросам посвящены работы А. В. Бицадзе (1963—1966 гг.).

Теория как одномерных, так и многомерных сингулярных интегральных уравнений, которая строилась различными авторами при различных частных предположениях относительно заданных и искомых функций, стала источником постановки ряда задач в общей теории линейных операторных уравнений. В этом направлении ценные результаты получили С. Г. Михлин, З. И. Халилов, М. Г. Крейн, И. Ц. Гохберг, М. А. Красносельский, Ю. И. Черский и другие.

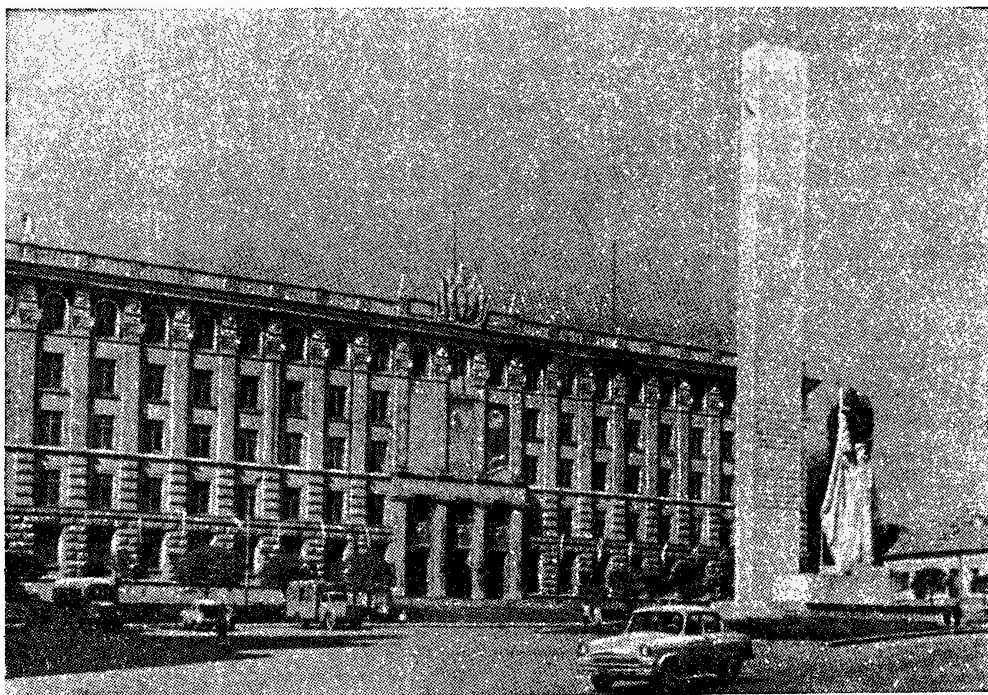
3

Интегральные уравнения с ядрами, зависящими от разности аргументов

Важнейшим среди интегральных уравнений с ядрами, зависящими от разности аргументов, является уравнение на полуоси

$$\varphi(x) - \int_0^{\infty} k(x-t)\varphi(t)dt = f(x), \quad x > 0. \quad (15)$$

Однородное уравнение ($f(x) \equiv 0$) было впервые изучено Н. Винером и Э. Хопфом в 1931 г. На ядерную функцию $k(x)$ они наложили существенное ограничение — требование экспоненциального убывания при $|x| \rightarrow \infty$. Полное решение уравнения (15) при значительно более общих предположениях относительно $k(x)$ получено советскими математиками. Первое серьезное исследование принадлежит В. А. Фоку (1944 г.), который рассмотрел уравнение (15). Он предполагал, что $k(x)$ — четная



Здание Президиума Академии наук Молдавской ССР.

функция и при некотором значении положительной постоянной c функция $e^{cx} k(x)$ абсолютно интегрируема и имеет ограниченную вариацию в промежутке $(0, \infty)$, и в этих предположениях полностью изучил уравнение (15). Большое влияние на последующие развития теории уравнения типа (15) оказали работы И. М. Рапопорта (1948—1949 гг.), в которых исследование произведено при значительно более слабых предположениях. Эти предположения были еще более ослаблены в работе И. Ц. Гохберга (1955 г.). Рапопортом было установлено, что уравнение (15), а также «парные» уравнения

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t) \varphi(t) dt &= f(x), \quad x < 0, \\ \varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t) \varphi(t) dt &= f(x), \quad x > 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

приводятся к известной задаче сопряжения (задача Римана) теории аналитических функций. Способ приведения проще всего иллюстрировать на уравнении, транспонированном к (16)

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \int_0^{\infty} k_1(x-t) \varphi(t) dt - \int_{-\infty}^0 k_2(x-t) \varphi(t) dt &= f(x), \\ -\infty < x < \infty. \end{aligned} \quad (17)$$

Введя обозначения

$$\varphi_+(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \varphi_-(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ \varphi(x), & x < 0, \end{cases} \quad (18)$$

придадим уравнению (17) форму

$$\varphi_+(x) + \varphi_-(x) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t) \varphi_+(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t) \varphi_-(t) dt = f(x).$$

Действуя на последнее равенство преобразованием Фурье и обозначая интегралы Фурье одноименными заглавными буквами, получим

$$[1 - K_1(x)] \Phi^+(x) + [1 - K_2(x)] \Phi^-(x) = F(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (19)$$

Здесь неизвестными являются функции $\Phi^+(x)$ и $\Phi^-(x)$, которые в силу (18) должны быть аналитически продолжимыми соответственно на верхнюю или нижнюю полуплоскости. Таким образом, (19) есть задача сопряжения, эффективное решение которой в настоящее время хорошо разработано.

Ю. И. Черский рассмотрел (1953 г.) парное интегральное уравнение (16), добавив в левой части интегральный оператор с некоторым ядром $n(x, t)$, и показал, что для такого уравнения справедливы теоремы Нетера. В работах Ф. Д. Гахова и Ю. И. Черского изучены (1954, 1956 гг.) уравнения (16) и (17) в различных предположениях, которые в качестве частного случая включают результаты И. М. Рапопорта.

В последнем десятилетии теория уравнений типа свертки развивалась значительно интенсивнее, чем раньше, в предшествующие годы. М. Г. Крейн рассмотрел (1958 г.) уравнение (15) в комплексном банаховом пространстве E , которое может совпадать с одним из следующих пространств: $L_+^{(p)}$ ($1 \leq p < \infty$), C_+^0 , C_+ , M_+^u , M_+^c , M_+ функций, определенных на полуоси $x > 0$. M_+ — пространство всех ограниченных измеримых функций $\varphi(x)$ с нормой $\|\varphi\| = \sup_{0 < x < \infty} \text{ess } |\varphi(x)|$. Простран-

ства M_+^c и M_+^u суть подпространства пространства M_+ , состоящие из всех равномерно непрерывных функций из M_+ . Наконец, C_+ состоит из всех непрерывных функций, для которых существует предел $\varphi(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$, а C_+^0 — его подпространство функций, для которых $\varphi(\infty) = 0$. С помощью результатов Винера и Винера — Леви по гармоническому анализу и общей теории операторов М. Г. Крейну удалось построить законченную теорию уравнения (15) при предположении, что $k(x) \in L(-\infty, \infty)$.

В работе И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна аналогичное исследование проведено (1958 г.) для уравнений (16) и (17). В указанных выше работах И. М. Рапопорта и Ю. И. Черского эти уравнения рассматривались в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$.

Г. А. Джанашия и Р. Д. Банцури показали (1964 г.), что уравнение (15) при $k(x) \in L(-\infty, \infty)$ в пространстве $L(0, \infty)$ может быть изучено путем непосредственного применения преобразования Фурье и решения получающейся задачи сопряжения.

Г. А. Джанашия обобщил (1964 г.) этот результат на случай уравнений (16) и (17) в пространствах M , $L^{(p)}$, C и C^0 . Другой способ решения уравнений (16) и (17), когда преобразованию Фурье подвергаются только ядерные функции k_1 и k_2 , впервые предложен Ю. И. Черским (1953, 1957 гг.).

Различные методы приближенного решения уравнений (15) — (17) в случае, когда выполнены условия нормальной разрешимости

$$1 - K(x) \neq 0, \quad 1 - K_1(x) \neq 0, \quad 1 - K_2(x) \neq 0, \quad (20)$$

изучены в работах В. В. Иванова и Е. А. Карагодовой (1961 г.), И. Ц. Гохберга и И. А. Фельдмана (1965 г.), И. С. Чеботару (1965 г.), Ю. И. Черского (1963 г.) и других ученых.

Пути развития теории уравнения типа свертки во многом определялись проблемами, возникшими в приложениях этих уравнений к задачам механики и математической физики. В частности, задачи теории дифракции и теории упругости привели к необходимости изучения уравнения первого рода

$$\int_0^\infty k(x-t) \varphi(t) dt = f(x), \quad x > 0, \quad (21)$$

и интегро-дифференциальных уравнений; примером может служить уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda \right) \int_0^\infty k(x-t) \varphi(t) dt = f(x), \quad x > 0, \quad \lambda = \text{const.} \quad (22)$$

Эффективные методы решения контактных задач теории упругости, сводящихся к уравнениям указанных типов, использованы в работах Г. Я. Попова, Р. Д. Банцури, Е. Л. Карпачевской, С. И. Юрченко, Ю. И. Черского и др.

Теоретическое исследование встречающихся в приложениях случаев уравнений (21) и (22) предпринято Ю. И. Черским (1963, 1965 гг.). В частности, в уравнении первого рода (21) предполагается, что функция $k(x)$ принадлежит $L_2(-\infty, \infty)$, а ее интеграл Фурье $K(x)$ таков, что произведение $K(x) \sqrt{x^2 + 1}$ удовлетворяет условию Гельдера на сомкнутой оси, отлично от нуля и имеет нулевой индекс. Правая часть $f(x)$ задана в $L_2(0, \infty)$, а решение φ ищется в некотором пространстве обобщенных функций. Наряду с получением точного решения указан эффективный способ построения приближенного решения $\tilde{\varphi}$ — обобщенной функции, настолько близкой к точному решению φ , чтобы разность $\varphi - \tilde{\varphi}$ оказалась регулярной обобщенной функцией из $L_2(0, \infty)$. Оценена средняя квадратическая погрешность.

При других предположениях относительно ядерной функции $k(x)$, когда ее интеграл Фурье при больших $|x|$ имеет вид

$$K(x) = \frac{1}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad n - \text{целое число, } n > 0,$$

уравнение первого рода изучалось Ф. Д. Гаховым и В. И. Смагиной (1962 г.). Там же они впервые исследовали уравнения (15) — (17) в исключительном случае, когда вместо условий (20) у функций $1 - K(x)$, $1 - K_1(x)$ и $1 - K_2(x)$ допускаются нули целых порядков в конечном числе точек. Ими рассмотрены также соответствующие уравнения первого рода. В. Б. Дыбин изучил (1966 г.) те же исключительные случаи указанных уравнений, но в более широких пространствах обобщенных функций.

Уравнения типа свертки в пространствах обобщенных функций изучали также О. С. Парасюк, М. И. Хайкин, Н. Г. Чеботарев и другие.

Отметим еще цикл работ, в которых уравнения типа свертки изучались в случаях, когда ядерные функции предполагались имеющими различный экспоненциальный рост или убывание. Эти уравнения преобразованием Фурье приводятся к задаче сопряжения на контуре, состоящем из параллельных прямых. Вслед за работами Ф. Д. Гахова и Ю. И. Черского (1956, 1958 гг.) в этом направлении получили результаты А. А. Говорухина, Р. Х. Зарипов, Э. И. Зверович и Г. С. Литвинчук, В. И. Смагина, С. В. Яновский.

Значительные успехи были достигнуты советскими математиками при изучении систем уравнений типа свертки.

Рассматривая (15) как запись в векторно-матричной символике, получим систему

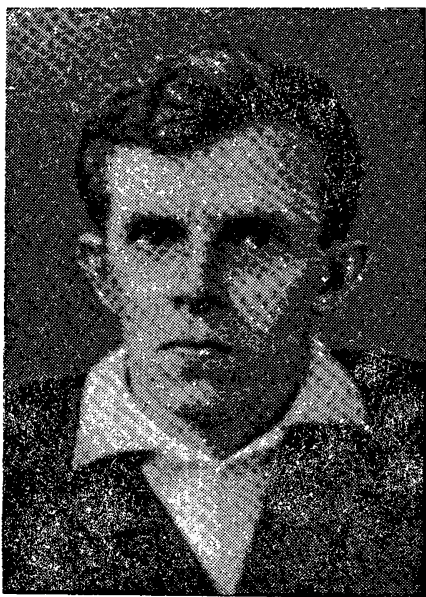
$$\varphi_p(x) - \sum_{q=1}^n \int_0^{\infty} k_{pq}(x-t) \varphi_q(t) dt = f_p(x), \quad x > 0, \quad p = 1, 2, \dots, n. \quad (23)$$

Эта система в результате преобразования по Фурье приводится к задаче сопряжения с неизвестными n парами функции. Р. Х. Зарипов распространил (1957 г.) основные хорошо известные результаты, относящиеся к задаче сопряжения для систем n пар функций, на систему (23), а также на системы, соответствующие уравнениям (16) и (17). Используя теорию функций от матриц и функционально-коммутативных матриц, Р. Х. Зарипов нашел ряд случаев, при которых системы уравнений типа свертки решаются в квадратурах.

Полная теория системы интегральных уравнений (23) при предположениях $k_{pq}(x) \in L(-\infty, \infty)$, $\det [I - K(x)] \neq 0$, $-\infty < x < \infty$, построена И. Ц. Гохбергом и М. Г. Крейном (1958 г.). Им удалось установить существование левой стандартной факторизации матрицы $[I - K(x)]^{-1}$.

Основываясь на этом результате, И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн подняли теорию системы (23) до уровня, на котором находится исследование скалярного случая (15) в работе М. Г. Крейна (1958 г.). Существенно новым результатом является теорема об устойчивой системе частных индексов.

Системам уравнений типа свертки посвящены также работы И. Ц. Гохберга, И. А. Фельдмана, И. С. Чеботару, Н. Н. Юхановна. Приближенное решение указанных систем методом усечения изучено



И. Б. Симоненко.

в работах И. Ц. Гохберга и И. А. Фельдмана (1965 г.), И. С. Чеботару (1967 г.).

Много работ посвящено исследованию уравнений типа свертки более общего вида или более сложной природы. Так, интегро-дифференциальные уравнения более общего, чем (22), вида изучены И. М. Рапопортом и А. А. Говорухиной. Уравнения, в которых наряду с разностными ядрами содержатся ядра, зависящие от суммы, рассматривались Ф. Д. Берковичем и Н. Н. Юхановым. Ими изучались также уравнения, в которых кроме искомой функции $\varphi(x)$ содержится комплексно сопряженная $\overline{\varphi(x)}$. Такие уравнения в результате преобразования по Фурье приводятся к некоторым обобщениям задачи сопряжения.

Л. Г. Михайлов подробно исследовал (1966 г.) интегральные уравнения с однородным ядром степени -1 , непосредственно сводящиеся к уравнениям с ядрами, зависящими от разности аргументов. Л. С. Раковщик построил (1961 г.) теорию интегральных уравнений с «почти разностными» ядрами вида $k(x, x - t)$.

И. Б. Симоненко рассмотрел (1959 г.) уравнение

$$L_j \varphi(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^M k_{jm}(x-t) L_{jm} \varphi(t) dt = f(x), \quad (24)$$

$$x \in (a_j, a_{j+1}), \quad j = 1, \dots, n,$$

где $-\infty = a_0 < a_1 < \dots < a_n < a_{n+1} = +\infty$; L_j и L_{jm} — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами; k_{jm} — заданные функции, принадлежащие $L(-\infty, \infty)$, $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$; $\varphi(x)$ — искомая функция, принадлежащая $L_2(-\infty, \infty)$ вместе со всеми входящими в (24) производными. Уравнение (24), а также транспонированное ему уравнение Симоненко приводят к краевой задаче, более общей, чем задача сопряжения. В случае, когда интегралы Фурье ядерных функций являются рациональными функциями, строится решение в замкнутой форме. Уравнения аналогичного характера исследовал также Л. С. Раковщик.

Частным случаем уравнения (24) является уравнение с конечными пределами интегрирования

$$\int_0^1 k(x-t) \varphi(t) dt = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (25)$$

которое всесторонне исследовано в трудах многих ученых.

Теория многомерных интегральных уравнений с ядрами, зависящими от разности аргументов, к настоящему времени разработана менее полно. Л. С. Гольденштейн и И. Ц. Гохберг изучили (1960 г.) уравнение в полупространстве n -мерного пространства. При $n = 2$ это уравнение имеет вид

$$\varphi(x_1, x_2) - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty k(x_1 - t_1, x_2 - t_2) \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = f(x_1, x_2), \quad (26)$$

$$0 < x_1 < \infty, \quad -\infty < x_2 < \infty.$$

Применяя двумерное преобразование Фурье, уравнение (26) можно привести к задаче сопряжения, все функции которой будут зависеть от параметра x_2 . Л. С. Гольденштейн и И. Ц. Гохберг показали, в частности, что в нормальном случае ($1 - K(x_1, x_2) \neq 0$) индекс уравнения (26) равен нулю.

Значительно более важным с точки зрения приложений и принципиально более трудным для исследования является уравнение типа свертки на четвертьплоскости

$$\lambda \varphi(x_1, x_2) - \int_0^\infty \int_0^\infty k(x_1 - t_1, x_2 - t_2) \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = f(x_1, x_2), \quad (27)$$

$$0 < x_1, \quad x_2 < \infty.$$

Преобразованием Фурье это уравнение приводится к двумерной задаче сопряжения

$$[\lambda - K(x_1, x_2)] \Phi^{++}(x_1, x_2) = F^{++}(x_1, x_2) + \Phi^{+-} + \Phi^{-+} + \Phi^{--}. \quad (28)$$

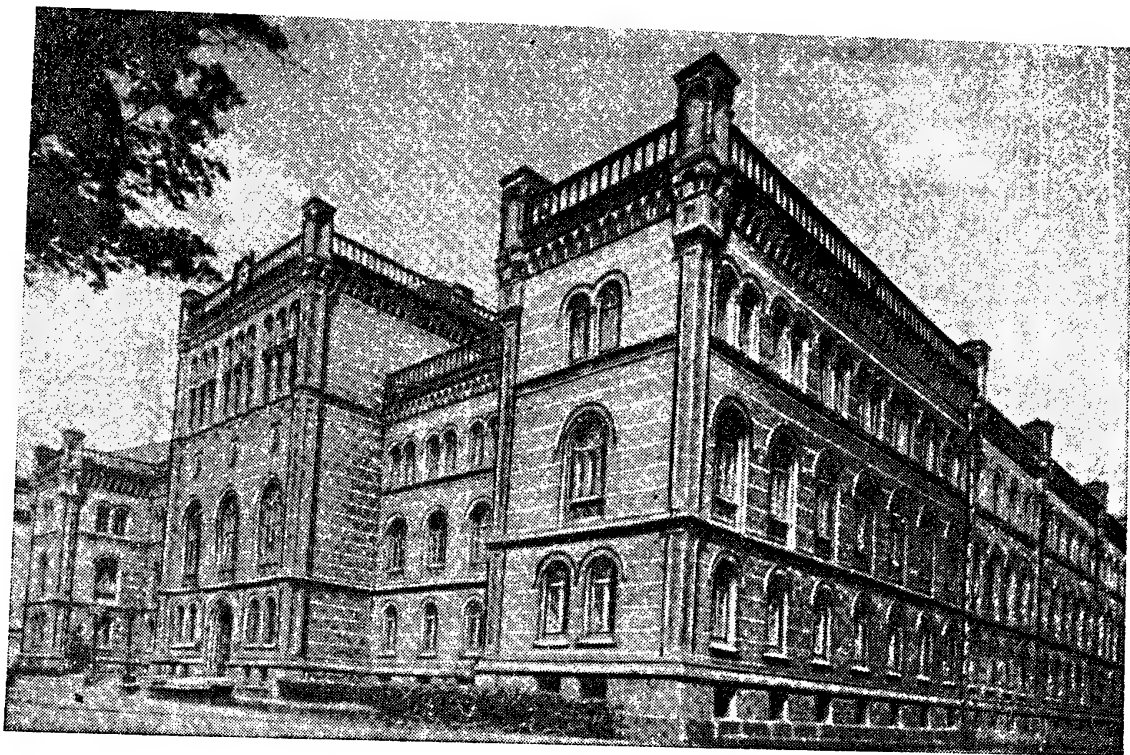
Частные случаи задачи (28) изучены В. А. Какичевым и Н. И. Морару. Теоремы общего характера для уравнений вида (27) недавно получены И. Б. Симоненко. Интересный метод приближенного решения уравнения типа свертки на плоской выпуклой области с достаточно гладкой границей указан в работе В. М. Александрова (1964 г.).

Параллельно с теорией уравнений типа свертки развивалась теория их дискретных аналогов — бесконечных линейных алгебраических систем с разностными индексами. Такие системы рассмотрены в работах С. В. Абдыкалыкова, Ф. Д. Берковича, Л. С. Гольденштейна, И. Ц. Гохберга, М. Г. Крейна, И. М. Рапопорта, В. С. Рогожина, Я. Н. Фельда, И. Х. Хайруллина, В. Г. Чебана, И. С. Чеботару, Ю. И. Черского и др.

Своеобразный класс интегральных уравнений составляют уравнения со степенными и логарифмическими ядрами. Примером может служить уравнение

$$a(x) \int_0^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^\alpha} + b(x) \int_x^1 \frac{\varphi(t) dt}{(t-x)^\alpha} = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (29)$$

которое находит приложения в теории краевых задач для уравнений в частных производных смешанного типа. Впервые уравнение (29)



Латвийский государственный университет им. Петра Стучки.

решил К. Д. Сакалюк (1960 г.) при предположении, что заданные функции $a(x)$, $b(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют условию Гельдера. Решение ищется в классе функций вида

$$\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{(x-x^2)^{1-\alpha-\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0,$$

где $\psi(x)$ удовлетворяет условию Гельдера на отрезке $[0, 1]$. Метод решения уравнения (29) аналогичен методу решения характеристического интегрального уравнения с ядром Коши. Сакалюк своим методом исследовал сопряженное с (29) уравнение, а также более общие уравнения, в частности, он решил уравнение вида (29) на разомкнутом гладком контуре, лежащем в комплексной плоскости. Дальнейшее развитие теории уравнения (29) получила в работах С. Г. Самко, который рассмотрел это уравнение в пространстве $L_p(0, 1)$ с весом и существенно ослабил ограничения на заданные функции. Ф. В. Чумаков дал (1966 г.) простой способ решения уравнения, сопряженного с уравнением (29), а также построил теорию Нетера для уравнения, отличающегося от (29) наличием интегрального оператора с достаточно гладким ядром.

Близким по характеру оказалось уравнение

$$a(x) \int_0^x \varphi(t) dt + b(x) \int_0^1 \varphi(t) \ln|x-t| dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (30)$$

Это и некоторые другие уравнения с логарифмическими ядрами решены Ф. Д. Гаховым. В его работах дается подробный анализ метода решения уравнений вида (29), (30) и указаны границы его применимости.

4

Некоторые другие классы интегральных уравнений

Рассмотрим исследования, относящиеся к некоторым классам нелинейных интегральных уравнений.

Разработка теорий таких уравнений была начата А. М. Ляпуновым (1906 г.) и Э. Шмидтом (1908 г.). В известных работах Ляпунова о фигурах равновесия вращающейся жидкости метод последовательных приближений применен к довольно сложным нелинейным интегральным уравнениям и исследован вопрос ветвления решения.

П. С. Урысоном изучен (1922 г.) спектр собственных значений интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s, \varphi(s)) ds,$$

допускающих положительные собственные функции.

Аналитические методы исследований нелинейных уравнений были развиты в работах А. И. Некрасова (1922 г.), Н. Н. Назарова (1937 г.) и их последователей. Некрасов разработал общую теорию уравнения типа Гаммерштейна. Его исследование выполнено раньше, чем соответствующее исследование Гаммерштейна (1930 г.). Основным методом, который применяет Некрасов в указанных исследованиях, — это разложение по малому параметру и установление сходимости соответствующего разложения методом мажорант. В своих исследованиях Назаров изучает уравнения типа Гаммерштейна, а также более общие уравнения, пользуясь разложением по малому параметру. Ему удалось указать различные условия, при которых нелинейные уравнения имеют определенное количество малых решений, представимых рядами. Работы Н. Н. Назарова стимулировали ряд исследований. К. Т. Ахмедов для одного класса нелинейных интегральных уравнений указал (1951 г.) условия существования единственного продолжения решения и исследовал случай ветвления. Аналогичные вопросы были рассмотрены в работах А. Ш. Габиб-заде, С. Насибова,



М. Х. Орлов.

М. Т. Адонца, А. П. Махмудова, Г. Наджафова, В. А. Шелкунова и других. А. И. Гусейнов совместно с Я. Д. Мамедовым исследовали положительное решение нелинейных интегральных уравнений типа Урысона.

Большое значение в теории нелинейных интегральных уравнений приобрели методы нелинейного функционального анализа. Топологические методы этого анализа были развиты Биркгофом и Келлоггом, Шаудером, Лерэ, А. Н. Тихоновым, Л. А. Люстерником и Л. Г. Шнирельманом, В. В. Немыцким, М. А. Красносельским и другими, вариационные методы — Гаммерштейном, Голомбом, Лихтенштейном, Л. А. Люстерником, М. М. Вайнбергом и др. М. Г. Крейн и М. А. Рутман предложили метод, основанный на применении банаховых пространств с конусом. Большую роль в популяризации проблематики нелинейных интегральных уравнений в Советском Союзе сыграли работы В. В. Немыцкого, который с помощью принципа неподвижной точки (принцип Шаудера и принцип сжатых отображений) установил ряд теорем существования и единственности для некоторых классов нелинейных интегральных уравнений. Эти работы явились отправным пунктом для исследования задачи существования и единственности других классов уравнений (В. М. Дубровский, Н. С. Смирнов, А. И. Гусейнов и др.). Работа А. И. Гусейнова (1947 г.), в которой изучены нелинейные сингулярные интегральные уравнения, положила начало многочисленным работам в этом направлении, подавляющее большинство которых выполнено в Азербайджане. В этих работах (А. И. Гусейнов, А. А. Бабаев, Х. Ш. Мухтаров, А. М. Абасов, А. Абдинова, С. Иманова, В. Сапаев и др.) изучены линейные и нелинейные сингулярные операторы в различных функциональных классах и установлены теоремы существования и единственности для ряда классов нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Исследованию некоторых классов нелинейных сингулярных интегральных уравнений посвящены также работы В. К. Наталевица (1952 г.), Б. И. Гехта (1955 г.), В. Ф. Кропачева (1955 г.) и других.

Теория интегральных уравнений с использованием понятий функции области и интеграла Радона была построена Н. М. Гюнтером (1932 г.). В основном им было изучено уравнение с ядром, зависящим от точки и множества евклидова пространства. Обобщение и развитие этих исследований даны в работах В. М. Дубровского (1940 г.).

Изучались интегральные уравнения Фредгольма с ядром $K(x, y; \lambda)$, аналитически зависящим от параметра λ . Работа Я. Д. Тамаркина, послужившая началом этих исследований, была опубликована в 1927 г. В ней изучены свойства резольвенты ядра $K(x, y; \lambda)$. Обобщение этого исследования в смысле ослаблений ограничений, наложенных на ядро $K(x, y; \lambda)$, дано Д. Ф. Харазовым (1953 г.). Собственные значения ядра, линейно зависящего от параметра, изучил З. И. Халилов (1946 г.), случай полиномиально зависящего от параметра — Д. Ф. Харазов (1949 г.) и Б. М. Гагаев (1952 г.). Харазов изучил (1953 г.) также спектральную теорию для ядер вида $K(x, y; \lambda) = \lambda K_1(x, y) + \lambda^2 K_2(x, y)$. А. И. Гусейнов исследовал положительные собственные значения и

собственные функции для линейных и нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна, когда ядро линейно зависит от параметра.

Вопросы приближенных методов решения интегральных уравнений и приложений теории этих уравнений в различных задачах рассмотрены в работах (1931—1935 гг.) М. Х. Орлова.

Сингулярным интегральным уравнениям с фиксированными особенностями посвящены работы А. Р. Хволеса (1958 г.), Т. А. Эбаноидзе (1959—1961 гг.). Л. Г. Михайлов исследовал (1959—1963 гг.) один класс интегральных уравнений с фиксированными и подвижными особенностями.

Литература к главам

К главе I. Теория аналитических функций

- А й з е н б е р г Л. А. Интегральное представление функций, голоморфных в выпуклых областях пространства C^n .— ДАН СССР, 1963, т. 151, № 6, стр. 1247—1249.
- А х и е з е р Н. И. Лекции по теории аппроксимации. Изд. 2-е. «Наука», М., 1965, 407 с.
- А х и е з е р Н. И., К р е й н М. Г. О некоторых вопросах теории моментов. ГОНТИ УССР, Харьков, 1938, 254 с.
- Б а в р и н И. И. Интегральные представления голоморфных функций.— Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1966, т. 166, вып. 10, стр. 3—47.
- Б а в р и н И. И. Интегральные представления голоморфных функций многих комплексных переменных.— ДАН СССР, 1966, т. 169, № 3, стр. 495—498.
- Б а в р и н И. И. К интегральным представлениям голоморфных функций.— Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1967, т. 188, вып. 11, стр. 3—28.
- Б а в р и н И. И. К оценкам в теории регулярных функций многих комплексных переменных.— ДАН СССР, 1965, т. 163, № 4, стр. 791—794.
- Б а в р и н И. И. О классах регулярных функций многих комплексных переменных.— ДАН СССР, 1967, т. 174, № 6, стр. 1247—1250.
- Б а в р и н И. И. О коэффициентах одного класса аналитических функций двух комплексных переменных.— ДАН СССР, 1961, т. 137, № 3, стр. 495—498.
- Б а в р и н И. И. О некоторых классах регулярных функций многих комплексных переменных.— ДАН СССР, 1965, т. 163, № 6, стр. 1303—1306.
- Б а в р и н И. И. Общие интегральные представления голоморфных функций.— ДАН СССР, 1967, т. 172, № 6, стр. 1251—1253.
- Б е р м а н т А. Ф., М а р к у ш е в и ч А. И. Теория функций комплексного переменного.— В кн.: Математика в СССР за 30 лет. 1917—1947. ГИТТЛ, М.— Л., 1948, стр. 319—414.
- Б е р н ш т е й н С. Н. Конструктивная теория функций.— В кн.: Б е р н ш т е й н С. Н. Собр. соч. Т. 1—2. Изд-во АН СССР, М., 1952—1954.
- Б е р н ш т е й н С. Н. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. Ч. I. ОНТИ, М.— Л., 1937, 203 с.
- Б о г о л ю б о в Н. Н., В л а д и м и р о в В. С. Об аналитическом продолжении обобщенных функций.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1958, т. 22, № 1, стр. 15—48.
- Б о г о л ю б о в Н. Н., В л а д и м и р о в В. С. Одна теорема об аналитическом продолжении обобщенных функций.— Научн. докл. высшей школы, 1958, № 3, стр. 26—35; 1959, № 2, стр. 179.
- Б о г о л ю б о в Н. Н., М е д в е д е в Б. В., П о л и в а н о в М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений. Физматгиз, М., 1958, 203 с.
- В л а д и м и р о в В. С. Задачи линейного сопряжения голоморфных функций многих комплексных переменных.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1965, т. 29, № 4, стр. 807—834.

- В л а д и м и р о в В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. «Наука», М., 1964, 411 с.
- В л а д и м и р о в В. С. Об определении области аналитичности.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1959, т. 23, № 2, стр. 275—294.
- В о л к о в ы с к и й Л. И. Исследования по проблеме типа односвязной римановой поверхности.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1950, т. 34, 172 с.
- В о л к о в ы с к и й Л. И. Римановы поверхности.— В кн.: Математика в СССР за 40 лет. 1917—1957. Т. 1. Физматгиз, М., 1959, стр. 472—481.
- Г е л ь ф о н д А. О. Исчисление конечных разностей. Изд. 3-е. «Наука», М., 1967, 375 с.
- Г е л ь ф о н д А. О. Трансцендентные и алгебраические числа. Гостехиздат, М., 1952, 224 с.
- Г е р о н и м у с Я. Л. Теория ортогональных многочленов. Обзор достижений отечественной математики. Гостехиздат, М., 1950, 164 с.
- Г е ч е Ф. И. Об одном классе целых функций многих переменных. Укр. мат. журн., 1966, т. 18, № 3, стр. 13—27.
- Г и н д и к и н С. Г. Анализ в однородных областях.— Усп. мат. наук, 1964, т. 19, вып. 4 (118), стр. 3—92.
- Г и н д и к и н С. Г. Преобразование Бореля и индикатор целых функций от нескольких переменных.— Усп. мат. наук, 1964, т. 19, вып. 2 (116), стр. 202—205.
- Г о л у з и н Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Гостехиздат, М., 1952, 540 с.
- Г о л ь д б е р г А. А. Некоторые вопросы теории распределения значений.— В кн.: В и т т и х Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. Физматгиз, М., 1960, стр. 263—300.
- Г о л ь д б е р г А. А., О с т р о в с к и й И. В. Новые исследования о росте и распределении значений целых и мероморфных функций рода нуль.— Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 4 (100), стр. 51—62.
- Г о н ч а р А. А. Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций.— Труды Международного конгресса математиков. Тезисы докладов. М., 1966, стр. 142.
- Г о н ч а р А. А., М е р г о л ь я н С. Н. О равномерном приближении аналитическими и гармоническими функциями.— В кн.: Современные проблемы теории аналитических функций. «Наука», М., 1966, стр. 94—101.
- Г о н ч а р о в В. Л. Интерполяционные процессы и целые функции.— Усп. мат. наук, 1937, вып. 3, стр. 113—143.
- Г о н ч а р о в В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. Гостехиздат, М., 1954, 328 с.
- Д ж р б а ш я н М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. «Наука», М., 1966, 671 с.
- Д ж р б а ш я н М. М. К теории некоторых классов целых функций многих переменных.— Изв. АН АрмССР. Сер. физ-мат., ест. и техн. наук, 1955, т. 8, № 4, стр. 1—23.
- Д ж р б а ш я н М. М. Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области.— Мат. сб., 1955, т. 36 (78), вып. 3, стр. 363—440.
- Д ж р б а ш я н М. М. Об интегральном представлении и разложении в обобщенный ряд Тейлора целых функций многих комплексных переменных.— Мат. сб., 1957, т. 41 (83), вып. 3, стр. 257—276.
- Е в г р а ф о в М. А. Аналитические функции. «Наука», М., 1965, 423 с.
- Е в г р а ф о в М. А. Асимптотические оценки и целые функции. Изд. 2-е. Физматгиз, М., 1962, 200 с.
- Е в г р а ф о в М. А. Интерполяционная задача Абеля — Гончарова. Гостехиздат, М., 1954, 126 с.
- Е в г р а ф о в М. А. Интерполяция целых функций.— В кн.: Математика в СССР за 40 лет. 1917—1957. Т. 1. Физматгиз, М., 1959, стр. 398—407.
- И б р а г и м о в И. И. Экстремальные свойства целых функций конечной степени. Изд-во АН АзССР, Баку, 1962, 316 с.

- И в а н о в В. К. Об индикатрисе роста целой функции двух комплексных переменных.— Изв. вузов. Математика, 1961, № 2, стр. 24—31.
- И в а н о в В. К. Об одной краевой задаче, связанной с аналитическими функциями двух комплексных переменных.— Изв. вузов. Математика, 1960, № 6, стр. 103—113.
- И в а н о в В. К. Связь между ростом целой функции многих переменных и распределением особенностей ассоциированной с ней функции. Мат. сб., 1957, т. 43 (85), вып. 3, стр. 367—378.
- И в а н о в В. К. Характеристика роста целой функции двух переменных и ее приложение к суммированию двойных степенных рядов.— Мат. сб., 1959, т. 47 (89), вып. 1, стр. 3—16.
- Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. Сб. статей. Под ред. А. И. Маркушевича. Физматгиз, М., 1960, 544 с.
- К е л д ы ш М. В. О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле.— Усп. мат. наук, 1940, вып. 8, стр. 171—231.
- К о л м о г о р о в А. Н., Т и х о м и р о в В. М. ϵ -энтропия и ϵ -емкость множеств в функциональных пространствах.— Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 2 (86), стр. 3—86.
- Л е в и н Б. Я. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, М., 1956, 632 с.
- Л е в и н Б. Я. Распределение корней целых функций.— Труды Третьего Всесоюз. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.), 1958, т. 3, стр. 208—218.
- Л е о н т ь е в А. Ф. Ряды полиномов Дирихле и их обобщения.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1951, т. 39, 214 с.
- Л и н н и к Ю. В. Разложения вероятностных законов. Изд-во ЛГУ, Л., 1960, 263 с.
- Л и н н и к Ю. В. Статистические задачи с мешающими параметрами. «Наука», М., 1966, 252 с.
- Л у к а н к и н Г. Л. Об интегралах типа Темлякова.— Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1967, т. 188, вып. 11, стр. 81—88.
- Л у к а н к и н Г. Л. О некоторых краевых задачах теории аналитических функций двух комплексных переменных.— Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1964, т. 137, вып. 8, стр. 83—88.
- Л у к а н к и н Г. Л. О поведении интеграла типа Темлякова I рода в точках остова области D типа A .— ДАН СССР, 1965, т. 161, № 1, стр. 39—42.
- Л у к а н к и н Г. Л. О поведении нормальной производной интеграла Темлякова.— Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1962, т. 110, вып. 7, стр. 83—124.
- Л у к а н к и н Г. Л., Б о г а н о в В. И. Интеграл типа Темлякова и его предельные значения.— ДАН СССР, 1967, т. 176, № 1, стр. 16—19.
- М а е р г о й з Л. С. К вопросу о характеристике роста целых функций многих переменных.— Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1964, т. 137, вып. 8, стр. 133—149.
- М а е р г о й з Л. С. О различных определениях типов целых функций многих переменных.— Мат. зап. Уральск. ун-та, 1964, т. 4, № 4, стр. 69—79.
- М а е р г о й з Л. С. Об одном свойстве индикатрисы роста целой функции многих переменных.— Изв. вузов. Математика, 1964, № 6, стр. 104—115.
- М а р к у ш е в и ч А. И. Теория аналитических функций. Гостехиздат, М.—Л., 1950, 703 с.
- М е р г е л ь я н С. Н. Весовые приближения многочленами.— Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 5 (71), стр. 107—152.
- М е р г е л ь я н С. Н. Некоторые вопросы конструктивной теории функций.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1951, т. 37, 92 с.
- М е р г е л ь я н С. Н. О некоторых результатах в теории равномерных и наилучших приближений полиномами и рациональными функциями.— В кн.: У о л ш Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. ИЛ, М., 1961, стр. 461—499 (Приложение).
- М е р г е л ь я н С. Н. О полноте систем аналитических функций.— Усп. мат. наук, 1953, т. 8, вып. 4(56), стр. 3—63.

- М е р г е л я н С. Н. Равномерные приближения функций комплексного переменного.— Усп. мат. наук, 1952, т. 7, вып. 2 (48), стр. 31-122.
- Н е в а н л и н н а Р. Однозначные аналитические функции. Гостехиздат, М.— Л., 1941, 388 с.
- О л ь х и н В. Я. Краевые задачи для уравнений с особыми плоскостями.— Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1962, т. 110, вып. 7, стр. 183—192.
- П я т е ц к и й - Ш а п и р о И. И. Геометрия классических областей и теория автоморфных функций. Физматгиз, М., 1961, 191 с.
- Р о н к и н Л. И. О сопряженных порядках и типах целых функций многих переменных.— Укр. мат. журн., 1964, т. 16, № 3, стр. 408—413.
- Р о н к и н Л. И. Характеристики роста целой функции. — В кн.: Ф у к с Б. А. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. Физматгиз, М., 1962, стр. 384—405.
- С м и р н о в В. И., Л е б е д е в Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. «Наука», М.,— Л., 1964, 438 с.
- Современные проблемы теории аналитических функций. (Международная конференция по теории аналитических функций, Ереван, 1965 г.) «Наука», М., 1966, 362 с.
- С т а в с к и й М. Ш. Связь между ростом целой функции нескольких комплексных переменных и множеством особых точек ассоциированной с ней функции.— Изв. вузов. Математика, 1959, № 2, стр. 227—232.
- С т р е л и ц Ш. И. О максимуме модуля аналитической функции многих переменных.— Мат. сб., 1962, т. 57 (99), вып. 3, стр. 282—296.
- С т р е л и ц Ш. И. Соотношения для производных в точках максимума модулей целой трансцендентной функции многих комплексных переменных.— ДАН СССР, 1962, т. 145, № 4, стр. 737—740.
- Т е м л я к о в А. А. Интегральное представление аналитических функций двух комплексных переменных.— Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1954, т. 21, вып. 2, стр. 7—22.
- Т е м л я к о в А. А. Интегральное представление функций двух комплексных переменных.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1957, т. 21, № 1, стр. 89—92.
- Т е м л я к о в А. А. Интегральные представления.— ДАН СССР, 1959, т. 129, № 5, стр. 986—988.
- Т е м л я к о в А. А. Интегральные представления.— Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1960, т. 96, вып. 6, стр. 3—14.
- Т е м л я к о в А. А. Интегральные представления для мероморфных функций.— ДАН СССР, 1962, т. 143, № 5, стр. 1057—1059.
- Т е м л я к о в А. А. Краевые задачи для уравнений с особыми плоскостями.— Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1959, т. 77, вып. 5, стр. 91—98.
- Т е м л я к о в А. А. Целые функции двух комплексных переменных.— Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1954, т. 20, вып. 3, стр. 7—16.
- Т у м а р к и н Г. Ц. Условия сходимости граничных значений аналитических функций и приближение на спрямляемых кривых.— В кн.: Современные проблемы теории аналитических функций. «Наука», М., 1966, стр. 283—295.
- Ф у к с Б. А. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. Физматгиз, М., 1962, 419 с.
- Ф у к с Б. А. Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных. Физматгиз, М., 1963, 427 с.
- Х е й м а н У. К. Мероморфные функции. «Мир», М., 1966, 287 с.
- Ч е б о т а р е в Н. Г. Собр. соч. Т. 2. Изд-во АН СССР, М., 1949, 419 с.
- Ч е б о т а р е в Н. Г., М е й м а н Н. Н. Проблема Рауса—Гурвица для полиномов и целых функций.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1949, т. 26, 331 с.
- Ш а г и н я н А. Л. О полноте семейств аналитических функций в комплексной области.— Сообщ. Ин-та мат. и мех. АН АрмССР, 1947, вып. 1, 59 с.
- Ш а г и н я н А. Л. Теория приближений в комплексной области. Ереван, 1960 (на арм. яз.).
- Ш м а т к о в А. А. О квазибиголоморфных отображениях.— Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1964, т. 137, вып. 8, стр. 185—192.
- Ш м а т к о в А. А. Об одном из классов квазиголоморфных отображений.— Изв. АН АрмССР, 1965, т. 18, № 2, стр. 26—31.

- Шматков А. А. Об одном классе квазибиголоморфных отображении.— Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1966, т. 166, вып. 10, стр. 157—169.
- Bogoliubov N. N., Vladimirov V. S. On some mathematical problems of quantum field theory.— Proceeding of the International Congress of Mathematicians (Edinburgh, 1958). Cambridge, Univ. Press, 1960, p. 19—32.
- Keldych M. Sur l'approximation en moyenne par polynômes des fonctions d'une variable complexe.— Mat. сб., 1945, т. 16 (58), вып. 1, стр. 1—20.
- Lavrentieff M. Sur les fonctions d'une variable complexe representables par des series de polynômes. Paris, 1936.
- Temlyakoff A. Ueber harmonische Funktionen von drei Veränderlichen mit einer meromorphen Zugehörigen Funktion.— Mat. сб., 1939, т. 5 (47), вып. 3, стр. 487—495.

**К главе II. Граничные проблемы, обобщения,
геометрические вопросы и приложения
теорий функций комплексного переменного**

- Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика. Гостехиздат, М.—Л., 1953, 736 с.
- Айзенберг Л. А. Интегральные представления функций, голоморфных в n -круговых областях.— Mat. сб., 1964, т. 65 (107), вып. 1, стр. 104—143.
- Аксентьев Л. А. Достаточные условия однолиственности решения обратной задачи теории фильтрации.— Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 4 (88), стр. 133—140.
- Аксентьев Л. А. Условия однолиственности решения основных обратных краевых задач.— Усп. мат. наук, 1960, т. 15, вып. 6 (96), стр. 119—124.
- Александров И. А., Гутлянский В. Я. Экстремальные задачи на классах аналитических функций, имеющих структурную формулу.— ДАН СССР, 1965, т. 165, № 5, стр. 983—986.
- Александров И. А., Гутлянский В. Я. Экстремальные свойства почти выпуклых функций.— Сиб. мат. журн., 1966, т. 7, № 1, стр. 3—22.
- Аленицын Ю. Е. О коэффициентах однолистных функций.— Mat. сб., 1944, т. 15 (57), вып. 2, стр. 132—138.
- Аленицын Ю. Е. Об однолистных функциях в многосвязных областях.— Mat. сб., 1956, т. 39 (84), вып. 3, стр. 315—336.
- Алпер С. Я. О приближении в среднем аналитических функций класса E_p .— В кн.: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1960, стр. 273—286.
- Алфорс Л., Берс Л. Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения. ИЛ, М., 1961, 177 с.
- Аравин В. И., Нумеров С. Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. Гостехиздат. М., 1953, 616 с.
- Ахизер Н. И. Курс теории функций. I. ДНТВ, Хрк.—К., 1933, 294 с.
- Ахизер Н. И. О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1945, т. 9, № 4, стр. 275—290.
- Бабаев А. А., Салаев В. В. Об одном аналоге теоремы Племелья — Привалова в случае негладких кривых и ее приложениях.— ДАН СССР, 1965, т. 161, № 2, стр. 267—269.
- Бабенко К. И. О сопряженных функциях.— ДАН СССР, 1948, т. 62, № 2, стр. 157—160.
- Базилевич И. Е. О теоремах искажения и коэффициентах однолистных функций.— Mat. сб., 1951, т. 28 (70), вып. 1, стр. 147—164.
- Бари Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций.— Труды Моск. мат. о-ва, 1956, т. 5, стр. 483—522.
- Белинский П. П. О мере площади при квазиконформном отображении.— ДАН СССР, 1958, т. 121, № 1, стр. 16—17.
- Белинский П. П. О непрерывности пространственных квазиконформных отображений и о теореме Лиувилля.— ДАН СССР, 1962, т. 147, № 5, стр. 1003—1004.

- Белинский П. П.** Поведение квазиконформного отображения в изолированной особой точке.— Наук. зап. Львівськ. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1954, т. 29, вып. 6 (1), стр. 58—70.
- Белинский П. П.** Решение экстремальных задач теории квазиконформных отображений вариационным методом.— Сиб. мат. журн., 1960, т. 1, № 3, стр. 303—330.
- Бицадзе А. В.** Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его применения.— ДАН СССР, 1953, т. 93, № 3, стр. 389—392.
- Боярский Б. В.** Анализ разрешимости граничных задач теории функций.— В кн.: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1961, стр. 57—79.
- Боярский Б. В.** Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами.— Мат. сб., 1957, т. 43 (85), вып. 4, стр. 451—503.
- Боярский Б. В., Векуа И. Н.** Доказательство жесткости кусочно-регулярных замкнутых выпуклых поверхностей неотрицательной кривизны.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1958, т. 22, № 2, стр. 165—176.
- Ведерников В. В.** Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. Гостройиздат. М., 1939, 248 с.
- Векуа И. Н.** Задача приведения к каноническому виду дифференциальных форм эллиптического типа и обобщенная система Коши — Римана.— ДАН СССР, 1955, т. 100, № 2, стр. 197—200.
- Векуа И. Н.** Новые методы решения эллиптических уравнений. Гостехиздат, М.—Л., 1948, 296 с.
- Векуа И. Н.** О некоторых условиях жесткости поверхностей положительной кривизны.— Чехословацк. мат. журн., 1956, т. 6 (81), № 2, стр. 143—160.
- Векуа И. Н.** Обобщенные аналитические функции. Физматгиз, М., 1959, 628 с.
- Векуа И. Н.** Об одной линейной граничной задаче Римана.— Труды Тбилисск. мат. ин-та, 1942, т. 11, стр. 109—139.
- Векуа И. Н.** Об условиях, обеспечивающих безмоментное напряженное состояние равновесия выпуклой оболочки.— Сообщ. АН ГрССР, 1958, т. 20, № 5, стр. 525—532.
- Векуа И. Н.** Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек.— Мат. сб., 1952, т. 31 (73), вып. 2, стр. 217—314.
- Векуа И. Н.** Теория обобщенных аналитических функций и некоторые ее применения в геометрии и механике.— Труды Третьего Всесоюзн. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.), 1958, т. 3, стр. 42—65.
- Векуа Н. П.** Общая граничная задача линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций с заданными смещениями.— Труды Тбилисск. ун-та, 1961, т. 84, стр. 23—34.
- Векуа Н. П.** Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. Гостехиздат. М., 1950, 252 с.
- Виноградов В. С.** Об ограниченности решений краевых задач для линейных эллиптических систем первого порядка на плоскости.— ДАН СССР, 1958, т. 121, № 3, стр. 399—402.
- Владимиров В. С.** Задача линейного сопряжения голоморфных функций многих комплексных переменных.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1965, т. 29, № 4, стр. 807—834.
- Волковскый Л. И.** Исследования по проблеме типа односвязной римановой поверхности.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1950, т. 34, 172 с.
- Волковскый Л. И.** Квазиконформные отображения. Изд-во Львовск. ун-та, Львов, 1954, 156 с.
- Волковскый Л. И.** Римановы поверхности.— В кн.: Математика в СССР за 40 лет. 1917—1957. Т. 1. Физматгиз. М., 1959, стр. 472—481.
- Вольперт А. И.** Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости.— Труды Моск. мат. о-ва, 1961, т. 10, стр. 41—87.

- В о с т р е ц о в Б. А. О существовании граничных значений и об интегральном представлении функций, аналитических в единичном круге. — ДАН СССР, 1949, т. 65, № 1, стр. 7—8.
- Г а в р и л о в В. И. О граничном поведении Q -квазиконформных отображений. — Сиб. мат. журн., 1961, т. 2, № 5, стр. 650—654.
- Г а г у а М. Б. О некотором применении кратных интегралов типа Коши. — В кн.: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1960, стр. 345—351.
- Г а н и н М. П. О некоторых обратных краевых задачах для уравнений эллиптического типа высшего порядка. — Изв. вузов. Математика, 1959, № 2 (9), стр. 59—68.
- Г а х о в Ф. Д. Краевая задача Римана и некоторые другие задачи, сводящиеся к ней. — В кн.: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1961, стр. 359—375.
- Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963, 639 с.
- Г а х о в Ф. Д. Линейные краевые задачи теории функций комплексного переменного. — Изв. Казанск. физ.-мат. о-ва. Сер. 3, 1938, т. 10, стр. 39—79.
- Г а х о в Ф. Д. О современных проблемах теории краевых задач аналитических функций и особых интегральных уравнений. — Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 6, стр. 786—798.
- Г а х о в Ф. Д. Об обратной краевой задаче для многосвязной области. — Уч. зап. Ростовск. пед. ин-та, 1955, вып. 3, стр. 19—27.
- Г а х о в Ф. Д. Об обратных краевых задачах. — ДАН СССР, 1952, т. 86, № 4, стр. 649—652.
- Г а х о в Ф. Д. Об обратных краевых задачах. — Уч. зап. Казанск. ун-та, 1953, т. 113, кн. 10, стр. 9—20.
- Г а х о в Ф. Д., К р и к у н о в Ю. М. Топологические методы теории функций комплексного переменного и их приложения к обратным краевым задачам. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1956, т. 20, № 2, стр. 206—240.
- Г а х о в Ф. Д., Х а с а б о в Э. Г. Краевая задача Гильберта для многосвязной области. — Изв. вузов. Математика, 1958, № 1 (2), стр. 12—23.
- Г е г е л и а Т. Г. Граничная задача Гильберта и сингулярные интегральные уравнения в случае пересекающихся контуров. — Сообщ. АН ГрССР, 1954, т. 15, № 2, стр. 69—76.
- Г е х т Б. И. Разрешимость нелинейных сингулярных интегральных уравнений методом итераций. — Уч. зап. Казанск. ун-та, 1956, т. 116, кн. 4, стр. 111—139.
- Г о в о р о в Н. В. О краевой задаче Римана с бесконечным индексом. — ДАН СССР, 1964, т. 154, № 6, стр. 1247—1249.
- Г о л у б е в В. В. Лекции по теории крыла. Гостехиздат, М.—Л., 1949, 480 с.
- Г о л у б е в В. В. Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции. Физматгиз, М., 1961, 455 с.
- Г о л у б е в В. В. Труды по аэродинамике. Гостехиздат, М.—Л., 1957, 979 с.
- Г о л у з и н Г. М. Внутренние задачи теории однолистных функций. — Усп. мат. наук, 1939, вып. 6, стр. 26—89.
- Г о л у з и н Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Изд. 2-е. «Наука», М., 1966, 628 с.
- Г о л у з и н Г. М. Некоторые вопросы теории однолистных функций. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1949, т. 27, 112 с.
- Г о л у з и н Г. М. Об одном методе вариаций в теории аналитических функций. — Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат., 1952, № 144, стр. 85—101.
- Г о л у з и н Г., К а н т о р о в и ч Л., К р ы л о в В., М е л е н т ь е в П., М у р а т о в М., С т е н и н Н. Конформное отображение односвязных и многосвязных областей. ОНТИ, М.—Л., 1937, 126 с.
- Г о л ь д б е р г А. А. К обратной задаче теории распределения значений мероморфных функций. — Укр. мат. журн., 1954, т. 6, № 4, стр. 385—397.
- Г о л ь д б е р г А. А. Об одном классе римановых поверхностей. — Мат. сб., 1959, т. 49 (91), вып. 4, стр. 447—458.
- Г о х б е р г И. Ц. Общая теорема о факторизации матриц-функций в нормированных кольцах и ее приложения. — ДАН СССР, 1962, т. 146, № 2, стр. 284—287.

- Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1948, 727 с.
- Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. Физматгиз, М., 1961, 496 с.
- Давыдов Н. А. Непрерывность интеграла типа Коши в замкнутой области.— ДАН СССР, 1949, т. 64, № 6, стр. 759—762.
- Данилюк И. И. Исследование пространственных осесимметричных краевых задач.— Сиб. мат. журн., 1963, т. 4, № 6, стр. 1271—1310.
- Данилюк И. И. Квазигармонические и квазианалитические функции на поверхностях.— Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 5 (71), стр. 95—101.
- Данилюк И. И. О задаче Гильберта с измеримыми коэффициентами.— Сиб. мат. журн., 1960, т. 1, № 2, стр. 171—197.
- Данилюк И. И. О задаче с наклонной производной.— Сиб. мат. журн., 1962, т. 3, № 1, стр. 17—55.
- Данилюк И. И. Об интегральном представлении решений некоторых эллиптических систем первого порядка на поверхностях с приложением к теории тонких оболочек.— ДАН СССР, 1956, т. 109, № 1, стр. 17—20.
- Данилюк И. И. Об общей эллиптической системе первого порядка и об автоморфных квазианалитических функциях на поверхностях.— ДАН СССР, 1956, т. 109, № 2, стр. 253—255.
- Данилюк И. И. Об отображениях, соответствующих решениям уравнений эллиптического типа.— ДАН СССР, 1958, т. 120, № 1, стр. 17—20.
- Данилюк И. И. Обобщенная формула Коши для осесимметрических полей.— Сиб. мат. журн., 1963, т. 4, № 1, стр. 48—85.
- Дейч М. Е., Самойлович Г. С. Основы аэродинамики осевых турбомашин. Машгиз, М., 1959, 428 с.
- Демаховська Р. Й. Про оцінку середніх модулів в теорії спеціальних класів аналітичних функцій.— ДАН УРСР, 1965, № 10, стор. 1266—1269.
- Джваршейшвили А. Г. Сингулярный интеграл и его некоторые применения.— Труды Тбилисск. мат. ин-та, 1966, т. 31, стр. 72—91.
- Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. «Наука», М., 1966, 671 с.
- Дундученко Л. Е., Касьянюк С. А. Почти выпуклые функции.— Изв. Киевск. высш. арт. инж. училища, 1960, вып. 1, стр. 24—72.
- Жуковский М. И. Расчет дозвукового обтекания решеток профилей и построение решеток по заданному распределению скоростей. Машгиз, М.—Л., 1955, 40 с.
- Жуковский Н. Е. Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на известной линии тока.— В кн.: Жуковский Н. Е. Собр. соч., Т. 2. Гидродинамика. Гостехиздат, М.—Л., 1949, стр. 489—626.
- Жуковский Н. Е. Лекции по гидродинамике.— Там же, стр. 316—488.
- Жуковский Н. Е. Просачивание воды через плотины.— В кн.: Жуковский Н. Е. Собр. соч. Т. 7. Гостехиздат. М.—Л., 1950, стр. 297—332.
- Замарин Е. А. Расчет движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями. Изд. отд. ИВХ, Ташкент, 1928, 102 с.
- Зверович Э. И., Литвинчук Г. С. Односторонние краевые задачи теории аналитических функций.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, т. 28, № 5, стр. 1003—1036.
- Зморович В. А. О некоторых вариационных задачах теории однолистных функций.— Укр. мат. журн., 1952, т. 4, № 3, стр. 276—297.
- Зморович В. А. Об обобщенных аналитических функциях.— Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, т. 19, стр. 3—65.
- Зморович В. А. Об одном классе экстремальных задач, связанных с регулярными функциями с положительной вещественной частью в круге $|z| < 1$.— Укр. мат. журн., 1965, т. 17, № 4, стр. 12—21.
- Зморович В. А. Про узагальнення інтегральної формули Шварца на зв'язні кругові області.— ДАН УРСР, 1958, № 5, стор. 489—492.

- З о р и ч В. А. Теорема М. А. Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства.— Мат. сб., 1967, т. 74 (116), вып. 3, стр. 417—433.
- Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. Сб. статей. Под ред. А. И. Маркушевича. Физматгиз, М., 1961, 514 с.
- К в е с е л а в а Д. А. Некоторые граничные задачи теории функций.— Труды Тбилисс. мат. ин-та, 1948, т. 16, стр. 39—80.
- К е л д ы ш М. В. Конформные отображения многосвязных областей на канонические области.— Усп. мат. наук, 1939, вып. 6, стр. 90—119.
- К е л д ы ш М. В. Функции комплексного переменного.— В кн.: Математика, ее содержание, методы и значение. Т. 2. Изд-во АН СССР, М., 1956, стр. 171—222.
- К е л д ы ш М. В., С е д о в Л. И. Приложения теории функций комплексного переменного к гидродинамике и аэродинамике (обзор некоторых работ московской школы). «Наука», М., 1964, 45 с.
- К о з л о в В. С. Гидромеханический расчет флютбетов. Госэнергоиздат, М.—Л., 1941, 278 с.
- К о л о с о в Г. В. Применение комплексной переменной к теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1935, 224 с.
- К о п ы л о в А. П. О богатстве класса квазиконформных отображений областей в трехмерном пространстве Эвклида.— ДАН СССР, 1967, т. 172, № 3, стр. 527—528.
- К о р и ц к и й Г. В. О кривизне линий уровня и их ортогональных траекторий при конформных отображениях.— Мат. сб., 1955, т. 37 (79), вып. 1, стр. 103—116.
- К о ч и н Н. Е. Гидродинамическая теория решеток. ГТТИ, М.—Л., 1949, 103 с.
- К о ч и н Н. Е. Собрание сочинений в двух томах. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1949.
- К р е й н М. Г. К теории целых функций экспоненциального типа.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1947, т. 11, № 3, стр. 309—326.
- К р у ш к а л ь С. Л. К теории экстремальных задач для квазиконформных отображений замкнутых римановых поверхностей.— ДАН СССР, 1966, т. 171, № 4, стр. 784—787.
- К р у ш к а л ь С. Л. Об отображениях, квазиконформных в среднем.— ДАН СССР, 1964, т. 157, № 3, стр. 517—519.
- К р ы л о в В. И. О функциях, регулярных в полуплоскости.— Мат. сб., 1939, т. 6 (48), стр. 95—138.
- К у д р я ш о в С. Н. Некоторые достаточные условия однолиственности решения обратной задачи теории фильтрации.— Изв. вузов. Математика, 1966, № 5 (54), стр. 88—99.
- К у з и к Г. А., С у в о р о в Г. Д. Расширенное понятие квазиконформности плоского отображения и линейные системы дифференциальных уравнений смешанного типа.— ДАН СССР, 1966, т. 168, № 2, стр. 280—283.
- К у ф а р е в П. П. Об одном методе исследования экстремальных задач теории однолистных функций.— ДАН СССР, 1956, т. 107, № 5, стр. 633—635.
- К у ф а р е в П. П. Об однопараметрических семействах аналитических функций.— Мат. сб., 1943, т. 13 (55), вып. 1, стр. 87—118.
- Л а в р е н т ь е в М. А. Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. Изд-во АН СССР, М., 1962, 136 с.
- Л а в р е н т ь е в М. А. К теории конформных отображений.— Труды Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1934, т. 5, стр. 159—245.
- Л а в р е н т ь е в М. А. К теории отображений трехмерных областей.— Сиб. мат. журн., 1964, т. 5, № 3, стр. 596—602.
- Л а в р е н т ь е в М. А. Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики. Гостехиздат, М.—Л., 1946, 159 с.
- Л а в р е н т ь е в М. А. Краевые задачи и квазиконформные отображения.— В кн.: Современные проблемы теории аналитических функций. «Наука», М., 1966, стр. 179—183.
- Л а в р е н т ь е в М. А. Кумулятивный заряд и принципы его работы.— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 4 (76), стр. 41—56.

- Лаврентьев М. А. О некоторых граничных задачах в теории однолистных функций.— Мат. сб., 1936, т. 1 (43), вып. 6, стр. 815—846.
- Лаврентьев М. А. О некоторых свойствах однолистных функций с приложением к теории струй.— Мат. сб., 1938, т. 4 (46), вып. 3, стр. 391—458.
- Лаврентьев М. А. Об одной задаче на склеивание.— Сиб. мат. журн., 1964, т. 5, № 3, стр. 603—607.
- Лаврентьев М. А. Об одном дифференциальном признаке гомеоморфных отображений трехмерных областей.— ДАН СССР, 1938, т. 20, № 4, стр. 241—242.
- Лаврентьев М. А. Об одном классе квазиконформных отображений.— Сб. трудов Ин-та математики АН УССР, 1948, вып. 9, стр. 7—54.
- Лаврентьев М. А. Об одном классе квазиконформных отображений и о газовых струях.— ДАН СССР, 1938, т. 20, № 5, стр. 343—346.
- Лаврентьев М. А. Об одном классе непрерывных отображений.— Мат. сб., 1935, т. 42, вып. 4, стр. 407—424.
- Лаврентьев М. А. Общая задача теории квазиконформных отображений плоских областей.— Мат. сб., 1947, т. 24 (63), вып. 2, стр. 285—320.
- Лаврентьев М. А. Основная теорема теории квазиконформных отображений плоских областей.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1948, т. 12, № 6, стр. 513—554.
- Лаврентьев М. А. Устойчивость в теореме Лиувилля.— ДАН СССР, 1954, т. 95, № 5, стр. 925—926.
- Лаврентьев М. А., Келдыш М. В., Маркушевич А. И., Седов Л. И., Лотов А. Б. Сборник статей по вопросам удара о поверхность воды. Изд. ЦАГИ, М.— Л., 1935, 45 с.
- Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Геометрические свойства решений нелинейных систем уравнений с частными производными.— ДАН СССР, 1957, т. 112, № 5, стр. 810—811.
- Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 2-е. Физматгиз, М., 1958, 678 с.
- Лаврентьев М. М. Об одной краевой задаче для гиперболической системы.— Мат. сб., 1956, т. 38 (80), вып. 4, стр. 451—464.
- Лебедев Н. А., Милин И. М. О коэффициентах некоторых классов аналитических функций.— Мат. сб., 1951, т. 28 (70), вып. 2, стр. 359—400.
- Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. Гостехиздат, М.— Л., 1947, 244 с.
- Литвинчук Г. С. Об одном типе особых функциональных уравнений и краевых задач со сдвигом для аналитических функций.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, т. 25, № 6, стр. 871—886.
- Литвинчук Г. С. Теория Нетера системы сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана и комплексно сопряженными неизвестными.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1967, т. 31, № 3, стр. 563—586.
- Литвинчук Г. С., Хасабов Э. Г. К теории сингулярных интегральных уравнений, подчиняющихся альтернативе Фредгольма.— ДАН СССР, 1961, т. 140, № 1, стр. 48—51.
- Литвинчук Г. С., Хасабов Э. Г. О краевой задаче Гильберта со сдвигом.— ДАН СССР, 1962, т. 142, № 2, стр. 274—277.
- Литвинчук Г. С., Хасабов Э. Г. Об индексе обобщенной краевой задачи Гильберта.— Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 6 (126), стр. 124—130.
- Литвинчук Г. С., Хасабов Э. Г. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений со сдвигом.— ДАН СССР, 1962, т. 145, № 4, стр. 731—734.
- Лозовик В. Г. О функционалах, определенных на некоторых классах аналитических функций.— Укр. мат. журн., 1963, т. 15, № 1, стр. 95—100.
- Лойцянский Л. Г. Аэродинамика пограничного слоя. Гостехиздат, М.— Л., 1941, 412 с.
- Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Гостехиздат, М.— Л., 1957, 784 с.

- Лопатинский Я. Б. Об одном обобщении понятия аналитической функции.— Укр. мат. журн., 1950, т. 2, № 2, стр. 56—73.
- Ляшко И. И. Решение фильтрационных задач методом суммарных представлений. Изд-во Киевск. ун-та, К., 1963, 172 с.
- Магнардзе Л. Г. Об одном обобщении теоремы И. И. Привалова и его применения к некоторым линейным граничным задачам теории функций и сингулярным интегральным уравнениям.— ДАН СССР, 1949, т. 68, № 4, стр. 657—660.
- Манджavidze Г. Ф. Приближенное решение граничных задач теории аналитических функций.— В кн.: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1960, стр. 365—370.
- Маркушевич А. И. Вклад Ю. В. Сохоцкого в общую теорию аналитических функций.— Ист.-мат. исслед., 1950, вып. 3, стр. 399—406.
- Маркушевич А. И. Некоторые вопросы теории граничных свойств аналитических функций.— Усп. мат. наук, 1949, т. 4, вып. 4 (32), стр. 3—18.
- Маркушевич А. И. О некоторых классах непрерывных отображений.— ДАН СССР, 1940, т. 28, № 2, стр. 301—304.
- Маркушевич А. И. О производных интеграла Пуассона.— Мат. сб., 1934, т. 41, вып. 5, стр. 659—668.
- Маркушевич А. И. Об одной граничной задаче теории аналитических функций.— Уч. зап. Моск. ун-та, 1946, вып. 100. Математика, т. 1, стр. 20—30.
- Маркушевич А. И., Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я. Некоторые современные вопросы теории граничных свойств.— В кн.: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1961, стр. 100—110.
- Маркушевич А. И., Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я. Современное состояние и проблемы теории граничных свойств аналитических функций.— Труды Четвертого Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1964, т. 2, стр. 661—667.
- Мелентьев П. В. Приближенные вычисления. Физматгиз, М., 1962, 388 с.
- Мелешенко Н. Т. Движение грунтовых вод под гидротехническими сооружениями. Гостехиздат, М.—Л., 1937, 91 с.
- Митюк І. П. Про квазіконформні відображення в просторі.— ДАН УРСР, 1964, № 8, стор. 1022—1025.
- Митюк И. П. Принцип симметризации для многосвязных областей и некоторые его применения.— Укр. мат. журн., 1965, т. 17, № 4, стр. 46—51.
- Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе, 1963, 183 с.
- Михальчук В. Г. Интеграл типа Коши и теорема Римана — Роха для квазианалитических функций на римановых поверхностях.— В кн.: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1960, стр. 425—436.
- Моисеев Н. Н. Асимптотические методы типа узких полос.— В кн.: Некоторые проблемы математики и механики. Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1961, стр. 180—200.
- Монахов В. Н. О теоремах единственности в задачах гидродинамики со свободными границами.— Труды Семинара по обратным краевым задачам, 1964, вып. 1, стр. 81—87.
- Монахов В. Н. О теоремах существования решений в задачах гидродинамики со свободными границами.— Труды Семинара по обратным краевым задачам, 1964, вып. 2, стр. 142—153.
- Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М., 1954, 647 с.
- Мусхелишвили Н. И. Приложение интегралов типа Коши к некоторым задачам математической физики. Тбилиси, 1922, 157 с.
- Мусхелишвили Н. И. Приложение интегралов типа Коши к одному классу сингулярных интегральных уравнений.— Труды Тбилисск. мат. ин-та, 1941, т. 10, 43 с.
- Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные

- задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. Изд. 2-е. Физматгиз, М., 1962, 599 с.
- Н а т а л е в и ч В. К. Нелинейные сингулярные интегральные уравнения и нелинейные краевые задачи теории аналитических функций.— Уч. зап. Казанск. ун-та, 1952, т. 112, кн. 10, стр. 155—190.
- Н е в а н л и н н а Р. Униформизация. ИЛ, М., 1955, 435 с.
- Н е к р а с о в А. И. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. Изд-во АН СССР, М., 1951, 96 с.
- Н е л ь с о н - С к о р н я к о в Ф. Б. Фильтрация в однородной среде. «Советская наука», М., 1949, 568 с.
- Н у ж и н М. Т. Об обратных краевых задачах для многосвязных областей.— Изв. вузов. Математика, 1964, № 5, стр. 69—77.
- Н у ж и н М. Т. О некоторых обратных краевых задачах и их применении к определению формы сечений скручиваемых стержней.— Уч. зап. Казанск. ун-та, 1949, т. 109, кн. 1, стр. 97—120.
- Н у ж и н М. Т. Решение обратной краевой задачи для двусвязной области.— Уч. зап. Казанск. ун-та, 1950, т. 110, кн. 7, стр. 31—38.
- Н у ж и н М. Т., И л ь и н с к и й Н. Б. Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений. Обратные краевые задачи теории фильтрации. Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1963, 138 с.
- П а в л о в с к и й Н. Н. Гидромеханический расчет плотин системы Сенкова. Госстройиздат, М.—Л., 1937, 94 с.
- П а в л о в с к и й Н. Н. Собрание сочинений. Т. 2. Движение грунтовых вод. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1956, 770 с.
- П а н ч е н к о в А. Н. Гидродинамика подводного крыла. «Наукова думка», К., 1965, 552 с.
- П а р а с ю к О. С. О «парных» интегральных уравнениях в классе обобщенных функций.— ДАН СССР, 1956, т. 110, № 6, стр. 957—959.
- П е с и н И. Н. Метрические свойства Q -квазиконформных отображений.— Мат. сб., 1956, т. 40 (82), вып. 3, стр. 281—294.
- П е т р о в с к и й И. Г. О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными.— Усп. мат. наук, 1946, т. 1, вып. 3-4 (13-14), стр. 44—70.
- П о г о р е л о в А. В. Некоторые вопросы геометрии в целом в римановом пространстве. Изд-во Харьковск. ун-та, Харьков, 1957, 90 с.
- П о л о ж и й Г. Н. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Изд-во Киевск. ун-та, К., 1965, 441 с.
- П о л о ж и й Г. Н. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. Изд-во Киевск. ун-та, К., 1962, 161 с.
- П о л у б а р и н о в а - К о ч и н а П. Я. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1942, 144 с.
- П о л у б а р и н о в а - К о ч и н а П. Я. Некоторые методы теории функций комплексного переменного в применении к теории фильтрации.— В кн.: Некоторые проблемы математики и механики. Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1961, стр. 212—218.
- П о л у б а р и н о в а - К о ч и н а П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, М., 1952, 676 с.
- П р и в а л о в И. И. Граничные свойства аналитических функций. ГИТТЛ, М.—Л., 1950, 336 с.
- П р и в а л о в И. И. Интеграл Cauchy.— Изв. Саратовск. ун-та, 1918, т. 11, № 1, 94 с.
- Приложения теории функций в механике сплошной среды. Труды Международного симпозиума (Тбилиси, 17—23 сентября 1963 г.). Под ред. Н. И. Мусхелишвили, Л. И. Седова, Г. К. Михайлова. Т. 1, 2. «Наука», М., 1965.
- Р е ш е т н я к Ю. Г. Некоторые геометрические свойства функций и отображений с обобщенными производными.— Сиб. мат. журн., 1966, т. 7, № 4, стр. 886—919.
- Р е ш е т н я к Ю. Г. Об устойчивости в теории Лиувилля о конформных отображениях пространства.— ДАН СССР, 1963, т. 152, № 2, стр. 286—287.
- Р е ш е т н я к Ю. Г. Об устойчивости конформных отображений в многомерных пространствах.— Сиб. мат. журн., 1967, т. 8, № 1, стр. 91—114.

- Решетняк Ю. Г.** Пространственные отображения с ограниченным искажением.— Сиб. мат. журн., 1967, т. 8, № 3, стр. 629—658.
- Рогожин В. С.** Достаточные условия однолистности решения обратных краевых задач.— Прикл. мат. и мех., 1958, т. 22, вып. 6, стр. 804—807.
- Рогожин В. С.** О числе решений внешней обратной краевой задачи.— Уч. зап. Ростовск. ун-та, 1959, т. 66, вып. 7, стр. 155—158.
- Родин Ю. Л.** О задаче Римана на замкнутых римановых поверхностях.— ДАН СССР, 1960, т. 132, № 5, стр. 1038—1040.
- Седов Л. И.** Введение в механику сплошной среды. Физматгиз, М., 1962, 284 с.
- Седов Л. И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. «Наука», М., 1966, 447 с.
- Седов Л. И.** Теория плоских движений идеальной жидкости. Оборонгиз, М.—Л., 1939, 142 с.
- Сенков А. М., Фильчаков П. Ф.** Приближенные методы расчета стационарного движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями. Изд-во АН УССР, К., 1952, 228 с.
- Сokolовский В. В.** Теория пластичности. Изд-во АН СССР, М., 1946, 306 с.
- Соляник-Красса К. В.** Кручение валов переменного сечения. Гостехиздат, М.—Л., 1949, 166 с.
- Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений жидкости. Гостехиздат, М.—Л., 1936, 303 с.
- Степанов Г. Ю.** Гидродинамика решеток турбомашин. Физматгиз, М., 1962, 512 с.
- Степанов Г. Ю.** Гидродинамическая теория аппаратов на воздушной подушке. Машгиз, М., 1963, 95 с.
- Степанов Г. Ю.** Применение электрического моделирования для отыскания конформного отображения при решении плоских краевых задач.— Инж. журн., 1965, т. 5, вып. 3, стр. 587—598.
- Стечкин Б. С.** Теория воздушного реактивного двигателя.— Техника воздушного флота, 1929, № 2, стр. 96—103.
- Страшкевич А. М.** Электронная оптика электростатических полей, не обладающих осевой симметрией. Физматгиз, М., 1959, 251 с.
- Суворов Г. Д.** Метрические свойства плоских однолистных отображений замкнутых областей.— Труды Томск. ун-та. Сер. мех.-мат., 1965, т. 182, стр. 46—59.
- Сычев А. В.** О квазиконформных отображениях в пространстве.— ДАН СССР, 1966, т. 166, № 2, стр. 298—300.
- Тамразов П. М.** Теоремы покрытия линий при конформном отображении.— Мат. сб., 1965, т. 66 (108), вып. 4, стр. 502—524.
- Темляков А. А.** Интегральное представление аналитических функций двух комплексных переменных.— Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1954, т. 21, вып. 2, стр. 7—22.
- Темляков А. А.** Интегральное представление функций двух комплексных переменных.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1957, т. 21, № 1, стр. 89—92.
- Темляков А. А.** Интегральные представления для мероморфных функций.— ДАН СССР, 1962, т. 143, № 5, стр. 1057—1059.
- Терсенов С. А.** К теории уравнений эллиптического типа, вырождающихся на границе области.— Сиб. мат. журн., 1965, т. 6, № 5, стр. 1120—1143.
- Трохимчук Ю. Ю.** Непрерывные отображения и условия моногенности. Физматгиз, М., 1963, 211 с.
- Тумаркин Г. Ц.** Свойства аналитических функций, представимых интегралами типа Коши — Стильеса и типа Коши — Лебега.— Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук, 1963, т. 16, № 5, стр. 23—46.
- Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я.** Классы аналитических функций в многосвязных областях.— В кн.: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1960, стр. 45—77.
- Тумашев Г. Г., Нужи́н М. Т.** Обратные краевые задачи и их приложения. Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1965, 332 с.

- Угодчиков А. Г. Построение конформно отображающих функций при помощи электромоделирования и интерполяционных полиномов Лагранжа. «Научная думка», К., 1966, 75 с.
- Ульянов П. Л. Об A -интеграле Коши. — Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 5 (71), стр. 223—229.
- Усманов Н. К. Граничные задачи дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка эллиптического типа. — Труды Ин-та физ. и мат. АН ЛатвССР, 1950, вып. 1, стр. 41—100.
- Федоров В. С. Непрерывность и моногенность. — Изв. Иваново-Вознес. политехн. ин-та, 1949, № 1.
- Федоров В. С. О непрерывности аналитических функций. — Мат. сб., 1924, т. 32, вып. 1, стр. 115—121.
- Фильчаков П. Ф. Приближенные методы конформных отображений. «Научная думка», К., 1964, 530 с.
- Фильчаков П. Ф. Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями. Т. 1, 2. Изд-во АН УССР, К., 1959, 1960.
- Фильчаков П. Ф., Панчишин В. И. Интеграторы ЭГДА. Моделирование потенциальных полей на электропроводной бумаге. Изд-во АН УССР, К., 1961, 171 с.
- Фрейдкин С. А. Краевая задача Римана и сингулярные интегральные уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами в случае счетного множества интегралов. — Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1964, т. 70, стр. 27—38.
- Фукс Б. А., Шабат Б. В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. «Наука», М., 1964, 387 с.
- Хавинсон С. Я. Аналитические функции ограниченного вида. — В кн.: Математический анализ. 1963. Изд. ВИНТИ АН СССР, М., 1965, стр. 5—80.
- Хведелидзе Б. В. Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения. — Труды Тбилисск. мат. ин-та, 1957, т. 23, 158 с.
- Христианович С. А., Гальперин В. Г., Миллионщиков М. Д., Симонов Л. А. Прикладная газовая динамика. Изд. ЦАГИ, М., 1948, 143 с.
- Христианович С. А., Михлин С. Г., Девисон Б. Б. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. Неустановившееся движение в каналах и реках. Математическая теория пластичности. Движение грунтовых вод. Изд-во АН СССР, М. — Л., 1938, 407 с.
- Чаплыгин С. А. Собрание сочинений. Т. 2. Гидродинамика. Аэродинамика. Гостехиздат, М. — Л., 1948, 644 с.
- Чарный И. А. Подземная гидромеханика. Гостехиздат, М. — Л., 1948, 196 с.
- Черский Ю. И. Общее сингулярное уравнение и уравнение типа свертки. — Мат. сб., 1957, т. 41, вып. 3, стр. 277—296.
- Чибрикова Л. И. Краевая задача Римана для автоморфных функций в случае групп с двумя инвариантами. — Изв. вузов. Математика, 1961, № 6, стр. 121—131.
- Чибрикова Л. И. О краевой задаче Гильберта на конечной римановой поверхности. — В кн.: Краевые задачи теории функций комплексного переменного. Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1962, стр. 59—72.
- Чибрикова Л. И. Письмо в редакцию. — Изв. вузов. Математика, 1962, № 3, стр. 195—196.
- Чикин Л. А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений. — Уч. зап. Казанск. ун-та, 1953, т. 113, кн. 10, стр. 57—105.
- Шабат Б. В. Геометрический смысл понятия эллиптичности. — Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 6 (78), стр. 181—188.
- Шабат Б. В. К теории квазиконформных отображений в пространстве. — ДАН СССР, 1960, т. 132, № 5, стр. 1045—1048.
- Шабат Б. В. Метод модулей в пространстве. — ДАН СССР, 1960, т. 130, № 6, стр. 1210—1213.
- Шабат Б. В. Об обобщенных решениях одной системы уравнений в частных производных. — Мат. сб., 1945, т. 17 (59), вып. 2, стр. 193—209.

- Ш а б а т Б. В. Об отображениях, осуществляемых решениями системы Карлемана.— Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 3 (69), стр. 203—206.
- Ш а б а т Б. В. Теорема и формула Коши для квазиконформных отображений линейных классов.— ДАН СССР, 1949, т. 69, № 3, стр. 305—308.
- Ш а м а н с к и й В. Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Ч. 1. Линейные краевые задачи. Изд-во АН УССР, К., 1963, 195 с. Ч. 2. Нелинейные краевые задачи на собственные значения для дифференциальных уравнений. «Наукова думка», 1966, 242 с.
- Ш а п р о З. Я. О существовании квазиконформных отображений.— ДАН СССР, 1941, т. 30, № 3, стр. 685—687.
- Ш е в ч е н к о В. И. О локальном гомеоморфизме трехмерного пространства, осуществляемом решением некоторой эллиптической системы.— ДАН СССР, 1962, т. 146, № 5, стр. 1035—1038.
- Ш е с т а к о в В. М. Теоретические основы опенки подпора, водопонижения и дренажа. Изд-во Московск. ун-та, М., 1965, 233 с.
- Щ е л к а ч е в В. Н., Л а п у к Б. Б. Подземная гидравлика. Гостоптехиздат, М.—Л., 1949, 524 с.

К главе III. Обыкновенные дифференциальные уравнения

- А з б е л е в Н. В., Ц а л ю к З. Б. О задаче Чаплыгина — Укр. мат. журн., 1958, т. 10, № 1, стр. 3—12.
- А й з е р м а н М. А., Г а н т м а х е р Ф. Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. Изд-во АН СССР, М., 1963, 135 с.
- А й з е р м а н М. А., Г а н т м а х е р Ф. Р. Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями.— Труды Четвертого Всесоюзн. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1964, т. 2, стр. 391—394.
- А й з е р м а н М. А., Л у р ь е А. И. Методы определения периодических движений в кусочно-линейных системах.— Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям (Киев, сентябрь 1961 г.), 1963, т. 1, стр. 27—48.
- А л ь м у х а м е д о в М. И. Об устойчивых и неустойчивых центрах.— Уч. зап. Казанск. пед. ин-та, 1955, вып. 10, стр. 9—28.
- А н д р е е в А. Ф. Исследование поведения интегральных кривых одной системы двух дифференциальных уравнений в окрестности особой точки.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 8, стр. 43—65.
- А н д р е е в А. Ф. О методе Фроммера исследования особой точки дифференциального уравнения первого порядка.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1962, № 1, стр. 5—21.
- А н д р е е в А. Ф. О числе операций при исследовании особой точки дифференциального уравнения методом Фроммера.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 9, стр. 1155—1176.
- А н д р е е в А. Ф. Решение проблемы центра и фокуса в одном случае.— Прикл. мат. и мех., 1953, т. 17, вып. 3, стр. 333—338.
- А н д р о н о в А. А. Собрание трудов. Изд-во АН СССР, М., 1956, 538 с.
- А н д р о н о в А. А., П о н т р я г и н Л. С. Грубые системы.— ДАН СССР, 1937, т. 14, № 5, стр. 247—250.
- А н д р о н о в а - Л е о н т о в и ч Е. А., Б е л ю с т и н а Л. Н. Теория бифуркаций динамических систем второго порядка и ее применение к исследованию нелинейных задач теории колебаний.— Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям (Киев, сентябрь 1961 г.), 1963, т. 2, стр. 7—28.
- А р н о л ь д В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике.— Усп. мат. наук, 1963, т. 18, вып. 6 (114), стр. 91—192.
- А р т е м ь е в Н. А. Метод определения характеристических показателей и приложение его к двум задачам небесной механики.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1944, т. 8, № 2, стр. 61—100.
- А т р а ш е н о к П. В. Некоторые вопросы теории устойчивости движения.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1954, № 8, стр. 79—106.

- Баггис Г. Ф. Грубые системы двух дифференциальных уравнений.— Усп. мат. наук, 1955, т. 10, вып. 4 (66), стр. 101—126.
- Барбашин Е. А. Метод сечений в теории динамических систем.— Мат. сб., 1951, т. 29 (71), вып. 2, стр. 233—280.
- Барбашин Е. А. О гомоморфизмах динамических систем.— Мат. сб., 1950, т. 27 (69), вып. 3, стр. 455—470.
- Барбашин Е. А. О работах членов Свердловского семинара по качественным методам в теории дифференциальных уравнений.— Труды Третьего Всесоюз. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.), 1956, т. 1, стр. 42—93.
- Барбашин Е. А., Геращенко Е. И. О форсировании скользящих режимов в системах автоматического регулирования.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 1, стр. 25—32.
- Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. О существовании функций Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом.— Прикл. мат. и мех., 1954, т. 18, вып. 1, стр. 345—350.
- Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом.— ДАН СССР, 1952, т. 86, № 3, стр. 453—456.
- Басов В. П. Необходимые и достаточные условия устойчивости решений некоторого класса систем линейных дифференциальных уравнений в одном сомнительном случае.— ДАН СССР, 1951, т. 81, № 1, стр. 5—8.
- Басов В. П. О структуре решения правильной системы.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1952, № 12, стр. 3—8.
- Басов В. П. Поведение решений систем линейных дифференциальных уравнений в окрестности особой точки типа иррегулярной.— Мат. сб., 1956, т. 40 (82), вып. 3, стр. 339—380.
- Басов В. П. Построение решений одного класса систем линейных дифференциальных уравнений.— Прикл. мат. и мех., 1954, т. 18, вып. 3, стр. 313—328.
- Баутин Н. Н. О числе предельных циклов, появляющихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокуса или центра.— Мат. сб., 1952, т. 30 (72), вып. 1, стр. 181—196.
- Баутин Н. Н. О поведении динамических систем вблизи границ области устойчивости. Гостехиздат, М.— Л., 1949, 164 с.
- Баутин Н. Н. Теория точечных преобразований и динамическая теория часов. Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям. (Киев, сентябрь 1961 г.), 1963, т. 2, стр. 29—54.
- Беллман Р. Динамическое программирование. ИЛ, М., 1960, 400 с.
- Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. «Наука», М., 1964, 360 с.
- Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. ИЛ, М., 1954, 216 с.
- Белостина Л. Н., Баутин Н. Н., Андропова-Леонтович Е. А., Неймарк Ю. И. Основные направления и новые результаты горьковской школы А. А. Андропова. — Труды Четвертого Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1963, т. 1, стр. 415—424.
- Берлинский А. Н. О поведении интегральных кривых на плоскости в целом.— Изв. вузов. Математика, 1963, № 5, стр. 3—5.
- Берлинский А. Н. О сожительстве особых точек различных типов.— Изв. вузов. Математика, 1960, № 5, стр. 27—32.
- Бессмертных Г. А. Несколько замечаний к вопросу о существовании решения у сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— В кн.: Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, вып. 2. «Наукова думка», стр. 23—32.
- Биркгоф Г. Д. Динамические системы. Гостехиздат, М.— Л., 1941, 320 с.
- Бирюк Г. И. К вопросу о существовании почти периодических решений нелинейных систем с малым параметром в случае вырождения.— ДАН СССР, 1954, т. 97, № 4, стр. 577—579.
- Блинов И. Н. Аналитическое представление решения системы линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами, зависящими от параметра. Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 8, стр. 1042—1053.

- Б л и н ч е в с к и й В. С. Существование периодических решений у одной автономной системы n -дифференциальных уравнений.— Мат. сб., 1960, т. 50 (92), № 1, стр. 117—126.
- Б о г д а н о в Ю. С. Нормы Ляпунова в линейных пространствах.— Мат. сб., 1959, т. 49 (91), № 2, стр. 225—231.
- Б о г д а н о в Ю. С. О преобразовании переменной матрицы к каноническому виду.— ДАН БССР, 1963, т. 7, № 3, стр. 152—154.
- Б о г д а н о в Ю. С. О существовании аппроксимирующей последовательности для правильной линейной дифференциальной системы.— Усп. мат. наук, 1960, т. 15, № 1, стр. 177—179.
- Б о г д а н о в Ю. С. Обобщенные характеристические числа неавтономных систем.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 9, стр. 1140—1148.
- Б о г д а н о в Ю. С., А н д р е е в А. Ф. О непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных.— Усп. мат. наук, 1958, т. 13, вып. 3 (81), стр. 165—166.
- Б о г о л ю б о в Н. Н. Метод интегральных многообразий в нелинейной механике.— Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям. (Киев, сентябрь 1961 г.), 1963, т. 1, стр. 93—154.
- Б о г о л ю б о в Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Изд-во АН УССР, Львов, 1945, 137 с.
- Б о г о л ю б о в Н. Н., М и т р о п о л ь с к и й Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. «Наука», М., 1963, 410 с.
- Б о г о я в л е н с к и й А. А. Линейный интеграл циклического перемещения для гироскопа в кардановом подвесе.— Прикл. мат. и мех., 1964, т. 28, вып. 3, стр. 508—510.
- Б о р и с о в и ч Ю. Г. О периодических решениях дифференциально-операторных уравнений с малым параметром при производной.— ДАН СССР, 1963, т. 148, № 2, стр. 255—259.
- Б р е у с К. А. Про асимптотичний розв'язок лінійних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами.— ДАН УРСР, 1955, № 5, стор. 415—418.
- Б р ю н о А. Д. Степенные асимптотики решений нелинейных систем.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1965, т. 29, № 2, стр. 328—364.
- Б у р д В. Ш. Зависимость от параметра почти периодических решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— ДАН АзССР, 1965, т. 21, № 5, стр. 3—7.
- Б у р д В. Ш. К задаче о разветвлении почти периодических решений нелинейных обыкновенных уравнений.— ДАН СССР, 1964, т. 159, № 2, стр. 239—242.
- Б ы к о в Я. В. Об одном классе систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 11, стр. 1449—1476.
- Б ы к о в Я. В. Об особых периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 7, стр. 851—867.
- Б ы л о в Б. Ф. Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. «Наука», М., 1966, 576 с.
- В а й с б о р д Э. М. О существовании периодических решений и об ограниченности в целом решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений 3-го порядка.— Изв. вузов. Математика, 1959, № 4, стр. 38—49.
- В а й с б о р д Э. М. Об эквивалентности систем дифференциальных уравнений в окрестности особой точки.— Научн. докл. высш. шк. Физ-мат. науки, 1958, № 1, стр. 37—42.
- В а л е е в К. Г. Линейные дифференциальные уравнения с запаздыванием, линейно зависящим от аргумента.— Сиб. мат. журн., 1964, т. 5, № 2, стр. 290—309.
- В а л е е в К. Г. Линейные дифференциальные уравнения с синусоидальными коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента.— Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям (Киев, сентябрь 1961 г.), 1963, т. 2, стр. 100—119.
- В а л е е в К. Г. Об одной системе линейных дифференциальных уравнений с простыми гармоническими коэффициентами.— Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1963, № 5, стр. 203—205.

- Валеев К. Г. Об устойчивости решений линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами и запаздыванием аргумента.— Изв. АН СССР. ОН. Механика и машиностроение, 1963, № 3, стр. 161—162.
- Васильева А. Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных.— Усп. мат. наук, 1963, т. 18, вып. 3 (111), стр. 15—86.
- Васильева А. Б. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1963, т. 3, № 4, стр. 611—643.
- Васильева А. Б. О дифференцировании решений дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр.— ДАН СССР, 1948, т. 61, № 4, стр. 597.
- Васильева А. Б. Об интегральных возмущениях в дифференциальных уравнениях с быстроколеблющимися решениями.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 6, стр. 717—730.
- Васильева А. Б., Волосов В. М. О работах А. Н. Тихонова и его учеников по обыкновенным дифференциальным уравнениям, содержащим малый параметр.— Усп. мат. наук, 1967, т. 22, вып. 2 (134), стр. 149—168.
- Виноград Р. Э. О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений.— Мат. сб., 1957, т. 42 (84), № 2, стр. 207—222.
- Виноградов Н. Н. Некоторые теоремы о существовании периодического решения и определении границы области асимптотической устойчивости тривиального решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 4, стр. 442—448.
- Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 5 (77), стр. 3—122.
- Вишик М. И., Люстерник Л. А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамопряженных дифференциальных уравнений.— Усп. мат. наук, 1960, т. 15, вып. 3 (93), стр. 3—80.
- Волосов В. М. К вопросу о дифференциальных уравнениях с малым параметром при старшей производной.— ДАН СССР, 1950, т. 73, № 5, стр. 873—876.
- Волосов В. М. Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений.— Усп. мат. наук, 1962, т. 17, вып. 6 (108), стр. 3—126.
- Воробьев А. П. Качественное исследование интегральных кривых в целом изохронных систем двух дифференциальных уравнений.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 4, стр. 439—441.
- Воробьев А. П. О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 1, стр. 79—81.
- Гаврилов Н. И. Об одном методе в теории устойчивости по Ляпунову.— ДАН СССР, 1952, т. 84, стр. 657—660.
- Гаврилов Н. И. Об устойчивости по Ляпунову систем линейных дифференциальных уравнений.— ДАН СССР, 1952, т. 84, № 3, стр. 425—428.
- Галиуллин А. С. Некоторые вопросы устойчивости программного движения. Таткнигоиздат, Казань, 1960, 87 с.
- Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Гостехиздат, М., 1953, 491 с.
- Гельман А. Е. О приводимости систем с квазипериодической матрицей.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 3, стр. 283—294.
- Голоквасюс П. Б. Отыскание характеристических чисел решений одного класса систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.— Литовск. мат. сб., 1963, т. 3, № 1, стр. 77—101.
- Горшин С. И. Об устойчивости со счетным числом постоянно действующих возмущений в одном критическом случае.— Изв. АН КазССР. Сер. мат. и мех., 1956, № 4, стр. 38—42.
- Градштейн И. С. Дифференциальные уравнения с малыми множителями при производных и теория устойчивости Ляпунова.— ДАН СССР, 1949, т. 65, № 6, стр. 789—792.
- Градштейн И. С. О поведении решений системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, вырождающихся в пределе.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, т. 13, № 3, стр. 253—280.

- Г р а д ш т е й н И. С. Применение теории устойчивости А. М. Ляпунова к теории дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных.— ДАН СССР, 1951, т. 81, № 6, стр. 985—987.
- Г р о б м а н Д. М. О гомеоморфизме систем дифференциальных уравнений.— ДАН СССР, 1959, т. 128, № 5, стр. 880—881.
- Г р о б м а н Д. М. Топологическая и асимптотическая эквивалентность систем дифференциальных уравнений.— ДАН СССР, 1961, т. 140, № 4, стр. 746—747.
- Г р у д о Э. И. Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений. — Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 6, стр. 767—772.
- Г р у д о Э. И. Построение решений порядка $\nu - 0$ дифференциальных уравнений первого порядка. — ДАН БССР, 1964, т. 8, № 1, стр. 13—17.
- Г р у з Д. М., К у к л е с И. С. О характеристиках, входящих в начало с нулевыми и бесконечными порядками или мерами кривизны.— Изв. АН УзССР. Сер. физ.мат. наук, 1958, т. 1, стр. 15—27.
- Д е м и д о в и ч Б. П. О некоторых нелинейных системах с D -свойством Левинсона.— Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям (Киев, сентябрь 1961 г.), 1963, т. 2, стр. 156—160.
- Д е м и д о в и ч Б. П. Об одном обобщении критерия устойчивости Ляпунова для правильных систем.— Мат. сб., 1965, т. 66 (108), вып. 3, стр. 344—353.
- Д е м и д о в и ч Б. П. Ограниченные решения некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений.— Труды Третьего Всесоюзн. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.), 1956, т. 1, стр. 52—53.
- Д ж р б а ш я н М. М., Н е р с е с я н А. Б. Разложения по некоторым биортонормальным системам и краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка.— Труды Моск. мат. о-ва, 1961, т. 10, стр. 89—179.
- Д о н с к а я Л. И. О структуре решений системы трех линейных однородных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1953, № 5, стр. 15—64.
- Д о н с к а я Л. И. О структуре решения системы n линейных дифференциальных уравнений в окрестности регулярной особой точки.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1954, № 8, стр. 55—64.
- Д о р о д н и ц ы н А. А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка.— Усп. мат. наук, 1952, т. 7, вып. 6 (52), стр. 3—96.
- Д о р о д н и ц ы н А. А. Асимптотическое решение уравнения Ван-дер-Поля.— Прикл. мат. и мех., 1947, т. 11, вып. 3, стр. 313—328.
- Д у б о ш и н Г. Н. Об интегрировании уравнений с малыми параметрами по способу А. М. Ляпунова.— Вестн. Моск. ун-та, 1951, т. 12, стр. 3—11.
- Е р у г и н А. Н. Аналитическая структура решения уравнения (2.1).— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 12, стр. 1606—1619.
- Е р у г и н А. Н. Аналитическая структура решения уравнения интегральных кривых одной системы двух дифференциальных уравнений в некоторых случаях.— Укр. мат. журн., 1961, т. 13, № 2, стр. 224—226.
- Е р у г и н Н. П. Качественное исследование интегральных кривых системы дифференциальных уравнений.— Прикл. мат. и мех., 1950, т. 14, вып. 6, стр. 659—664.
- Е р у г и н Н. П. Качественные методы в теории устойчивости.— Прикл. мат. и мех., 1955, т. 19, вып. 5, стр. 599—616.
- Е р у г и н Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Изд-во БССР, Минск, 1963. 269 с.
- Е р у г и н Н. П. Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений. Изд-во ЛГУ, Л., 1956, 108 с.
- Е р у г и н Н. П. Неявные функции. Изд-во ЛГУ, Л., 1956, 59 с.
- Е р у г и н Н. П. О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом.— Прикл. мат. и мех., 1950, т. 14, вып. 5, стр. 459—512.
- Е р у г и н Н. П. Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования.— Прикл. мат. и мех., 1952, т. 16, вып. 5, стр. 620—628.

- Е р у г и н Н. П. Первый метод Ляпунова.— Диф. ур-я, 1967, т. 3, вып. 4, стр. 531—578.
- Е р у г и н Н. П. Приводимые системы.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1946, т. 13, 96 с.
- Е р у г и н Н. П. Работы советских математиков по аналитической теории дифференциальных уравнений.— Труды Ин-та физ. и мат. АН БССР, 1959, вып. 3, стр. 62—71.
- Е р у г и н Н. П. Теоремы о неустойчивости.— Прикл. мат. и мех., 1952, т. 16, вып. 3, стр. 355—361.
- Ж а у т ы к о в О. А. Счетные системы дифференциальных уравнений и их применения.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 2, стр. 162—170.
- З а д и р а к а К. В. Исследование сингулярно возмущенной автономной системы в окрестности тора.— ДАН СССР, 1962, т. 145, № 3, стр. 507—509.
- З а д и р а к а К. В. О системе нелинейных дифференциальных уравнений, содержащей малый параметр при некоторых производных.— ДАН СССР, 1956, т. 109, № 2, стр. 256—259.
- З а д и р а к а К. В. Об интегральном многообразии системы дифференциальных уравнений, содержащей малый параметр.— ДАН СССР, 1957, т. 115, № 4, стр. 646—649.
- З в е р к и н А. М. Общее решение линейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом.— Научн. докл. высш. шк. Физ.-мат. науки, 1959, № 1, стр. 30—37.
- З в е р к и н А. М., Ка мен с к и й Г. А., Н о р к и н С. Б., Э л ь с - г о л ь ц Л. Э. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Ч. I.— Усп. мат. наук, 1962, т. 17, вып. 2 (104), стр. 77—164. Ч. II.— Труды Семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, 1963, т. 2, стр. 3—49.
- З и г е л ь К. Л. Лекции по небесной механике. ИЛ, М., 1959, 300 с.
- З у б о в В. И. Вопросы теории второго метода Ляпунова, построения общего решения в области асимптотической устойчивости.— Прикл. мат. и мех., 1955, т. 19, вып. 2, стр. 179—210.
- З у б о в В. И. Колебания в нелинейных и управляемых системах. Судпромгиз, Л., 1962, 630 с.
- З у б о в В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Судпромгиз, Л., 1959, 324 с.
- З у б о в В. И. Методы А. М. Ляпунова и их применение. Изд-во ЛГУ, Л., 1957, 241 с.
- И в а н о в В. С. Обоснование одной гипотезы Ван-дер-Поля в теории автоколебаний.— Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат., 1940, № 10, стр. 111—119.
- Ка мен к о в Г. В. Исследование одного особенного случая задачи об устойчивости движения.— Труды Казанск. авиацион. ин-та, 1936, № 5.
- Ка ра ч а р о в К. А., П и л ь т и к А. Г. Устойчивость неустановившегося движения на конечном отрезке времени. Ч. 2, 1959, 110 с.
- К е л д ы ш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений.— ДАН СССР, 1951, т. 77, № 1, стр. 11—14.
- К е л д ы ш М. В. Об одной тауберовой теореме.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1951, т. 38, стр. 77—86.
- К е л д ы ш М. В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси.— Труды ЦАГИ, 1945, № 564, 34 с.
- К е л д ы ш М. В., Л и д с к и й В. Б. Вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов.— Труды Четвертого Всесоюзн. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1963, т. 1, стр. 101—119.
- К и б е н к о А. В. К теории обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.— ДАН СССР, 1961, т. 136, № 5, стр. 1019—1021.
- К и г у р а д з е И. Т. К вопросу колеблемости решений нелинейных дифференциальных уравнений.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 8, стр. 995—1006.
- К и г у р а д з е И. Т. О задаче Коши для сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 10, стр. 1271—1291.

- К о л е с о в Ю. С., К р а с н о с е л ь с к и й М. А. Устойчивость по Ляпунову и уравнения с вогнутыми операторами.— ДАН СССР, 1962, т. 145, № 6, стр. 1217—1220.
- К о л м о г о р о в А. Н. Общая теория динамических систем и классическая механика.— В кн.: Международный математический конгресс в Амстердаме 1954 г. (обзорные доклады). Физматгиз, М., 1961, стр. 187—208.
- К о л м о г о р о в А. Н. О сохранении условно периодических движений при малом изменении функций Гамильтона.— ДАН СССР, 1954, т. 98, № 4, стр. 527—530.
- К о с т и н А. В. К вопросу о существовании у системы обыкновенных дифференциальных уравнений ограниченных частных решений и частных решений, стремящихся к нулю при $t \rightarrow +\infty$.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 5, стр. 585—604.
- К р а в ч е н к о Т. К., Я б л о н с к и й А. И. Решение бесконечной граничной задачи для одного уравнения третьего порядка.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 3, стр. 327—329.
- К р а с н о с е л ь с к и й М. А. Альтернативный принцип существования периодических решений для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.— ДАН СССР, 1963, т. 152, № 4, стр. 801—805.
- К р а с н о с е л ь с к и й М. А. О периодических решениях в окрестности особой точки динамической системы.— ДАН СССР, 1957, т. 117, № 2, стр. 180—183.
- К р а с н о с е л ь с к и й М. А. О применении методов нелинейного функционального анализа в некоторых задачах о периодических решениях уравнений нелинейной механики.— ДАН СССР, 1956, т. 111, № 2, стр. 283—286.
- К р а с н о с е л ь с к и й М. А. О применении методов функционального анализа к задачам о нелинейных колебаниях.— Труды Третьего Всесоюз. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.), 1958, т. 3, стр. 261—268.
- К р а с н о с е л ь с к и й М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. «Наука», М., 1966, 331 с.
- К р а с н о с е л ь с к и й М. А. Положительные решения операторных уравнений. Главы нелинейного анализа. Физматгиз, М., 1962, 394 с.
- К р а с н о с е л ь с к и й М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Гостехиздат, М., 1956, 392 с.
- К р а с н о с е л ь с к и й М. А., К р е й н С. Г. К теории обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.— Труды Воронежск. ун-та, 1956, вып. 2, стр. 3—23.
- К р а с н о с е л ь с к и й М. А., К р е й н С. Г. Нелокальные теоремы существования и теоремы единственности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— ДАН СССР, 1955, т. 102, № 1, стр. 13—16.
- К р а с н о с е л ь с к и й М. А., К р е й н С. Г., С о б о л е в с к и й П. Е. О дифференциальных уравнениях с неограниченными операторами в банаховых пространствах.— ДАН СССР, 1956, т. 111, № 1, стр. 19—22.
- К р а с н о с е л ь с к и й М. А., П е р о в А. И. О некоторых признаках существования периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям (Киев, сентябрь 1961 г.), 1963, т. 2, стр. 202—209.
- К р а с н о с е л ь с к и й М. А., П е р о в А. И. Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти периодических решений у системы обыкновенных дифференциальных уравнений.— ДАН СССР, 1958, т. 123, № 2, стр. 235—238.
- К р а с н о с е л ь с к и й М. А., С т р ы г и н В. В. О вычислении вращения вполне непрерывных векторных полей, связанных с задачей о периодических решениях дифференциальных уравнений.— ДАН СССР, 1963, т. 152, № 3, стр. 540—544.
- К р а с н о с е л ь с к и й М. А., С т р ы г и н В. В. О некоторых признаках существования периодических решений у обыкновенных дифференциальных уравнений.— ДАН СССР, 1964, т. 156, № 5, стр. 1022—1025.
- К р а с о в с к и й Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, М., 1959, 211 с.

- Красовский Н. Н. О периодических решениях дифференциальных уравнений с запаздыванием времени.— ДАН СССР, 1957, т. 114, вып. 2, стр. 252—255.
- Красовский Н. Н. Об одном свойстве линейной устойчивой системы, вполне управляемой по случайному воздействию.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 2, стр. 143—152.
- Красовский Н. Н. Об оптимальном управлении при дискретных сигналах обратной связи.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 11, стр. 1415—1425.
- Красовский Н. Н. О стабилизации динамических систем дополнительными силами.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 1, стр. 5—16.
- Красовский Н. Н. Об условиях обращения теорем А. М. Ляпунова о неустойчивости для стационарных систем дифференциальных уравнений.— ДАН СССР, 1955, т. 101, № 1, стр. 17—20.
- Красовский Н. Н. Об устойчивости квазилинейных систем с последствием.— ДАН СССР, 1958, т. 119, № 3, стр. 435—438.
- Красовский Н. Н. Об устойчивости решений системы двух дифференциальных уравнений.— Прикл. мат. и мех., 1953, т. 17, вып. 6, стр. 651—672.
- Красовский Н. Н. Теоремы об устойчивости движений, определяемых системой двух уравнений.— Прикл. мат. и мех., 1952, т. 16, вып. 5, стр. 547—554.
- Красовский Н. Н., Барбашин Е. А. Об устойчивости движений в целом.— ДАН СССР, 1952, т. 86, № 3, стр. 453—456.
- Крейн М. Г. Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Ин-т мат. АН УССР, К., 1964, 188 с.
- Крейн М. Г. О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости.— Прикл. мат. и мех., 1951, т. 15, вып. 3, стр. 323—348.
- Крейн М. Г., Любарский Г. Я. Об аналитических свойствах мультипликаторов периодических канонических дифференциальных систем положительного типа.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1962, т. 26, № 4, стр. 549—572.
- Крейн М. Г., Якубович В. А. Гамильтоновы системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.— Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям (Киев, сентябрь 1961 г.), 1963, т. 1, стр. 277—305.
- Крейн С. Г., Соболевский П. Е. Дифференциальное уравнение с абстрактным эллиптическим оператором в гильбертовом пространстве.— ДАН СССР, 1958, т. 118, № 2, стр. 232—236.
- Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Изд-во АН УССР, К., 1937, 363 с.
- Куклес И. С., Грузд М. О числе операций, связанных с применением метода Фроммера.— Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1958, № 1, стр. 29—45.
- Куклес И. С., Нуров Т. Н. О различении центра и фокуса.— Изв. вузов. Математика, 1963, № 6, стр. 98—108.
- Куклес И. С., Суяршаев А. М. Обобщенный метод Фроммера.— Изв. вузов. Математика, 1960, № 3, стр. 173—187.
- Куржанский А. Б. О вычислении оптимального управления в системе с неполной информацией.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 3, стр. 360—373.
- Кушков Н. Н. Некоторые теоремы о предельных циклах для системы нелинейных колебаний.— Усп. мат. наук, 1958, т. 13, вып. 2 (80), стр. 203—209.
- Лаврентьев И. М. Об одной теореме существования для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 11, стр. 1477—1481.
- Лаппо-Данилевский И. А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М., 1957, 456 с.
- Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов.— Автоматика и телемеханика, 1960, т. 21, вып. 4, стр. 436—441.
- Летов А. М. К теории качества нелинейных регулируемых систем.— Автоматика и телемеханика, 1953, т. 14, вып. 5, стр. 588—596.

- Л е т о в А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. Физматгиз, М., 1962, 483 с.
- Л е ф ш е ц С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. ИЛ, М., 1961, 387 с.
- Л и д с к и й В. Б., Г е л ь ф а н д И. М. О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодически коэффициентами. — Усп. мат. наук, 1955, т. 10, вып. 1 (63), стр. 3—40.
- Л у к а ш е в и ч Н. А. Интегральные кривые одного дифференциального уравнения. — Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 1, стр. 82—95.
- Л у к а ш е в и ч Н. А. К вопросу о замкнутых решениях дифференциальных уравнений. — ДАН БССР, 1960, т. 4, № 3, стр. 91—94.
- Л у р ь е А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. ГТТИ, М. — Л., 1951, 216 с.
- Л у р ь е А. И., А й з е р м а н М. А. Методы определения периодических движений в кусочно-линейных системах. — Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям. (Киев, сентябрь 1961 г.), 1963, т. 1, стр. 27—48.
- Л ы к о в а О. Б. Исследование решений системы $n + m$ нелинейных дифференциальных уравнений в окрестности интегрального многообразия. — Укр. мат. журн., 1964, т. 16, № 1, стр. 13—30.
- Л ы к о в а О. Б. О квазипериодических решениях системы, близкой к канонической. — Укр. мат. журн., 1964, т. 16, № 6, стр. 752—768.
- Л ы к о в а О. Б., М и т р о п о л ь с к и й Ю. А. Исследование поведения решений нелинейных уравнений в окрестности положения равновесия. Ин-т мат. АН УССР, К., 1964, 44 с.
- Л я п у н о в А. М. Исследование одного из особых случаев задачи об устойчивости движений. Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1963, 115 с.
- М а й е р А. Г. О центральных траекториях и проблеме Биркгофа. — Мат. сб., 1950, т. 26 (68), вып. 2, стр. 265—290.
- М а й е р А. Г., Л е о н т о в и ч Е. А. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории. — ДАН СССР, 1955, т. 103, № 4, стр. 557—560.
- М а л к и н И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, М., 1956, 491 с.
- М а л к и н И. Г. Теория устойчивости движения. ГИТТЛ, М., 1952, 431 с.
- М а р к о с я н С. А. Качественное исследование системы двух дифференциальных уравнений методом «двух изоклин». — Изв. вузов. Математика, 1959, № 1, стр. 114—128.
- М а р к о с я н С. А. Существование предельного цикла системы двух нелинейных дифференциальных уравнений. — ДАН АрмССР, 1960, т. 30, № 1, стр. 13—18.
- М а с л о в В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. Изд-во Моск. ун-та, М., 1965, 549 с.
- М и л л и о н щ и к о в В. М. Об устойчивости характеристических показателей предельных решений линейных систем. — ДАН СССР, 1966, т. 166, № 1, стр. 34—37.
- М и л л и о н щ и к о в В. М. Рекуррентные и почти периодические предельные траектории неавтономных систем дифференциальных уравнений. — ДАН СССР, 1965, т. 161, № 1, стр. 43—44.
- М и н ц Р. М. Исследование некоторых основных типов сложных состояний равновесия в трехмерном пространстве. — Мат. сб., 1964, т. 63 (105), вып. 2, стр. 169—214.
- М и н ц Р. М. О топологической эквивалентности некоторых состояний равновесия системы трех дифференциальных уравнений. — Научн. докл. высш. шк. Физ.-мат. науки, 1958, № 1, стр. 19—24.
- М и т р о п о л ь с к и й Ю. А. Метод интегральных многообразий в нелинейной механике. — Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям (Киев, сентябрь 1961 г.), 1963, т. 1, стр. 93—154.
- М и т р о п о л ь с к и й Ю. А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах. Изд-во АН УССР, К., 1955, 283 с.

- М и т р о п о л ь с к и й Ю. А. О построении общего решения нелинейных дифференциальных уравнений с помощью метода, обеспечивающего «ускоренную» сходимость.— Укр. мат. журн., 1964, т. 16, № 4, стр. 475—501.
- М и т р о п о л ь с к и й Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. «Наука», М., 1964, 431 с.
- М и т р о п о л ь с к и й Ю. А., Л ы к о в а О. Б. Об интегральном многообразии нелинейной системы в гильбертовом пространстве.— Укр. мат. журн., 1965, т. 17, № 5, стр. 43—53.
- М и т р о п о л ь с к и й Ю. О., С а м о й л е н к о А. М. До питання про структуру траєкторій на тороїдальних многовидах.— ДАН УРСР, 1964, № 8, стор. 984—986.
- М и щ е н к о Е. Ф. Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1957, т. 21, № 5, стр. 626—664.
- М и щ е н к о Е. Ф., П о н т р я г и н Л. С. Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близких к разрывным.— ДАН СССР, 1955, т. 102, № 5, стр. 889—891.
- М о и с е е в Н. Н., Р у м я н ц е в В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. «Наука», М., 1965, 439 с.
- М ы ш к и с А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. Гостехиздат, М.—Л., 1951, 256 с.
- М ы ш к и с А. Д. Об одном дифференциально-функциональном неравенстве.— Усп. мат. наук, 1960, т. 15, стр. 157—161.
- М ы ш к и с А. Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.— Усп. мат. наук, 1949, т. 4, вып. 5 (33), стр. 99—141; 1950, т. 5, вып. 2 (36), стр. 148—154.
- М ы ш к и с А. Д. Основные теоремы теории обыкновенных дифференциальных уравнений в неклассических случаях.— В кн.: Первая летняя математическая школа. Т. 2. «Наукова думка», К., 1964, стр. 45—116.
- М ы ш к и с А. Д., М и л ь м а н В. Д. Об устойчивости движения при наличии толчков.— Сиб. мат. журн., 1960, т. 1, № 2, стр. 233—237.
- М ы ш к и с А. Д., М и л ь м а н В. Д. Случайные толчки в линейных динамических системах.— В кн.: Вторая конференция по нелинейным колебаниям Резюме докладов. Варшава, 1962, стр. 19—22.
- М ы ш к и с А. Д., Р а б и н о в и ч И. М. Математик Пирс Боль из Риги. «Зинатне», Рига, 1965, 99 с.
- М ы ш к и с А. Д., Х о х р я к о в А. Я. Бушующие динамические системы. I. Особые точки на плоскости.— Мат. сб., 1958, т. 45 (87), вып. 3, стр. 401—414.
- М ы ш к и с А. Д., Ш и м а н о в С. Н., Э л ь с г о л ь ц Л. Э. Устойчивость и колебания систем с запаздыванием.— Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям (Киев, сентябрь 1961 г.), 1963, т. 2, стр. 241—267.
- Н е й м а р к Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний.— Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям (Киев, сентябрь 1961 г.), 1963, т. 2, стр. 268—307.
- Н е й м а р к Ю. И. О допустимости линеаризации при исследовании устойчивости.— ДАН СССР, 1959, т. 127, № 5, стр. 961—964.
- Н е й м а р к Ю. И. Устойчивость линеаризованных систем (дискретных и распределенных). Изд. Ленингр. высш. инж. акад., Л., 1949, 140 с.
- Н е м ы ц к и й В. В. Качественное интегрирование системы $\frac{dx}{dt} = Q(x, y);$
 $\frac{dy}{dt} = P(x, y)$ с помощью универсальных сетей ломаных.— Уч. зап. МГУ, 1946, вып. 100. Математика, т. 1, стр. 34—52.
- Н е м ы ц к и й В. В. Колебательные режимы многомерных динамических систем.— Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям (Киев, сентябрь 1961 г.), 1963, т. 2, стр. 308—314.

- Н е м ы ц к и й В. В. К теории орбит общих динамических систем.— Мат. сб., 1948, т. 23 (65), вып. 2, стр. 161—186.
- Н е м ы ц к и й В. В. Метод неподвижных точек в анализе.— Усп. мат. наук, 1936, вып. 1, стр. 141—175.
- Н е м ы ц к и й В. В. Некоторые методы исследования в целом характеристики уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$. — Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика, 1961, № 5, стр. 25—43.
- Н е м ы ц к и й В. В. Некоторые проблемы качественной теории дифференциальных уравнений.— Усп. мат. наук, 1954, т. 9, вып. 3 (61), стр. 39—56.
- Н е м ы ц к и й В. В. Некоторые современные проблемы качественной теории дифференциальных уравнений.— Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 4 (124), стр. 3—36.
- Н е м ы ц к и й В. В. О некоторых методах качественного исследования «в большом» многомерных автономных систем.— Труды Моск. мат. о-ва, 1956, т. 5, стр. 455—482.
- Н е м ы ц к и й В. В. Семинар по качественной теории дифференциальных уравнений в МГУ.— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 4 (76), стр. 235—240.
- Н е м ы ц к и й В. В. Топологические вопросы теории динамических систем.— Усп. мат. наук, 1949, т. 4, вып. 6 (34), стр. 91—153.
- Н е м ы ц к и й В. В., С т е п а н о в В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Изд. 2-е. ГТТИ, М.— Л., 1949, 550 с.
- Н е р с е с я н А. Б. О некоторых краевых задачах для уравнений нейтрального типа.— Труды Семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, 1963, т. 2, стр. 118—135.
- Н е р с е с я н А. Б. О применении некоторых операторов преобразования к краевым задачам для уравнений с запаздыванием.— Мат. сб., 1964, т. 63 (105), вып. 3, стр. 341—355.
- О т р о к о в Н. Ф. Кратные предельные циклы.— Мат. сб., 1957, т. 41 (83), вып. 4, стр. 417—430.
- О т р о к о в Н. Ф. О числе предельных циклов дифференциального уравнения в окрестности особой точки.— Мат. сб., 1954, т. 34 (76), вып. 1, стр. 127—144.
- П е р о в А. И. О двухточечной краевой задаче.— ДАН СССР, 1958, т. 122, № 6, стр. 982—985.
- П е р о в А. И. О топологических характеристиках решений многомерных дифференциальных уравнений.— ДАН СССР, 1964, т. 157, № 4, стр. 791—794.
- П е р о в А. И. Об одном обобщении теоремы Ролля.— Труды Семинара по функциональному анализу, 1958, вып. 6, стр. 94—98.
- П е р о в А. И. Периодические, почти периодические и ограниченные решения дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$.— ДАН СССР, 1960, т. 132, № 3, стр. 531—534.
- П е р с и д с к и й К. П. Дифференциальные уравнения в нелинейных пространствах.— Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. наук, 1965, № 1, стр. 10—18.
- П е р с и д с к и й К. П. К теории устойчивости решений дифференциальных уравнений.— Усп. мат. наук, 1946, т. 1, вып. 5-6 (15-16), стр. 250—256.
- П е р с и д с к и й К. П. Счетные системы дифференциальных уравнений и устойчивость их решения. Ч. 3. Основные теоремы устойчивости решений счетных дифференциальных уравнений.— Изв. АН КазССР. Сер. мат. и мех., 1960, вып. 9 (13), стр. 11—34.
- П е т р о в с к и й И. Г. О поведении интегральных кривых системы обыкновенных дифференциальных уравнений вблизи особой точки.— В кн.: П у а н к а р е А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Гостехиздат, М.— Л., 1947, 336—347.
- П е т р о в с к и й И. Г., Л а н д и с Е. М. О числе предельных циклов уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, где P и Q — многочлены второй степени.— Мат. сб., 1955, т. 37 (69), вып. 2, стр. 209—250.

- Петровский И. Г., Ландис Е. М. О числе предельных циклов уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, где P и Q — многочлены степени n . — ДАН СССР, 1957, т. 113, № 4, стр. 748—751.
- Пинни Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. ИЛ, М., 1961, 248 с.
- Плисс В. А. Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом. Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1958, 183 с.
- Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний. «Наука», М.—Л., 1964, 368 с.
- Плисс В. А. О существовании семейства периодических решений системы дифференциальных уравнений в случае нулевых корней. — Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 1, стр. 17—24.
- Пожарский Г. К. Характеристические показатели затухающих колебаний механических систем с частичной диссипацией. — Прикл. мат. и мех., 1965, т. 29, вып. 5, стр. 925—930.
- Понтрягин Л. С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1957, т. 21, № 5, стр. 605—626.
- Понтрягин Л. С., Андронов А. А. Грубые системы. — ДАН СССР, 1937, т. 14, № 5, стр. 247—250.
- Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, М., 1961, 391 с.
- Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф. Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близких к разрывным. — ДАН СССР, 1955, т. 102, № 5, стр. 889—891.
- Разумихин Б. С. Об устойчивости систем с запаздыванием. — Прикл. мат. и мех., 1956, т. 20, № 4, стр. 500—512.
- Разумихин Б. С. Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием. — Автоматика и телемеханика, 1960, т. 21, № 6, стр. 740—748.
- Разумихин Б. С. Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования с запаздыванием. — Инж. сб., 1960, т. 29, стр. 21—29.
- Разумихин Б. С. Устойчивость по первому приближению систем с запаздыванием. — Прикл. мат. и мех., 1958, т. 22, № 2, стр. 155—166.
- Рапопорт И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Изд-во АН УССР, К., 1954, 290 с.
- Рейзинь Л. Э. О гомеоморфизме систем дифференциальных уравнений в окрестностях замкнутых траекторий. — Мат. сб., 1964, т. 63 (105), вып. 3, стр. 392—408.
- Рейзинь Л. Э. — Поведение интегральных кривых системы дифференциальных уравнений вблизи особой точки в многомерном пространстве. — Изв. АН ЛатвССР, 1958, № 3, стр. 107—120.
- Репин Ю. М. Квадратичные функционалы Ляпунова для систем с запаздыванием. — Прикл. мат. и мех., 1965, т. 29, вып. 3, стр. 564—567.
- Репин Ю. М. О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами. — Прикл. мат. и мех., 1965, т. 29, вып. 2, стр. 226—235.
- Рубаник В. П. Применение асимптотического метода Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова к квазилинейным дифференциально-разностным уравнениям. — Укр. мат. журн., 1959, т. 11, вып. 4, стр. 446—450.
- Рудаков В. П. Существование интервала устойчивости движения. — В кн.: Всесоюзный симпозиум по качественной теории дифференциальных уравнений и ее применениям. Тезисы докладов. Самарканд, 1964, стр. 57—58.
- Рябов Ю. А. Применение метода малого параметра к исследованию систем автоматического регулирования с запаздыванием. — Автоматика и телемеханика, 1960, т. 21, № 6, стр. 729—739.
- Рябов Ю. А. Применение метода малого параметра Ляпунова — Пуанкаре в теории систем с запаздыванием. — Инж. журн., 1961, т. 1, № 2, стр. 3—15.

- С а б и р о в Т. К вопросу об устойчивости малых периодических решений.— ДАН СССР, 1965, т. 167, № 4, стр. 755—757.
- С а н с о н е Г. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1. ИЛ, М., 1953, 346 с. Т. 2, 1954, 415 с.
- С а р г с я н И. С. Асимптотическое поведение производных спектральной функции оператора Штурма — Лиувилля.— Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук, 1957, т. 10, вып. 3, стр. 3—16.
- С а р г с я н И. С. О дифференцировании разложений по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1957, т. 21, № 2, стр. 263—282.
- С а р г с я н И. С., Л е в и т а н Б. М. Теорема о сходимости дважды дифференцированного разложения по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля.— Изв. АН АрмССР. Физ.-мат., естеств. и тех. науки, 1956, т. 9, вып. 3, стр. 3—15.
- С а х а р н и к о в Н. А. Об условиях Фроммера существования центра.— Прикл. мат. и мех., 1948, т. 12, вып. 5, стр. 669—670.
- С а х а р н и к о в Н. А. Решение проблемы центра и фокуса в одном случае.— Прикл. мат. и мех., 1950, т. 14, вып. 6, стр. 651—658.
- С е м е н о в М. П. Односторонние оценки в условиях существования решений некоторых нелинейных краевых задач.— Научн. докл. высш. шк. Физ.-мат. науки, 1958, № 5, стр. 53—56.
- С и б и р с к и й К. С. Инварианты линейных представлений группы вращений плоскости и их приложения в качественной теории дифференциальных уравнений.— Диф. ур-я, 1966, т. 2, № 7, стр. 908—919.
- С и б и р с к и й К. С. О числе предельных циклов в окрестности особой точки.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 1, стр. 53—66.
- С и б и р с к и й К. С., П л е ш к а н И. И. Условия симметрии поля направлений некоторого дифференциального уравнения.— Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1957, т. 29, стр. 11—14.
- С к а ч к о в Б. Н. Вопросы устойчивости в целом и качества регулирования для некоторых систем дифференциальных уравнений. Ч. 2.— Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех. и astron., 1957, № 19, стр. 35—46.
- С к а ч к о в Б. Н. Качественная картина поведения интегральных кривых в окрестности особой точки в одном случае.— Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех. и astron., 1954, № 8, стр. 65—69.
- С м и р н о в В. И. Очерк основных научных трудов А. М. Ляпунова.— В кн.: Л я п у н о в А. М. Избр. труды. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1948, стр. 325—450.
- С м и р н о в В. И. Работы И. А. Лаппо-Данилевского по теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— В кн.: Л а п п о - Д а н и л е в с к и й И. А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. ГИТТЛ, М., 1957, стр. 5—18.
- С о б о л е в с к и й П. Е. О локальной и нелокальной теореме существования для нелинейных параболических уравнений второго порядка.— ДАН СССР, 1961, т. 136, № 2, стр. 292—295.
- С о б о л е в с к и й П. Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве с неограниченным переменным оператором, дробная степень которого имеет постоянную область определения.— ДАН СССР, 1961, т. 138, № 1, стр. 59—62.
- С о б о л е в с к и й П. Е. Об уравнениях с операторами, образующими острый угол.— ДАН СССР, 1957, т. 116, № 5, стр. 754—757.
- С о к о л о в Ю. Д. Деякі задачі аналітичної теорії диференціальних рівнянь динаміки.— Н.-Д. зб. Київськ. ун-ту, 1940, 83 с.
- С о к о л о в Ю. Д. Досліди з аналітичної динаміки.— Журн. Ін-ту мат. АН УРСР, 1937, № 3, стор. 25—36.
- С о к о л о в Ю. Д. Метод осреднения функциональных поправок. «Наукова думка», К., 1967, 335 с.
- С о к о л о в Ю. Д. О новом случае интегрируемости в прямолинейной задаче трех тел.— ДАН СССР, 1945, т. 46, № 3, стр. 99—102.

- С о к о л о в Ю. Д. О пространственном гомографическом движении системы трех материальных точек.— ДАН СССР, 1947, т. 58, № 3, стр. 369—371.
- С о к о л о в Ю. Д. О расчете фильтрации из канала трапециoidalного сечения.— ДАН СССР, 1951, т. 79, № 5, стр. 759—762.
- С о к о л о в Ю. Д. О траекториях общего соударения трех материальных точек, взаимодействующих с силами, зависящими от взаимных расстояний.— ДАН СССР, 1941, т. 33, № 2, стр. 112—115.
- С о к о л о в Ю. Д. Особые траектории системы свободных материальных точек. Изд-во АН УССР, К., 1951, 122 с.
- С о к о л о в Ю. Д. Про особливі траєкторії в задачі трьох тіл, які обопільно притягаються пропорціонально їх масам і якійсь функції відповідного віддалення.— Журн. Ін-ту мат. УАН, 1935, № 3-4, стор. 11—34.
- С о к о л о в Ю. Д. Пространственные траектории общего соударения системы материальных точек, находящихся под действием взаимных сил.— Сб. трудов Ин-та мат. АН УССР, 1948, № 11, стр. 3—23.
- С о к о л о в Ю. Д. Умови загального співудару трьох тіл, що обопільно притягаються за законом Ньютона.— Праці Фіз.-мат. відділу УАН, 1928, т. 9, вып. 1, стор. 3—62.
- С т р ы г и н В. В. О вычислении вращения некоторых специальных векторных полей.— ДАН ТаджССР, 1964, т. 7, № 7, стр. 8—11.
- Т а б у е в а В. А. К вопросу о форме области притяжения нулевого решения дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x, \dot{x})$.— Изв. вузов. Математика, 1958, № 4, стр. 248—265.
- Т а б у е в а В. А. К вопросу о форме области притяжения нулевого решения некоторого дифференциального уравнения второго порядка.— Мат. сб., 1959, т. 47 (89), вып. 2, стр. 209—220.
- Т а б у е в а В. А. Оценка сепаратрис методом последовательных приближений.— Изв. вузов. Математика, 1960, № 2, стр. 178—189.
- Т а б у е в а В. А. Последовательные приближения Трикоми для нахождения периодического по x решения дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x, \dot{x})$.— Изв. вузов. Математика, 1959, № 6, стр. 169—173.
- Т а м а р к и н Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольной функции в ряды. Петроград, 1917, 308 с.
- Т и х о н о в А. Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра.— Мат. сб., 1948, т. 22 (61), вып. 2, стр. 193—204.
- Т и х о н о в А. Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры.— Мат. сб., 1950, т. 27 (69), вып. 1, стр. 147—156.
- Т и х о н о в А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных.— Мат. сб., 1952, т. 31 (73), вып. 3, стр. 375—386.
- Т р и к о м и Ф. Дифференциальные уравнения. ИЛ, М., 1962, 351 с.
- Т у з о в А. П. О необходимых и достаточных условиях устойчивости в «целом» для одной системы регулирования.— ДАН БССР, 1960, т. 4, № 3, стр. 101—105.
- Ф е д о р ю к М. В., Е в г р а ф о в М. А. Асимптотика решений уравнения $\omega''(z) - p(z, \lambda)\omega(z) = 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ в комплексной плоскости z .— Усп. мат. наук, 1966, т. 21, вып. 1 (127), стр. 3—50.
- Ф е щ е н к о С. Ф., Ш к и л ь Н. И., Н и к о л е н к о Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. «Наукова думка», К., 1966, 248 с.
- Ф и л а т о в А. Н. Обобщенные ряды Ли и некоторые их приложения. Изд-во АН УзССР, Ташкент, 1963, 106 с.
- Ф о д ч у к В. И. О существовании и свойствах интегрального многообразия для одного класса систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.— Труды Семинара по математической физике и нелинейным колебаниям, 1963, т. 1, вып. 1, стр. 111—134.
- Х а и м о в Н. Б. Об уравнениях, в правых частях которых имеются линейные члены.— Уч. зап. Сталинабад. пед. ин-та, 1952, № 2, стр. 3—31.

- Халиков Х. С. Об устойчивости «в большом» интегралов дифференциальных уравнений.— Изв. Казанск. физ.-мат. о-ва, 1937, т. 9, сер. 3, стр. 31—59.
- Харатишвили Г. Л. Оптимальные в смысле быстрогодействия процессы в линейных управляемых системах с запаздыванием.— Сообщ. АН ГрССР, 1964, т. 33, № 1, стр. 3—7.
- Харатишвили Г. Л. Принцип максимума в теории оптимальных процессов с запаздыванием.— ДАН СССР, 1961, т. 136, № 1, стр. 39—42.
- Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. ИЛ, М., 1962, 829 с.
- Хорошилов В. В. О решениях систем линейных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой.— Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат., 1950, № 137, вып. 19, стр. 180—197.
- Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. «Мир», М., 1964, 477 с.
- Черкас Л. А. Аналитическая структура решений уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{\mu y + \sum_{i+k=n} \alpha_{ik} x^i y^k}{\mu x + \sum_{i+k=n} \beta_{ik} x^i y^k}$. — ДАН БССР, 1963, т. 7, № 8, стр. 516—519.
- Черкас Л. А. Об алгебраических решениях уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, где P и Q — многочлены второй степени.— ДАН БССР, 1963, т. 7, № 11, стр. 732—735.
- Черкас Л. А. О комплексных циклах одного дифференциального уравнения.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 2, стр. 182—186.
- Четаев Н. Г. Устойчивость движений. Работы по аналитической механике. Изд-во АН СССР, М., 1962, 535 с.
- Чечик В. А. Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью.— Труды Моск. мат. о-ва, 1959, т. 8, стр. 155—198.
- Шестаков А. А. Об асимптотическом поведении многомерных систем дифференциальных уравнений.— Уч. зап. Всесоюз. заочн. ин-та инж. ж.-д. транспорта, 1961, вып. 7, стр. 3—104.
- Шестаков А. А. Об асимптотическом поведении решений многомерной системы дифференциальных уравнений, имеющих особую точку высшего порядка.— Сиб. мат. журн., 1961, т. 2, № 5, стр. 767—788.
- Шестаков А. А. Поведение интегральных кривых системы вида $\frac{dx_1}{dt} = X_1(x_1); \frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1, x_i) + X_i(x_1, \dots, x_n)$ в окрестности особой точки.— ДАН СССР, 1948, т. 62, № 5, стр. 591—594.
- Шиманов С. Н. К теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием времени.— Прикл. мат. и мех., 1963, т. 27, вып. 3, стр. 450—458.
- Шиманов С. Н. К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 1, стр. 102—116.
- Шиманов С. Н. Об отыскании характеристических показателей систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.— Прикл. мат. и мех., 1958, т. 22, вып. 3, стр. 382—385.
- Шиманов С. Н. Об устойчивости квазигармонических систем с запаздыванием.— Прикл. мат. и мех., 1961, т. 25, вып. 6, стр. 992—1002.
- Шиманов С. Н. О почти периодических колебаниях в нелинейных системах с запаздыванием.— ДАН СССР, 1959, т. 125, № 6, стр. 1203—1206.
- Шиманов С. Н. О почти периодических колебаниях квазилинейных систем с запаздыванием времени в случае вырождения.— ДАН СССР, 1960, т. 133, № 1, стр. 36—39.

- Ш то к а л о И. З. Критерий устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами.— Мат. сб., 1946, т. 19 (61), вып. 2, стр. 263—286.
- Ш то к а л о Й. З. Важливі дослідження в галузі аналітичної теорії диференціальних рівнянь.— Вісн. Київськ. ун-ту. Сер. мат. та мех., 1961, т. 4, вип. 1, стор. 19—26.
- Ш то к а л о И. З. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Изд-во АН УССР, К., 1960, 78 с.
- Ш то к а л о И. З. Операционные методы и их развитие в теории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Изд-во АН УССР, К., 1961, 126 с.
- Щ е р б а к о в Б. А. Динамические системы в работах Кишиневского семинара по качественной теории дифференциальных уравнений.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 2, стр. 260—266.
- Э л ь с г о л ь ц Л. Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. «Наука», М., 1964, 127 с.
- Э л ь с г о л ь ц Л. Э. Основные направления развития теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— Труды Семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, 1962, т. 1, стр. 3—19.
- Я б л о н с к и й А. И. Асимптотическое разложение правильных решений некоторых классов дифференциальных уравнений.— ДАН БССР, 1964, т. 8, № 2, стр. 77—80.
- Я б л о н с к и й А. И. Дифференциальные уравнения с решениями без особых точек в конечной плоскости.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 1, стр. 67—78.
- Я б л о н с к и й А. И. О вычетах полюсов решений второго уравнения Пенлеве.— ДАН БССР, 1960, т. 4, № 2, стр. 47—50.
- Я б л о н с к и й А. И. О предельных циклах одного дифференциального уравнения.— Диф. ур-я, 1966, т. 2, № 3, стр. 335—344.
- Я б л о н с к и й А. И. О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-тех. наук, 1959, № 3, стр. 30—35.
- Я к у б о в и ч В. А. Об устойчивости в целом невозмущенного движения для уравнений непрямого автоматического регулирования.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 19, стр. 172—176.
- Я к у б о в и ч В. А. Оценка характеристических показателей системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.— Прикл. мат. и мех., 1954, т. 18, вып. 5, стр. 533—546.
- Я к у б о в и ч В. А. Распространение метода Ляпунова определения ограниченности решений $y'' + p(t)y = 0$, $p(t + \omega) = p(t)$ на случай знакопеременной функции $p(t)$.— Прикл. мат. и мех., 1954, т. 18, вып. 6, стр. 705—718.
- Я к у б о в и ч В. А. Условия устойчивости в целом для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений автоматического регулирования.— ДАН СССР, 1960, т. 135, № 1, стр. 26—29.

К главе IV. Дифференциальные уравнения с частными производными

- А г р а н о в и ч М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы.— Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 5 (125), стр. 3—120.
- А г р а н о в и ч М. С., В и ш и к М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида.— Усп. мат. наук, 1964, т. 19, вып. 3 (117), стр. 53—161.
- А г р а н о в и ч М. С., Д ы н и н А. С. Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области.— ДАН СССР, 1962, т. 146, № 3, стр. 511—514.
- А л е к с а н д р о в А. Д. Условия единственности и оценки решения задачи Дирихле.— Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астрон., 1963, № 13, вып. 3, стр. 5—29.
- А л е к с е е в А. С. Задачи типа Лэмба для волнового уравнения в линейно-неоднородном полупространстве.— Уч. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат. наук, 1958, № 246, вып. 32, стр. 167—227.

- А л е н и ц ы н А. Г. О задаче Лэмба для неоднородного упругого полупространства.— В кн.: Проблемы математической физики. Спектральная теория и волновые процессы. Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1966, стр. 5—32.
- Б а б и ч В. М. К вопросу о распространении функций.— Усп. мат. наук, 1953, т. 8, вып. 2 (54), стр. 111—113.
- Б а б и ч В. М. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов.— ДАН СССР, 1956, т. 110, № 3, стр. 355—357.
- Б а б и ч В. М. О коротковолновой асимптотике функции Грина для внешности ограниченной выпуклой области.— ДАН СССР, 1962, т. 146, № 3, стр. 571—573.
- Б а б и ч В. М. О коротковолновой асимптотике функции Грина для уравнения Гельмгольца.— Мат. сб., 1964, т. 65 (107), вып. 4, стр. 576—630.
- Б а б и ч В. М. Оценка функции Грина для уравнения Гельмгольца в зоне тени.— Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном., 1965, № 7, вып. 2, стр. 5—15.
- Б а б и ч В. М., О л и м п и е в И. В. Оценки поля в области тени при дифракции цилиндрической волны на ограниченном выпуклом цилиндре.— В кн.: Третий Всесоюзный симпозиум по дифракции волн (Тбилиси, 24—30 сентября 1964), «Наука», М., 1964, стр. 104—105.
- Б а б и ч В. М., Р у с а к о в а Н. Я. О распространении волн Рэлея по поверхности неоднородного упругого тела произвольной формы.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1962, т. 2, № 4, стр. 652—665.
- Б а р а н о в с к и й Ф. Т. Задача Коши для линейного гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося на начальной плоскости.— Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, 1958, т. 166, стр. 227—254.
- Б а р а н о в с к и й Ф. Т. Смешанная задача для линейного гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося на начальной плоскости.— Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, 1958, т. 183, стр. 23—58.
- Б а с с Г. И., К о с т ю ч е н к о А. Г. О принципе предельной амплитуды.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат., мех., астроном., физ., хим., 1959, № 5, стр. 153—163.
- Б е р е з а н с к и й Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. «Наукова думка», К., 1965, 798 с.
- Б е р е з а н с к и й Ю. М. Энергетические неравенства для некоторых классов уравнений смешанного типа.— ДАН СССР, 1960, т. 131, № 3, стр. 478—481; т. 132, № 1, стр. 9—12.
- Б е р е з и н И. С. О задаче Коши для линейных уравнений второго порядка с начальными данными на линии параболичности.— Мат. сб., 1949, т. 24, вып. 2 (66), стр. 301—320.
- Б е р н ш т е й н С. Н. Собрание сочинений. Т. III. Дифференциальные уравнения, вариационное исчисление и геометрия (1903—1947). Изд-во АН СССР, М., 1960, 439 с.
- Б и р м а н М. Ш. О многомерных краевых задачах с малым параметром при старших производных.— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 6 (78), стр. 212—213.
- Б и р м а н М. Ш., С к в о р ц о в Г. Е. О квадратичной суммируемости старших производных решения задачи Дирихле в области с кусочно-гладкой границей.— Изв. вузов. Математика, 1962, № 5 (30), стр. 12—21.
- Б и ц а д з е А. В. К проблеме уравнений смешанного типа.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1953, т. 41, 60 с.
- Б и ц а д з е А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. «Наука», М., 1966, 203 с.
- Б и ц а д з е А. В. Об уравнениях смешанного типа в трехмерных областях.— ДАН СССР, 1962, т. 143, № 5, стр. 1017—1019.
- Б и ц а д з е А. В. Уравнения смешанного типа. Изд-во АН СССР, М., 1959, 164 с.
- Б и ц а д з е А. В. и С а л а х и т д и н о в М. С. К теории уравнений смешанно-составного типа.— Сиб. мат. журн., 1961, т. 2, № 1, стр. 7—19.
- Б о р о в и к о в В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. «Наука», М., 1966, 455 с.
- Б о р о в и к о в В. А. О функции Грина для задачи дифракции на многогранном угле.— ДАН СССР, 1963, т. 151, № 2, стр. 251—254.

- Б о я р с к и й Б. В. Некоторые граничные задачи для системы 2 n уравнений эллиптического типа на плоскости.— ДАН СССР, 1959, т. 124, № 1, стр. 15—18.
- Б р у ш л и н с к а я Н. Н. О поведении решений уравнений гидродинамики при переходе числа Рейнольдса через критическое значение.— ДАН СССР, 1965, т. 162, № 4, стр. 731—734.
- Б у л д ы р е в В. С. Волновое поле в окрестности каустик в нестационарных задачах дифракции в случае сферических и цилиндрических границ раздела сред.— В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, сб. 5. Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1961, стр. 210—232.
- Б у л д ы р е в В. С. Коротковолновая асимптотика собственных функций уравнения Гельмгольца.— ДАН СССР, 1965, т. 163, № 4, стр. 853—856.
- Б у л д ы р е в В. С. Об исследовании точных решений нестационарных задач дифракции в окрестности волновых фронтов.— ДАН СССР, 1959, т. 129, № 2, стр. 291—294.
- Б у л д ы р е в В. С., М о л о т к о в И. А. Исследование точных решений нестационарных задач дифракции в окрестности фронтов соскальзывания.— ДАН СССР, 1960, т. 134, № 5, стр. 1051—1054.
- Б у л д ы р е в В. С., М о л о т к о в И. А. О нестационарном распространении волн в однородных и изотропных средах, разделенных цилиндрической или сферической границами.— Уч. зап. Ленингр. ун-та, 1958, № 246. Сер. мат. наук, вып. 32, стр. 261—321.
- Б у л д ы р е в В. С., П о п о в М. М. Применение лучевого метода для вычисления собственных частот многозеркальных резонаторов.— Оптика и спектроскопия, 1966, т. 20, № 5, стр. 905—908.
- Б у с л а е в В. С. Коротковолновая асимптотика в задачах дифракции на гладких выпуклых контурах.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1964, т. 73, стр. 14—118.
- Б у с л а е в В. С. О формулах коротковолновой асимптотики в задаче дифракции на выпуклых телах.— Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном., 1962, вып. 13, стр. 5—21.
- Б у с л а е в В. С. Применение континуальных интегралов для вывода коротковолновой асимптотики в дифракционных задачах.— ДАН СССР, 1965, т. 160, № 3, стр. 566—569.
- Б у с л а е в В. С. Формулы следов для оператора Шредингера в трехмерном пространстве.— ДАН СССР, 1962, т. 143, № 5, стр. 1067—1070.
- Б ы к о в В. П. Геометрическая оптика трехмерных колебаний в открытых резонаторах.— В кн.: Электроника больших мощностей, 4. «Наука», М., 1965, стр. 66—92.
- В а й н б е р г Б. Р. О гипоеллиптических уравнениях во всем пространстве и принципе предельного поглощения.— ДАН СССР, 1964, т. 155, № 1, стр. 20—23.
- В а й н б е р г Б. Р. Принципы излучения, предельного поглощения и предельной амплитуды в общей теории уравнений с частными производными.— Усп. мат. наук, 1966, т. 21, вып. 3 (129), стр. 115—194.
- В а й н ш т е й н Л. А. Лучевые потоки в трехосном эллипсоиде.— В кн: Электроника больших мощностей, 4. «Наука», М., 1965, стр. 93—105.
- В а й н ш т е й н Л. А. Открытые резонаторы с цилиндрическими зеркалами.— Журн. техн. физ., 1964, т. 34, вып. 2, стр. 205—217.
- В а й н ш т е й н Л. А., Ф е д о р о в А. А. Рассеяние плоских и цилиндрических волн на эллиптическом цилиндре и концепция дифракционных лучей.— Радиотехника и электроника, 1961, т. 6, № 1, стр. 31—46.
- В е д е н с к а я Н. Д. Об одной краевой задаче для уравнений эллиптического типа, вырождающихся на границе области.— ДАН СССР, 1953, т. 91, № 4, стр. 711—714.
- В е к у а И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. ОГИЗ, М.— Л., 1948, 296 с.
- В е к у а И. Н. Обобщенные аналитические функции. Физматгиз, М., 1959, 628 с.
- В е н т ц е л ь Т. Д. Квазилинейные параболические системы с растущими коэффициентами.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, мат., мех., 1963, № 6, стр. 34—44.

- Вентцель Т. Д. О применении метода конечных разностей к решению первой краевой задачи для уравнений параболического типа.— Мат. сб., 1956, т. 40 (82), вып. 1, стр. 101—122.
- Визитей В. Н., Маркус А. С. О сходимости кратных разложений по системе собственных и присоединенных векторов операторного пучка.— Мат. сб., 1965, т. 66 (108), № 2, стр. 287—320.
- Вишик М. И. Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения.— Мат. сб., 1956, т. 39 (81), вып. 1, стр. 51—148.
- Вишик М. И. Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющие дивергентную форму.— Труды Моск. мат. о-ва, 1963, т. 12, стр. 125—184.
- Вишик М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области.— Мат. сб., 1954, т. 35 (77), вып. 3, стр. 513—568.
- Вишик М. И. Метод ортогональных проекций и прямых разложений в теории эллиптических дифференциальных уравнений.— Мат. сб., 1949, т. 25 (67), вып. 2, стр. 189—234.
- Вишик М. И. О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков.— Мат. сб., 1962, т. 59 (101) (доп.), стр. 289—325.
- Вишик М. И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений.— Мат. сб., 1951, т. 29 (71), вып. 3, стр. 615—676.
- Вишик М. И., Ладыженская О. А. Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений.— Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 6 (72), стр. 41—97.
- Вишик М. И., Люстерник Л. А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями.— Усп. мат. наук, 1960, т. 15, вып. 4 (94), стр. 27—95.
- Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 5 (77), стр. 3—122.
- Вишик М. И., Эскин Г. И. Общие параболические интегро-дифференциальные уравнения.— Усп. мат. наук, 1964, т. 19, вып. 6 (120), стр. 224—226.
- Вишик М. И., Эскин Г. И. Уравнения в свертках в ограниченной области.— Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 3 (123), стр. 89—152.
- Волков Е. А. К численному решению задачи Лаврентьева — Бицадзе.— ДАН СССР, 1955, т. 103, № 5, стр. 755—759.
- Вольперт А. И. Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости.— Усп. мат. наук, 1960, т. 15, вып. 3 (93), стр. 189—191.
- Вольперт А. И. Об индексе систем многомерных сингулярных интегральных уравнений.— ДАН СССР, 1963, т. 152, № 6, стр. 1292—1294.
- Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, сб. 5. Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1961, 314 с.
- Ворович И. И., Юдович В. И. Стационарное течение вязкой жидкости.— ДАН СССР, 1959, т. 124, № 3, стр. 542—545.
- Вострова Л. Е. Смешанная краевая задача для общего уравнения Лаврентьева — Бицадзе.— Уч. зап. Куйбыш. пед. ин-та, 1959, вып. 29, стр. 45—66.
- Вострова Л. Е. Смешанная краевая задача для уравнения $u_{xx} + \operatorname{sgn} u u_{yy} - u = 0$.— Уч. зап. Куйбыш. пед. ин-та, 1958, вып. 21, стр. 249—267.
- Гельфанд И. М. Об эллиптических уравнениях.— Усп. мат. наук, 1960, т. 15, вып. 3 (93), стр. 121—132.
- Гельфанд И. М., Шолов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— В кн.: Обобщенные функции. Вып. 3. Физматгиз, М., 1958, 274 с.
- Гельчинский Б. Я. Некоторые вопросы распространения волн в однородной и изотропной упругой сфере. Ч. I.— Уч. зап. Ленингр. ун-та, Сер. мат. наук, 1958, № 246, вып. 32, стр. 322—345.

- Г о д у н о в С. К., Р я б е н ь к и й В. С. Спектральные признаки устойчивости краевых задач для несамосопряженных разностных уравнений.— Усп. мат. наук, 1963, т. 18, вып. 3 (111), стр. 3—14.
- Г о л о в к и н К. К. Примеры неединственности и малой устойчивости решений уравнений гидромеханики.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1965, т. 5, № 4, стр. 667—679.
- Г о р и н Е. А. Частично гипоеллиптические дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами.— Сиб. мат. журн., 1962, т. 3, № 4, стр. 500—526.
- Г р у ш и н В. В. О фундаментальных решениях гипоеллиптических уравнений.— Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 4 (100), стр. 147—153.
- Г р у ш и н В. В. Связь между локальными и глобальными свойствами решений гипоеллиптических уравнений с постоянными коэффициентами.— Мат. сб., 1965, т. 66, вып. 4 (108), стр. 525—551.
- Г у с е в а О. В. О краевых задачах для сильно эллиптических систем.— ДАН СССР, 1955, т. 102, № 6, стр. 1069—1072.
- Г ю н т е р Н. М. К задаче о малых колебаниях струны.— Уч. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат. наук, 1948, вып. 15, стр. 23—74.
- Г ю н т е р Н. М. О движении жидкости, заключенной в данном перемещающемся сосуде.— Изв. АН СССР, Отд. физ.-мат. наук, VI сер., 1926, т. 20, № 13 и 14, стр. 1323—1348; № 15—17, стр. 1503—1532; 1927, т. 21, № 7—8, стр. 621—656, № 15—17, стр. 1139—1162; VII сер., 1928, № 1, стр. 9—30.
- Г ю н т е р Н. М. Об уравнениях гидродинамики.— Журн. физ.-мат. об-ва, Л., 1927, т. 1, вып. 2, стр. 240—247.
- Г ю н т е р Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. Гостехиздат, М., 1953, 416 с.
- Д е в и н г т а л ь Ю. В. К вопросу о существовании и единственности решения задачи Франкля.— Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 1 (85), стр. 177—182.
- Д ж у р а е в Т. Д. Об уравнениях смешанно-составного типа.— Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1961, № 6, стр. 3—14.
- Д и к о п о л о в Г. В., Ш и л о в Г. Е. О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1960, т. 24, № 3, стр. 369—380.
- Д у б и н с к и й Ю. А. Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях.— Мат. сб., 1965, т. 67, вып. 4 (109), стр. 609—643.
- Д ы н и н А. С. Многомерные эллиптические краевые задачи с одной неизвестной функцией.— ДАН СССР, 1961, т. 141, № 2, стр. 285—287.
- Д ы н и н А. С. Сингулярные операторы произвольного порядка на многообразии.— ДАН СССР, 1961, т. 141, № 1, стр. 21—23.
- З а г о р с к и й Т. Я. Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа. Изд-во Львовск. ун-та, Львов, 1961, 115 с.
- З в о л и н с к и й Н. В. Отраженные и головные волны, возникающие на плоской границе раздела двух упругих сред. I—III.— Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1957, № 10, стр. 1201—1218; 1958, № 1, стр. 3—16, № 2, стр. 165—174.
- З в о л и н с к и й Н. В. Распространение возмущения от точечного импульса в упругом полупространстве, покрытом слоем жидкости.— ДАН СССР, 1948, т. 59, № 6, стр. 1081—1084.
- И в а н о в В. И. Дифракция коротких волн на гладком выпуклом цилиндре.— Научн. докл. высш. шк. Физ.-мат. науки, 1958, № 6, стр. 192—196.
- И в а н о в В. И. Коротковолновая асимптотика дифракционного поля в тени идеального параболического цилиндра.— Радио техника и электроника, 1960, т. 5, № 3, стр. 393—402.
- И в а н о в В. И. Коротковолновая асимптотика функции Грина параболоида вращения.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1961, т. 1, № 1, стр. 90—104.
- И л ь и н А. М. Вырождающиеся эллиптические и параболические уравнения.— Мат. сб., 1960, т. 50 (92), вып. 4, стр. 443—498.
- И л ь и н А. М., К а л а ш н и к о в А. С., О л е й н и к О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа.— Усп. мат. наук, 1962, т. 17, вып. 3 (105), стр. 3—147.

- Ильин В. А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений.— Усп. мат. наук, 1960, т. 15, вып. 2 (92), стр. 97—154.
- Ильин В. А. О сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа.— Усп. мат. наук, 1958, т. 13, вып. 1 (79), стр. 87—180.
- Ильин В. А., Шишмарев И. А. Метод потенциалов для задач Дирихле и Неймана в случае уравнений с разрывными коэффициентами.— Сиб. мат. журн., 1961, т. 2, № 1, стр. 46—58.
- Камынин Л. И. О существовании решения краевых задач для параболического уравнения с разрывными коэффициентами.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, т. 28, № 4, стр. 721—744.
- Капилевич М. Б. Об одном уравнении смешанного эллиптического-гиперболического типа.— Мат. сб., 1952, т. 30 (72), № 1, стр. 11—38.
- Карапетян К. И. О задаче Коши для уравнения гиперболического типа, вырождающегося на начальной плоскости.— ДАН СССР, 1956, т. 106, № 6, стр. 963—966.
- Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области.— ДАН СССР, 1951, т. 77, № 2, стр. 181—183.
- Келдыш М. В. О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле.— Усп. мат. наук, 1941, вып. 8, стр. 171—292.
- Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых несамосопряженных операторов.— ДАН СССР, 1951, т. 77, № 1, стр. 11—14.
- Келдыш М. В., Лаврентьев М. А. Об устойчивости решения задачи Дирихле.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1937, № 4, стр. 551—593.
- Кошелев А. И. Априорные оценки в L_p и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем.— Усп. мат. наук, 1958, т. 13, вып. 4 (82), стр. 29—88.
- Кошелев А. И. Об ограниченности в L_p высших производных решений эллиптических дифференциальных уравнений.— Мат. сб., 1956, т. 38 (80), вып. № 3, стр. 359—372.
- Краснов М. Л. Смешанные краевые задачи для вырождающихся линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка.— Мат. сб., 1959, т. 49 (91), вып. 1, стр. 29—84.
- Крауклис П. В., Молотков И. А. О низкочастотных колебаниях пластины на упругом полупространстве.— Прикл. мат. и мех., 1963, г. 27, вып. 5, стр. 947—951.
- Крживицки А., Ладыженская О. А. Метод сеток для уравнений Навье — Стокса.— ДАН СССР, 1966, т. 167, № 2, стр. 309—311.
- Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. Физматгиз, М., 1963, 472 с.
- Лаврентьев М. А. Общая задача теории квазиконформных отображений на плоскости.— Мат. сб., 1947, т. 21 (63), вып. 2, стр. 285—320.
- Лаврентьев М. А., Бицадзе А. В. К проблеме уравнений смешанного типа.— ДАН СССР, 1950, т. 70, № 3, стр. 373—376; № 4, стр. 561—564.
- Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Геометрические свойства решений нелинейных систем уравнений с частными производными.— ДАН СССР, 1957, т. 112, № 5, стр. 810—811.
- Лаврентьев М. М. О задаче Коши для линейного эллиптического уравнения второго порядка.— ДАН СССР, 1957, т. 112, № 2, стр. 195—197.
- Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1962, 92 с.
- Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Физматгиз, М., 1961, 203 с.
- Ладыженская О. А. Метод конечных разностей в теории уравнений с частными производными.— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 5 (77), стр. 123—148.
- Ладыженская О. А. О замыкании эллиптического оператора.— ДАН СССР, 1951, т. 79, № 5, стр. 723—725.
- Ладыженская О. А. О принципе предельной амплитуды.— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 3 (75), стр. 161—164.
- Ладыженская О. А. О решении общей задачи дифракции.— ДАН СССР, 1954, т. 96, № 3, стр. 433—436.

- Ладыженская О. А. Об одном способе приближенного решения задачи Лаврентьева — Бицадзе. — Усп. мат. наук, 1954, т. 9, вып. 4 (62), стр. 187—189.
- Ладыженская О. А. Об уравнениях с малым параметром при старших производных в линейных дифференциальных уравнениях с частными производными — Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 7, вып. 2, стр. 104—120.
- Ладыженская О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. Гостехиздат, М., 1953, 280 с.
- Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. «Наука», М., 1967, 736 с.
- Ладыженская О. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. «Наука», М., 1964, 538 с.
- Лазуткин В. Ф. О разложении по собственным функциям несамосопряженного оператора, связанного с преобразованием Ватсона. — Вестн. Ленингр. ун-та, 1966, № 1, стр. 38—50.
- Ландис Е. М. Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений. — Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 1 (85), стр. 24—85.
- Ландис Е. М. О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений. — ДАН СССР, 1956, т. 107, № 5, стр. 640—643.
- Левин М. Л., Рытов С. М. О переходе к геометрическому приближению в теории упругости. — Акуст. журн., 1956, т. 2, вып. 2, стр. 173—176.
- Левитан Б. М. О разложении по собственным функциям самосопряженного уравнения с частными производными. — Труды Моск. мат. об-ва, 1956, т. 5, стр. 269—298.
- Левитан Б. М. Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка. ГИТТЛ, М.—Л., 1950, 160 с.
- Леонтович М. А. Об одном методе решения задач о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли. — Изв. АН СССР. Сер. физ., 1944, т. 8, № 1, стр. 16—22.
- Леонтович М. А., Фок В. А. Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли по методу параболического уравнения. — Журн. exper. и теор. физ., 1946, т. 16, вып. 7, стр. 557—573.
- Лидский В. Б. О разложении в ряд Фурье по главным функциям несамосопряженного эллиптического оператора. — Мат. сб., 1962, т. 57 (99), вып. 2, стр. 137—150.
- Лидский В. Б. О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов. — Труды Моск. мат. об-ва, 1962, т. 11, стр. 3—35.
- Лидский В. Б. Условия полноты системы корневых подпространств у несамосопряженных операторов с дискретным спектром. — Труды Моск. мат. об-ва, 1959, т. 8, стр. 83—120.
- Ломоносов М. И. О количестве собственных значений квантовой задачи рассеяния. — Труды Арт. академии им. Говорова, Харьков, 1962, № 63.
- Лопатинский Я. Б. Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. — Укр. мат. журн., 1953, № 2, стр. 123—151.
- Люстерник Л. А. — Проблема Дирихле. — Усп. мат. наук, 1941, вып. 8, стр. 115—124.
- Мазья В. Г. К теории многомерного оператора Шредингера. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, т. 28, № 5, стр. 1145—1172.
- Мазья В. Г. Некоторые оценки решений эллиптических уравнений второго порядка. — ДАН СССР, 1961, т. 137, № 5, стр. 1057—1059.
- Макаренко Г. И. Краевые задачи для вырождающихся параболических уравнений. — Труды Моск. энергетическ. ин-та, 1956, вып. 28, стр. 5—24.
- Малюжинец Г. Д., Вайнштейн Л. А. Поперечная диффузия при дифракции на импедансном цилиндре большого радиуса. — Радиотехника и электроника, 1961, т. 6, № 8, стр. 1247—1258.
- Мархасев Г. С. Головные волны в упругих средах с плоской границей. — Прикл. мат. и мех., 1955, т. 19, вып. 2, стр. 165—178.
- Масленикова В. Н. Первая краевая задача для квазилинейных систем диффузии. — ДАН СССР, 1963, т. 150, № 5, стр. 991—994.

- М а с л о в В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. Изд-во Моск. ун-та, М., 1965, 549 с.
- М и х л и н С. Г. Вырождающиеся эллиптические уравнения.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1954, № 8, стр. 19—48.
- М и х л и н С. Г. О некоторых оценках, связанных с функцией Грина.— ДАН СССР, 1951, т. 78, № 3, стр. 443—446.
- М и х л и н С. Г. О применимости вариационного метода к некоторым вырождающимся эллиптическим уравнениям.— ДАН СССР, 1953, т. 91, № 4, стр. 723—726.
- М и х л и н С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. ГИТТЛ, М.—Л., 1952, 216 с.
- М о л о т к о в И. А. Нестационарное распространение волн в неоднородной среде при образовании области геометрической тени.— ДАН СССР, 1961, т. 140, № 3, стр. 557—559.
- М о л о т к о в И. А. Распространение волн в неоднородном полупространстве с показателем преломления, зависящим от двух координат.— В кн.: Проблемы дифракции и распространения волн, вып. 6. Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1966, стр. 89—104.
- М о л о т к о в Л. А. О распространении упругих волн в средах, содержащих тонкие плоско-параллельные слои.— В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Сб. 5. Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1961, стр. 240—280.
- М о л о т к о в Л. А., К р а у к л и с П. В. Об образовании низкочастотной головной волны в тонких слоях.— Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1963, № 6, стр. 946—948.
- Н а р ы ш к и н а Е. А. О колебаниях упругого полупространства, граничащего вдоль плоскости в случае упругой сжимаемой жидкостью.— Труды Сейсмол. ин-та АН СССР, 1933, № 21.
- О г у р ц о в К. И., П е т р а ш е н ь Г. И. Динамические задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии.— Уч. зап. Ленингр. ун-та, Сер. мат. наук, 1951, № 149, вып. 24, стр. 3—117.
- О л е й н и к О. А. К математической теории пограничного слоя для нестационарного течения несжимаемой жидкости.— Прикл. мат. и мех., 1966, т. 30, вып. 5, стр. 801—821.
- О л е й н и к О. А. Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентами.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, т. 25, № 1, стр. 3—20.
- О л е й н и к О. А. О квазилинейных параболических уравнениях со многими независимыми переменными.— ДАН СССР, 1961, т. 138, № 1, стр. 43—46.
- О л е й н и к О. А. О построении обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка путем введения «исчезающей вязкости».— Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 2 (86), стр. 159—164.
- О л е й н и к О. А. О системе уравнений теории пограничного слоя.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1963, т. 3, № 3, стр. 289—507.
- О л е й н и к О. А. Об одном методе решения общей задачи Стефана.— ДАН СССР, 1960, т. 135, № 5, стр. 1054—1057.
- О л е й н и к О. А. Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области.— ДАН СССР, 1952, т. 87, № 6, стр. 885—888.
- О л е й н и к О. А. Об устойчивости решений системы уравнений пограничного слоя для нестационарного течения несжимаемой жидкости.— Прикл. мат. и мех., 1966, т. 30, вып. 3, стр. 417—423.
- О л е й н и к О. А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений.— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 3 (75), стр. 3—73.
- О л е й н и к О. А., К р у ж к о в С. Н. Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными.— Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 5 (101), стр. 115—155.
- П а л а м о д о в В. П. К теории гипозэллиптических и частично гипозэллиптических операторов.— ДАН СССР, 1961, т. 140, № 5, стр. 1015—1018.
- П а л а м о д о в В. П. Об условиях корректной разрешимости в целом некото-

- рого класса уравнений с постоянными коэффициентами.— ДАН СССР, 1960, т. 132, № 3, стр. 528—530.
- Панеях Б. П. Некоторые неравенства для функций экспоненциального типа и априорные оценки для общих дифференциальных операторов.— Усп. мат. наук, 1966, т. 21, вып. 3 (129), стр. 75—114.
- Панич О. И. Решение системы уравнений Озейна для установившегося обтекания плоского контура потоком вязкой несжимаемой жидкости методом потенциалов. I—III.— Изв. вузов. Математика, 1962, № 3, стр. 98—110; № 4, стр. 118—129; № 6, стр. 73—84.
- Петрашень Г. И. Динамические задачи теории упругости в случае изотропной сферы.— Уч. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат. наук, 1950, № 135, вып. 50, стр. 24—70.
- Петрашень Г. И. Колебания изотропного упругого шара.— ДАН СССР, 1945, т. 47, № 3, стр. 177—181.
- Петрашень Г. И. Методы исследования волновых процессов в средах, содержащих сферические или цилиндрические границы раздела.— Уч. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат. наук, 1953, № 170, вып. 27, стр. 96—220.
- Петрашень Г. И. Постановка задач на сейсмическое экранирование волн тонкими слоями и методы их решения.— Уч. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат. наук, 1954, № 177, вып. 28, стр. 5—104.
- Петрашень Г. И. Распространение упругих волн в слоисто-изотропных средах, разделенных параллельными плоскостями.— Уч. зап. Ленингр. ун-та, 1952, № 162, вып. 26, стр. 3—191.
- Петрашень Г. И. Решение векторных предельных задач математической физики в случае шара.— ДАН СССР, 1945, т. 46, № 7, стр. 291—294.
- Петрашень Г. И. Установление волновых колебательных режимов и явление резонанса в случае шара.— ДАН СССР, 1946, т. 51, № 1, стр. 13—16.
- Петрашень Г. И., Марчук Г. И., Огурцов К. И. О задаче Лэмба в случае полупространства.— Уч. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат. наук, 1950, № 135, вып. 21, стр. 71—118.
- Петрашень Г. И., Смирнова Н. С., Гельчинский Б. Я. Некоторые задачи динамической теории упругости для сред, содержащих цилиндрические или сферические границы раздела.— Уч. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат. наук, 1953, вып. 27, № 170, с. 221—265.
- Петрашень Г. И., Успенский И. Н. О распространении волн в слоисто-изотропных упругих средах.— Уч. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат. наук, 1956, № 208, вып. 30, стр. 58—141.
- Петровский И. Г. Новое доказательство существования решения задачи Дирихле методом конечных разностей.— Усп. мат. наук, 1941, вып. 8, стр. 161—170.
- Петровский И. Г. О диффузии волн и лакунах для гиперболических уравнений.— Мат. сб., 1945, т. 17 (59), вып. 3, стр. 289—370.
- Петровский И. Г. О задаче Коши для системы дифференциальных уравнений с частными производными.— Мат. сб., 1937, т. 2 (44), вып. 5, стр. 815—870.
- Петровский И. Г. О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными.— Усп. мат. наук, 1946, т. 1, вып. 3—4 (13—14), стр. 44—70.
- Петровский И. Г. О проблеме Cauchy для систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными в области неаналитических функций.— Бюлл. Моск. ун-та, 1938, т. 1, вып. 7, стр. 3—72.
- Петровский И. Г. Об аналитичности решений уравнений с частными производными.— Мат. сб., 1939, т. 5 (47), № 1, стр. 3—70.
- Повзнер А. Я., Сухаревский И. В. О разрывах функции Грина смешанной задачи для волнового уравнения.— Мат. сб., 1960, т. 51 (93), вып. 1, стр. 3—26.
- Подъяпольский Г. С. Коэффициенты преломления и отражения упругих волн на слое.— Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1961, № 4, стр. 520—533.
- Подъяпольский Г. С. Распространение упругих волн в слоистой среде.¹¹— II.— Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1959, № 8, стр. 1103—1113; № 9, стр. 1265—1277.

- Положий Г. Н. Теорема о сохранении области для некоторых эллиптических систем дифференциальных уравнений и ее применения. — Мат. сб., 1953, т. 32 (74), вып. 3, стр. 485—492.
- Пулькин С. П. К вопросу о постановке задачи Трикоми в пространстве. — Уч. зап. Куйбыш. пед. ин-та, 1956, вып. 14, стр. 63—97.
- Пулькин С. П. Сингулярная задача Трикоми. — Труды Третьего Всесоюз. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.), т. 1, 1956, стр. 65—66.
- Рытов С. М. О переходе от волновой к геометрической оптике. — ДАН СССР, 1938, т. 18, № 4—5, стр. 263—266.
- Рябенский В. С., Филиппов А. Ф. Об устойчивости разностных уравнений. Гостехиздат, М., 1956, 171 с.
- Свекло В. А. Упругие колебания анизотропного тела. — Уч. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат., 1949, № 114, вып. 17, стр. 28—72.
- Свешников А. Г. Принцип излучения. — ДАН СССР, 1950, т. 73, № 5, стр. 917—920.
- Свешников А. Г. Принцип предельного поглощения для волновода. — ДАН СССР, 1951, т. 80, № 3, стр. 345—347.
- Слободецкий Л. Н. О фундаментальном решении и задаче Коши для параболической системы. — Мат. сб., 1958, т. 46 (88), вып. 2, стр. 229—258.
- Слободецкий Л. Н. Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. — Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, 1958, т. 197, стр. 54—112.
- Слободецкий Л. Н. Обобщенные решения параболических и эллиптических систем. — Изв. АН СССР Сер. мат., 1957, т. 21, № 6, стр. 809—834.
- Слободецкий Л. Н. Теория потенциала для параболических уравнений. — ДАН СССР, 1955, т. 103, № 1, стр. 19—22.
- Смирнов В. И. О сингулярных решениях волнового уравнения и уравнений теории упругости. — Труды Сейсмолог. ин-та АН СССР, 1936, № 78, стр. 3—30.
- Смирнов В. И. Решение предельной задачи для волнового уравнения в случае круга и сферы. — ДАН СССР, 1937, т. 14, № 1, стр. 13—16.
- Смирнов В. И. Решение предельных задач теории упругости в случае круга и сферы. — ДАН СССР, 1937, т. 14, № 2, стр. 69—72.
- Смирнов М. М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа. — ДАН СССР, 1955, т. 104, № 5, стр. 699—701.
- Смирнов М. М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа. — Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 1, стр. 80—96.
- Смолицкий Х. Л. Предельная задача для волнового уравнения. — ДАН СССР, 1950, т. 73, № 2, стр. 463—466.
- Соболев С. Л. Волновое уравнение для неоднородной среды. — Труды Сейсмолог. ин-та АН СССР, 1930, № 6, стр. 3—57.
- Соболев С. Л. Некоторые новые задачи теории уравнений с частными производными гиперболического типа. — Мат. сб., 1942, т. 11 (53), вып. 3, стр. 155—203.
- Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1950, 256 с.
- Соболев С. Л. О почти периодичности решений волнового уравнения. I—III. — ДАН СССР, 1945, т. 48, № 8, стр. 570—573, № 9, стр. 646—648; т. 49, № 1, стр. 12—15.
- Соболев С. Л. Об одной краевой задаче для полигармонических уравнений. — Мат. сб., 1937, т. 2 (44), вып. 3, стр. 467—500.
- Соболев С. Л. Общая теория дифракции волн на римановых поверхностях. — Труды Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1935, т. 9, стр. 39—106.
- Соболевский П. Е. О гладкости обобщенных решений уравнений Навье — Стокса. — ДАН СССР, 1960, т. 131, № 4, стр. 758—760.
- Соболевский П. Е. О нестационарных уравнениях гидродинамики вязкой жидкости. — ДАН СССР, 1959, т. 128, № 1, стр. 45—48.
- Соломяк М. З. О линейных эллиптических системах первого порядка. — ДАН СССР, 1963, т. 150, № 1, стр. 48—51.
- Соломяк М. З. Оценка нормы резольвенты эллиптического оператора в пространствах L_p . — Усп. мат. наук, 1960, т. 15, вып. 6 (96), стр. 141—148.

- Соломяк Т. Б. Краевые задачи для одного класса квазилинейных уравнений и систем эллиптического типа. — Изв. вузов. Математика, 1959, № 5, стр. 184—196.
- Солонников В. А. Априорные оценки для уравнений второго порядка параболического типа. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1964, т. 70, стр. 133—212.
- Солонников В. А. О дифференциальных свойствах решения первой краевой задачи для нестационарной системы уравнений Навье — Стокса. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1964, т. 73, стр. 221—291.
- Солонников В. А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1965, т. 83, 162 с.
- Солонников В. А. Об априорных оценках для некоторых краевых задач. — ДАН СССР, 1964, т. 138, № 4, стр. 781—784.
- Солонников В. А. Об оценках тензоров Грина для некоторых краевых задач. — ДАН СССР, 1960, т. 130, № 5, стр. 988—991.
- Солонников В. А. Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье — Стокса. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1964, т. 70, стр. 213—317.
- Стеклов В. А. Основные задачи математической физики. Ч. I. Основные задачи математической физики для тел линейных размеров. Петроград, 1922, 285 с.
- Тихонов А. Н. Об уравнениях теплопроводности для нескольких переменных. — Бюлл. Моск. ун-та. Сер. А, 1937, т. 1, вып. 9, стр. 3—49.
- Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач. — ДАН СССР, 1943, т. 39, № 5, стр. 195—198.
- Тихонов А. Н. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности. — ДАН СССР, 1935, т. 1, № 5, стр. 294—300.
- Тихонов А. Н., Самарский А. А. О принципе излучения. — Журн. эксп. и теор. физ., 1948, т. 18, № 2, стр. 243—248.
- Уфимцев П. Я. — Поперечная диффузия при дифракции на клине. — Радиотехника и электроника, 1965, т. 10, вып. 6, стр. 1013—1022.
- Фаддеев Л. Д. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1963, т. 69, 122 с.
- Фаддеев Л. Д. О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора Шредингера. — Вест. Ленингр. ун-та, 1957, № 7, стр. 164—172.
- Филиппов А. Ф. Некоторые задачи дифракции плоских упругих волн. — Прикл. мат. и мех., 1956, т. 20, вып. 6, стр. 688—703.
- Филиппов А. Ф. О разностном методе решения задачи Трикоми. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1957, т. 21, № 1, стр. 73—88.
- Филиппов А. Ф. О приближенном вычислении отраженных и преломленных волн. — Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1957, № 7, стр. 841—854.
- Филиппов А. Ф. Пространственная задача дифракции упругой волны на остром ребре. — Прикл. мат. и мех., 1959, т. 23, вып. 4, стр. 691—696.
- Флитман Л. М. Волны, вызванные мгновенным разрывом сплошности упругой среды. — Прикл. мат. и мех., 1963, т. 27, № 4, стр. 618—628.
- Флитман Л. М. Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости. — Прикл. мат. и мех., 1959, т. 23, № 4, стр. 697—705.
- Фок В. А. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1946, 80 с.
- Фок В. А. Распределение токов, возбуждаемых плоской волной на поверхности проводника. — Журн. эксп. и теор. физ., 1945, т. 15, вып. 12, стр. 693—702.
- Фок В. А. Распространение прямой волны вокруг Земли при учете дифракции и рефракции. — В кн.: Исследования по распространению радиоволн, сб. 2. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1948, стр. 40—68.
- Франкль Ф. И. К теории уравнения $yz_{xx} + z_{yy} = 0$. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1946, т. 10, № 2, стр. 135—166.
- Франкль Ф. И. Об одной краевой задаче для уравнения $yz_{xx} + z_{yy} = 0$. — Уч. зап. Моск. ун-та, Механика, т. 3, вып. 152, 1951, стр. 99—116.

- Франкль Ф. И. Обобщение задачи Трикоми и его применение к решению прямой задачи теории сопла Лавалья.— Мат. сб., 1961, т. 54 (95), вып. 2, стр. 225.
- Фридман М. М. Дифракция плоской упругой волны относительно полубесконечной прямолинейной, жестко заделанной щели.— Уч. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат. наук, 1949, № 114, вып. 17, стр. 72—95.
- Хайкович И. М. Динамическая задача для упругого слоя, погруженного в жидкую безграничную среду.— Уч. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат. наук, 1954, № 177, вып. 28, стр. 194—221.
- Халилов З. И. Решение задачи для уравнения смешанного типа методом сеток.— ДАН АзССР, 1953, т. 9, № 4, стр. 189—194.
- Шабат Б. В. Примеры решения задачи Дирихле для уравнений смешанного типа.— ДАН СССР, 1957, т. 112, № 3, стр. 386—389.
- Шапиро З. Я. Об общих краевых задачах для уравнений эллиптического типа.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1953, т. 17, № 6, стр. 539—562.
- Шапиро З. Я. Первая краевая задача для эллиптических систем дифференциальных уравнений.— Мат. сб., 1951, т. 28 (70), вып. 1, стр. 55—78.
- Шемакин Е. И., Файншмидт В. Л. Распространение волн в упругом полупространстве, возбужденном поверхностной касательной силой.— Уч. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат. наук, 1954, № 177, вып. 28, стр. 148—179.
- Эйдельман С. Д. Параболические системы. «Наука», М., 1964, 443 с.
- Эйдус Д. М. О принципе предельного поглощения.— Мат. сб., 1962, т. 57, вып. 1 (99), стр. 13—44.
- Юдович В. И. Периодические движения вязкой несжимаемой жидкости.— ДАН СССР, 1960, т. 130, № 6, стр. 1214—1217.
- Günther N. Sur les intégrales de Stieltjes et leurs applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique.— Труды Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1932, т. 1, 494 с.
- Smirnov V., Sobolev S. Sur une méthode nouvelle dans le problème plan des vibrations élastiques.— Труды Сейсм. ин-та АН СССР, 1932, № 20, 37 с.
- Sobolev S. L. Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales.— Мат. сб., 1936, т. 1 (43), вып. 1, стр. 39—72.

К главе V. Вариационное исчисление

- Альбер С. И. Гомологии пространства неориентированных петель и их приложение к вариационному исчислению в целом.— ДАН СССР, 1964, т. 155, № 1, стр. 13—16.
- Ахиезер Н. И. Лекции по вариационному исчислению. М., 1955, 248 с.
- Бернштейн С. Н. Доказательство теоремы Гильберта об аналитическом характере решений эллиптических уравнений без использования нормальных рядов.— Усп. мат. наук, 1941, вып. 8, стр. 82—99.
- Бернштейн С. Н. Об уравнениях вариационного исчисления.— Усп. мат. наук, 1941, вып. 8, стр. 32—74.
- Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. «Наука», М., 1966, 307 с.
- Борисович Ю. Г. Об одной задаче вариационного исчисления в целом в гильбертовом пространстве.— Уч. зап. Казанск. ун-та, 1955, т. 115, вып. 14, стр. 117—138.
- Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. «Наука», М., 1965, 474 с.
- Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. ГИТТЛ, М., 1956, 344 с.
- Габасов Р. Оптимальные процессы в системах с запаздыванием.— В кн.: Доклады второй Сибирской конференции по математике и механике. Изд-во Томск. ун-та, Томск, 1962, стр. 116—117.
- Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Минимизация гладкого выпуклого функционала на выпуклом множестве.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1964, т. 19, № 4, стр. 5—17.
- Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1965, т. 5, № 3, стр. 393—453.

- Егоров Ю. В. Необходимые условия оптимальности управления в банаховых пространствах.— Мат. сб., 1964, т. 64 (106), вып. 1, стр. 79—101.
- Ермилин К. С. Об экстремуме интегралов в случае разрывной подынтегральной функции.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1941, т. 5, № 4, стр. 269—276.
- Канторович Л. В. Использование идеи метода Галеркина в методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям.— Прикл. мат. и мех., 1942, т. 6, вып. 1, стр. 31—40.
- Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика.— Усп. мат. наук, 1948, т. 3, вып. 6 (28), стр. 89—185.
- Келдыш М. В. О методе Б. Г. Галеркина для решения краевых задач.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1942, т. 6, № 3, стр. 309—330.
- Керимов М. К. О достаточных условиях экстремума в разрывных вариационных задачах с подвижными концами.— ДАН СССР, 1952, т. 84, № 2, стр. 213—216.
- Космодемьянский В. А. Необходимые условия вариационного исчисления для одной задачи типа Больца — Майера.— Прикл. мат. и мех., 1965, т. 29, вып. 2, стр. 368—372.
- Красносельский М. А. Некоторые задачи нелинейного анализа.— Усп. мат. наук, 1954, т. 9, вып. 3 (61), стр. 57—114.
- Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Гостехиздат, М., 1956, 392 с.
- Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования.— Прикл. мат. и мех., 1959, т. 23, вып. 4, стр. 625—639.
- Красовский Н. Н. Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени.— Прикл. мат. и мех., 1962, т. 26, № 1, стр. 39—51.
- Красовский Н. Н. Об оптимальном регулировании в линейных системах с запаздываниями времени.— Сиб. мат. журн., 1963, т. 4, № 2, стр. 295—302.
- Красовский Н. Н. Оптимальное управление в обыкновенных динамических системах.— Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 3 (103), стр. 153—174.
- Кротов В. Ф. Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума.— Автоматика и телемеханика, 1962, т. 23, № 12, стр. 1571—1583.
- Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Основы вариационного исчисления. Т. 1. ОНТИ, М.— Л., 1935, 148 с.
- Ладыженская О. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. «Наука», М., 1964, 538 с.
- Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов.— Автоматика и телемеханика, 1960, т. 21, № 4, стр. 436—441; № 5, стр. 561—568, № 6, стр. 661—665; 1961, т. 22, № 4, стр. 425—435, 1962, т. 23, № 11, стр. 1405—1413.
- Лидский Э. А. Об аналитическом конструировании регуляторов в системах со случайными свойствами.— Прикл. мат. и мех., 1962, т. 26, вып. 2, стр. 259—266.
- Лурье К. А. Задача Майера — Больца для кратных интегралов и оптимизация поведения систем с распределенными параметрами.— Прикл. мат. и мех., 1963, т. 27, вып. 5, стр. 842—853.
- Люстерник Л. А. Замкнутые геодезические на многомерных сферических многообразиях.— ДАН СССР, 1940, т. 26, № 4, стр. 328—330.
- Люстерник Л. А. Кольцо пересечений в одном функциональном пространстве.— ДАН СССР, 1943, т. 38, № 2—3, стр. 67—70.
- Люстерник Л. А. Об условных экстремумах функционалов.— Мат. сб., 1934, т. 41, вып. 4, стр. 390—401.
- Люстерник Л. А. Пересечения в линейных в малом функциональных пространствах.— ДАН СССР, 1940, т. 27, № 8, стр. 771—774.
- Люстерник Л. А. Проблема Дирихле.— Усп. мат. наук, 1941, вып. 8, стр. 115—124.
- Люстерник Л. А. Топология и вариационное исчисление.— Усп. мат. наук, 1946, т. 1, вып. 1 (11), стр. 30—56.
- Люстерник Л. А. Топология функциональных пространств и вариационное исчисление в целом.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1947, т. 19, 96 с.

- Л ю с т е р н и к Л. А., П е т р о в с к и й И. Г. О приведении второй вариации к каноническому виду треугольными преобразованиями.— Уч. зап. Моск. ун-та, 1934, вып. 2, № 2, стр. 5—16.
- Л ю с т е р н и к Л. А., Ш н и р е л ь м а н Л. Г. Топологические методы в вариационных задачах. Госиздат, М., 1930, 68 с.
- М и х л и н С. Г. Вариационные методы в математической физике. ГИТТЛ, М., 1957, 467 с.
- О ж и г а н о в а И. А. К теории оптимального регулирования систем с запаздыванием.— Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющим аргументом, 1963, т. 2, стр. 136—145.
- О с и п о в Ю. С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием.— Диф. ур.-я, 1965, № 5, стр. 605—618.
- П о л ь с к и й Н. И. О сходимости некоторых приближенных методов анализа.— Укр. мат. журн., 1955, т. 7, № 1, стр. 56—70.
- П о н т р я г и н Л. С. К теории дифференциальных игр.— Усп. мат. наук, 1966, т. 21, вып. 4 (130), стр. 219—275.
- П о н т р я г и н Л. С. О некоторых дифференциальных играх.— ДАН СССР, 1964, т. 156, № 4, стр. 738—741.
- П о н т р я г и н Л. С., Б о л т я н с к и й В. Г., Г а м к р е л и д з е Р. В., М и щ е н к о Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, М., 1961, 391 с.
- Р о з о н о э р Л. И. Вариационный подход к проблеме инвариантности систем автоматического управления.— Автоматика и телемеханика, 1963, т. 24, № 6, 744—756.
- Р ы б н и к о в К. А. Первые этапы развития вариационного исчисления.— В кн.: Ист.-мат. исслед., вып. 2, Физматгиз, М., 1949, стр. 355—498.
- С и г а л о в А. Г. Вариационные задачи с допустимыми поверхностями произвольных топологических типов.— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 1 (73), стр. 53—98.
- С и г а л о в А. Г. Двумерные задачи вариационного исчисления.— Усп. мат. наук, 1951, т. 6, вып. 2 (42), стр. 16—101.
- С и г а л о в А. Г. О квазирегулярных двойных интегралах вариационного исчисления.— Мат. сб., 1948, т. 23 (65), вып. 2, стр. 127—158.
- С и р а з е т д и н о в Т. К. К теории оптимальных процессов с распределенными параметрами.— Автоматика и телемеханика, 1964, т. 25, № 4, стр. 463—472.
- С о б о л е в В. И. О собственных элементах некоторых нелинейных операторов.— ДАН СССР, 1941, т. 31, № 8, стр. 734—736.
- Т р о и ц к и й В. А. О вариационных задачах оптимизации процессов управления.— Прикл. мат. и мех., 1962, т. 26, вып. 1, стр. 29—38.
- Ф е л ь д б а у м А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. Изд. 2-е. «Наука», М., 1966, 618 с.
- Ф е т А. И. Об алгебраическом числе замкнутых экстремалей на многообразии.— ДАН СССР, 1953, т. 88, № 4, стр. 619—621.
- Х а р а т и ш в и л и Г. Л. Принцип максимума в теории оптимальных процессов с запаздыванием.— ДАН СССР, 1961, т. 136, № 1, стр. 39—42.
- Ц и т л а н а д з е Э. С. Некоторые вопросы теории нелинейных операторов и вариационного исчисления в пространствах типа Банаха.— Усп. мат. наук, 1950, т. 5, вып. 4 (38), стр. 141—142.
- Ш и л о в а Г. И. Существование абсолютного минимума кратных интегралов вариационного исчисления в непараметрической форме.— Мат. сб., 1960, т. 51 (93), вып. 2, стр. 253—272.
- Э л ь с г о л ь ц Л. Э. Качественные методы в математическом анализе. ГИТТЛ, М.— Л., 1955, 300 с.
- Э л ь с г о л ь ц Л. Э. Оценка числа критических точек.— Усп. мат. наук, 1950, т. 5, вып. 6 (40), стр. 52—87.
- В о г о л и у б о f f N. N. Application des méthodes directes à quelques problèmes du calcul des variations.— Ann. di mat., 1933, v. 9, p. 195—242.
- В о г о л и у б o f f N. N. Sur quelques méthodes nouvelles dans le calcul des variations.— Ann. di mat., 1930, v. 7, p. 243—272.
- F r o l o f f S. et E l s h o l z L. Limite inférieure pour le nombre des valeurs

- critiques d'une fonction, donnee sur une variété. — *Mat. сб.*, 1935, т. 42, вып. 5, стр. 637—643.
- L u s t e r n i k L. Sur quelques méthodes topologiques dans la géométrie différentielle. — *Atti. Congr. mat.*, Bologna, 1928, v. 4, p. 291—296.
- L u s t e r n i k L. Topologische Grundlagen der allgemeinen Eigenwerttheorie. — *Monatshefte für Math. und Phys.*, 1930, B. 37, H. 1, S. 125—130.
- L u s t e r n i k L. Über einige Anwendungen der direkten Methoden in Variationsrechnung. — *Mat. сб.*, 1926, т. 33, вып. 2, стр. 173—202.
- N i k o l a d z e G. Einige Eigenschaften der Risspunktkurve in der Variationsrechnung. — *Бюлл. Тбилисск. ун-та*, 1923, т. 3, стр. 324—328.
- R a s m a d z e A. Über unstetige Lösungen mit einem Unstetigkeitspunkt in der Variationsrechnung. — *Бюлл. Тбилисск. ун-та*, 1922—1923, т. 2, стр. 282—312.
- S c h n i r e l m a n L. Über eine neue kombinatorische Invariante. — *Monatshefte für Math. und Phys.*, 1930, B. 37, H. 1, S. 131—134.

К главе VI. Функциональный анализ

- А г р а н о в и ч З. С., М а р ч е н к о В. А. Обратная задача теории рассеяния. Изд-во Харьковск. ун-та, Харьков, 1960, 268 с.
- А г р а н о в и ч М. С. Об уравнениях в частных производных с постоянными коэффициентами. — *Усп. мат. наук*, 1961, т. 16, вып. 2 (98), стр. 27—93.
- А г р а н о в и ч М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы. — *Усп. мат. наук*, 1965, т. 20, вып. 5 (125), стр. 3—120.
- А г р а н о в и ч М. С., В и ш и к М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. — *Усп. мат. наук*, 1964, т. 19, вып. 3 (117), стр. 53—161.
- А л е к с а н д р я н Р. А. Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С. Л. Соболева. — *Труды Моск. мат. об-ва*, 1960, т. 9, 455—505.
- А х и е з е р Н. И. Бесконечные матрицы Якоби и проблема моментов. — *Усп. мат. наук*, 1941, вып. 9, стр. 126—156.
- А х и е з е р Н. И. Классическая проблема моментов. Физматгиз, М., 1961, 310 с.
- А х и е з е р Н. И. Лекции по теории аппроксимации. «Наука», М., 1965, 407 с.
- А х и е з е р Н. И., Г л а з м а н И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. «Наука», М., 1966, 543 с.
- А х и е з е р Н. И., К р е й н М. Г. О некоторых вопросах теории моментов. Гос. научн.-техн. изд-во Украины, Харьков, 1938, 255 с.
- Б а б и ч В. М., К а п и л е в и ч М. Б. и др. Линейные уравнения математической физики. «Наука», М., 1964, 368 с.
- Б е р е з а н с к и й Ю. М. Краевые задачи для общих линейных уравнений в частных производных. — *Труды Четвертого Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.)*, 1964, т. 2, стр. 480—485.
- Б е р е з а н с к и й Ю. М. О теореме единственности в обратной задаче спектрального анализа для уравнения Шредингера. — *Труды Моск. мат. об-ва*, 1958, т. 7, стр. 3—62.
- Б е р е з а н с к и й Ю. М. Пространства с негативной нормой. — *Усп. мат. наук*, 1963, т. 18, вып. 1 (109), стр. 63—96.
- Б е р е з а н с к и й Ю. М. Разложение по собственным функциям уравнений в частных разностях второго порядка. — *Труды Моск. мат. об-ва*, 1956, т. 5, стр. 203—268.
- Б е р е з а н с к и й Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. «Наукова думка», К., 1965, 798 с.
- Б е р е з а н с к и й Ю. М. Разложение по собственным функциям уравнений в частных разностях и частных производных. — *Труды Третьего Всесоюз. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.)*, 1958, т. 3, стр. 238—244.
- Б е р е з и н Ф. А. Метод вторичного квантования. «Наука», М., 1965, 235 с.
- Б е р е з и н Ф. А. Операторы Лапласа на полупростых группах Ли. — *Труды Моск. мат. об-ва*, 1957, т. 6, стр. 371—463.
- Б е р е з и н Ф. А., Г е л ь ф а н д И. М. Несколько замечаний к теории сферических функций на симметрических римановых многообразиях. — *Труды Моск. мат. об-ва*, 1956, т. 5, стр. 311—351.

- Б е р е з и н Ф. А., Г е л ь ф а н д И. М., Г р а е в М. И., Н а й м а р к М. А. Представление групп.— Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 6 (72), стр. 13—40.
- Б и р м а н М. Ш., Г л а з м а н И. М. Спектры сингулярных дифференциальных операторов.— Труды Четвертого Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961), 1964, т. 2, стр. 253—261.
- Б о г о л ю б о в Н. Н., В л а д и м и р о в В. С. О некоторых математических вопросах квантовой теории поля.— В кн.: Международный математический конгресс в Эдинбурге, 1958 г. (обзорные доклады). Физматгиз, М., 1962, стр. 27—47.
- Б о г о л ю б о в Н. Н., М е д в е д е в Б. В., П о л и в а н о в М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений. Физматгиз, М., 1958, 203 с.
- Б о г о л ю б о в Н. Н., Ш и р к о в Д. В. Введение в теорию квантованных полей. ГИТТЛ, М., 1957, 442 с.
- Б о р о в и к о в В. А. Фундаментальные решения линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.— Труды Моск. мат. об-ва, 1959, т. 8, стр. 199—257.
- Б р о д с к и й М. С., Г о х б е р г И. Ц., К р е й н М. Г., М а ц а е в В. И. О некоторых новых исследованиях по теории несамосопряженных операторов.— Труды Четвертого Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1964, т. 2, стр. 261—271.
- Б р о д с к и й М. С., Л и в ш и ц М. С. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы.— Усп. мат. наук, 1958, т. 13, вып. 1 (79), стр. 3—85.
- В а й н б е р г Б. Р. Принципы излучения, предельного поглощения и предельной амплитуды в общей теории уравнений с частными производными.— Усп. мат. наук, 1966, т. 21, вып. 3 (129), стр. 115—194.
- В а й н б е р г М. М. Вариационная теория собственных функций нелинейных интегральных и других операторов.— Труды Моск. мат. об-ва, 1954, т. 3, стр. 375—406.
- В а й н б е р г М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. ГИТТЛ, М., 1956, 344 с.
- В а й н б е р г М. М. Некоторые вопросы дифференциального исчисления в линейных пространствах.— Усп. мат. наук, 1952, т. 7, вып. 4, стр. 55—102.
- В а с и л ь е в Н. Б. C^* -алгебры с конечномерными неприводимыми представлениями.— Усп. мат. наук, 1966, т. 21, вып. 1 (127), стр. 135—154.
- В и л е н к и н Н. Я. Бесселевы функции и представления группы евклидовых движений.— Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 3 (69), стр. 69—112.
- В и л е н к и н Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. «Наука», М., 1965, 588 с.
- В и л е н к и н Н. Я. Специальные функции, связанные с представлениями класса I групп движений пространств постоянной кривизны.— Труды Моск. мат. об-ва, 1963, т. 12, стр. 185—257.
- В и н б е р г Э. Б. Теория однородных выпуклых концов.— Труды Моск. мат. об-ва, 1963, т. 12, стр. 303—358.
- В и ш и к М. И. Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющие дивергентную форму.— Труды Моск. мат. об-ва, 1963, т. 12, стр. 125—184.
- В и ш и к М. И. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений.— Труды Моск. мат. об-ва, 1952, т. 1, стр. 187—246.
- В и ш и к М. И., Л а д ы ж е н с к а я О. А. Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений.— Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 6 (72), стр. 41—97.
- В и ш и к М. И., Ш и л о в Г. Е. Общая теория уравнений с частными производными и некоторые проблемы теории краевых задач.— Труды Четвертого Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1963, т. 1, стр. 56—85.
- В и ш и к М. И., Э с к и н Г. И. Уравнения в свертках в ограниченной области.— Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 3 (123), стр. 90—152.
- В и ш и к М. И., Э с к и н Г. И. Эллиптические уравнения в свертках в ограниченной области и их приложения.— Усп. мат. наук, 1967, т. 22, вып. 1 (133), стр. 15—76.

- В л а д и м и р о в В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. «Наука», М., 1964, 411 с.
- В о л е в и ч Л. Р. Локальные свойства неоднородных псевдодифференциальных операторов.— Труды Моск. мат. об-ва, 1967, т. 16, стр. 51—98.
- В о л е в и ч Л. Р., П а н е я х Б. П. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения.— Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 1 (121), стр. 3—74.
- В о л ь п е р т А. И. Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости.— Труды Моск. мат. об-ва, 1961, т. 10, стр. 41—87.
- В о л ь п е р т А. И. Проблема индекса краевых задач для эллиптических систем.— Труды Четвертого Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1964, т. 2, стр. 486—488.
- В у л и х Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Физматгиз, М., 1961, 407 с.
- В у л и х Б. З. Введение в функциональный анализ. Физматгиз, М., 1958, 352 с.
- В у л и х Б. З. О некоторых работах по теории полуупорядоченных пространств.— Труды Четвертого Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1964, т. 2, стр. 271—274.
- Г а н т м а х е р Ф. Р., К р е й н М. Г. Осцилляционные матрицы, ядра и малые колебания механических систем. ГИТТЛ, М.— Л., 1950, 360 с.
- Г е л ь ф а н д И. М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений.— Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 3 (87), стр. 3—19.
- Г е л ь ф а н д И. М. Некоторые вопросы функционального анализа и алгебры.— В кн.: Международный математический конгресс в Амстердаме, 1954 г. (обзорные доклады), Физматгиз, М., 1961, стр. 49—74.
- Г е л ь ф а н д И. М. О некоторых проблемах функционального анализа.— Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 6 (72), стр. 3—12.
- Г е л ь ф а н д И. М., В и л е н к и н Н. Я. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. Физматгиз, М., 1961, 472 с.
- Г е л ь ф а н д И. М., Г р а е в М. И. Аналог формулы Планшереля для классических групп.— Труды Моск. мат. об-ва, 1955, т. 4, стр. 375—404.
- Г е л ь ф а н д И. М., Г р а е в М. И. Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии. I.— Труды Моск. мат. об-ва, 1959, т. 8, стр. 321—390.
- Г е л ь ф а н д И. М., Г р а е в М. И. Представления группы матриц 2-го порядка с элементами из локально компактного поля и специальные функции на локально компактных полях.— Усп. мат. наук, 1963, т. 18, вып. 4 (112), стр. 29—99.
- Г е л ь ф а н д И. М., Г р а е в М. И. Применение метода орисфер к спектральному анализу функций в вещественном и мнимом пространствах Лобачевского.— Труды Моск. мат. об-ва, 1962, т. 11, стр. 243—308.
- Г е л ь ф а н д И. М., Г р а е в М. И., В и л е н к и н Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Физматгиз, М., 1962, 656 с.
- Г е л ь ф а н д И. М., Г р а е в М. И., П я т е ц к и й - Ш а п и р о И. И. Теория представлений и автоморфные функции. «Наука», М., 1966, 512 с.
- Г е л ь ф а н д И. М., М и н л о с Р. А., Ш а п и р о З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. Физматгиз, М., 1958, 368 с.
- Г е л ь ф а н д И. М., М и н л о с Р. А., Я г л о м А. М. Континуальные интегралы.— Труды Третьего Всесоюз. мат. съезда (Москва, июнь—июль 1956 г.), 1958, т. 3, стр. 521—531.
- Г е л ь ф а н д И. М., Н а й м а р к М. А. Унитарные представления классических групп.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1950, т. 36, 288 с.
- Г е л ь ф а н д И. М., Н а й м а р к М. А. Унитарные представления унимодулярной группы, содержащие единичное представление унитарной подгруппы.— Труды Моск. мат. об-ва, 1952, т. 1, стр. 423—475.

- Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Граев М. И., Березин Ф. А. Представления группы Ли.— Труды Третьего Всесоюзн. мат. съезда (Москва июнь-июль 1956 г.), 1958, т. 3, стр. 244—254.
- Гельфанд И. М., Петровский И. Г., Шилов Г. Е. Теория систем дифференциальных уравнений с частными производными.— Труды Третьего Всесоюзн. мат. съезда (Москва, июнь-июль 1956 г.), 1958, т. 3, стр. 65—72.
- Гельфанд И. М., Пятецкий-Шапиро И. И. Автоморфные функции и теория представлений.— Труды Моск. мат. об-ва, 1963, т. 12, стр. 389—412.
- Гельфанд И. М., Пятецкий-Шапиро И. И. Теория представлений и теория автоморфных функций.— Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 2 (86), стр. 171—194.
- Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца.— Усп. мат. наук, 1946, т. 1, вып. 2 (12), стр. 48—146.
- Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца Физматгиз, М., 1960, 316 с.
- Гельфанд И. М., Фомин С. В. Геодезические потоки на многообразиях постоянной отрицательной кривизны.— Усп. мат. наук, 1952, т. 7, вып. 1 (47), стр. 118—137.
- Гельфанд И. М., Шапиро З. Я. Однородные функции и их приложения.— Усп. мат. наук, 1955, т. 10, вып. 3 (65), стр. 3—70.
- Гельфанд И. М., Шапиро З. Я. Представления группы вращений трехмерного пространства и их применения.— Усп. мат. наук, 1952, т. 7, вып. 1 (47), стр. 3—117.
- Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Физматгиз, М., 1958, 274 с.
- Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз, М., 1959, 470 с.
- Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши.— Усп. мат. наук, 1953, т. 8, вып. 6 (58), стр. 3—54.
- Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных обобщенных функций. Физматгиз, М., 1958, 307 с.
- Гельфанд И. М., Яглом А. М. Интегрирование в функциональных пространствах и его применения в квантовой физике.— Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 1 (67), стр. 77—114.
- Гиндикин С. Г. Анализ в однородных областях.— Усп. мат. наук, 1964, т. 19, вып. 4 (118), стр. 3—92.
- Гинзбург Ю. П., Иохвидов И. С. Исследования по геометрии бесконечномерных пространств с билинейной метрикой.— Усп. мат. наук, 1962, т. 7, вып. 4 (106), стр. 3—56.
- Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. «Наука», М., 1965, 654 с.
- Глазман И. М. К теории сингулярных дифференциальных операторов.— Усп. мат. наук, 1950, т. 5, вып. 6 (40), стр. 102—135.
- Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. Физматгиз, М., 1963, 339 с.
- Головкин К. К., Слободецкий Л. Н., Ильин В. П. Теоремы вложения для функциональных пространств.— Труды Четвертого Всесоюзн. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1964, т. 2, стр. 488—495.
- Горин Е. А. Об асимптотических свойствах многочленов и алгебраических функций от нескольких переменных.— Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 1 (97), стр. 91—118.
- Горин Е. А., Грушин В. В. Развитие понятия гипоеллиптичности.— Труды Четвертого Всесоюзн. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1964, т. 2, стр. 495—499.
- Гохберг И. Ц. Задачи факторизации в нормированных кольцах, функции от изометрических и симметрических операторов и сингулярные интегральные уравнения.— Усп. мат. наук, 1964, т. 19, вып. 1 (115), стр. 71—124.

- Г о х б е р г И. Ц., К р е й н М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. «Наука», М., 1965, 448 с.
- Г о х б е р г И. Ц., К р е й н М. Г. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов.— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 2 (74), стр. 43—118.
- Г о х б е р г И. Ц., К р е й н М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. «Наука», М., 1967, 508 с.
- Г р а е в М. И. Унитарные представления вещественных простых групп Ли.— Труды Моск. мат. об-ва, 1958, т. 7, стр. 335—389.
- Г р а е в М. И., К а р п е л е в и ч Ф. И., К и р и л л о в А. А. Теория представлений групп Ли.— Труды Четвертого Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1964, т. 2, стр. 275—281.
- Д а л е ц к и й Ю. Л. Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения.— Усп. мат. наук, 1967, т. 22, вып. 4 (136), стр. 3—54.
- Д а л е ц к и й Ю. Л. Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями.— Усп. мат. наук, 1962, т. 17, вып. 5 (107), стр. 3—115.
- Д а л е ц к и й Ю. Л., К р ы л о в В. Ю., М и в л о с Р. А., С у д а к о в В. Н. Функциональное интегрирование и меры в функциональных пространствах.— Труды Четвертого Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1964, т. 2, стр. 282—292.
- Д а л е ц к и й Ю. Л., Ф о м и н С. В. Обобщенные меры в функциональных пространствах.— Теория вероятностей и ее применения, 1965, т. 10, № 2, стр. 329—343.
- Д е з и н А. А. Инвариантные дифференциальные операторы и граничные задачи.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1962, т. 68, 88 с.
- Д е з и н А. А. Теоремы существования и единственности решений граничных задач для уравнений с частными производными в функциональных пространствах.— Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 3 (87), стр. 21—73.
- Д е з и н А. А., М и х а й л о в В. П. О граничных задачах для линейных дифференциальных операторов.— Труды Четвертого Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1964, т. 2, стр. 499—501.
- Д ж р б а ш я н М. М., Н е р с е с я н А. Б. Разложения по некоторым биортонормальным системам и краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка.— Труды Моск. мат. об-ва, 1961, т. 10, стр. 89—181.
- Д и к и й Л. А. Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма — Лиувилля.— Усп. мат. наук, 1958, т. 13, вып. 3, стр. 111—143.
- Д ы н и н А. С. Индекс эллиптического оператора на компактном многообразии.— Усп. мат. наук, 1966, т. 21, вып. 5 (131), стр. 233—248.
- Д ы н к и н Е. Б. Максимальные подгруппы классических групп.— Труды Моск. мат. об-ва, 1952, т. 1, стр. 39—166.
- Д ы н к и н Е. Б. Марковские процессы. Физматгиз, М., 1963, 859 с.
- Д ы н к и н Е. Б. Основания теории марковских процессов. Физматгиз, М., 1959, 227 с.
- Д ы н к и н Е. Б. Структура полупростых алгебр Ли.— Усп. мат. наук, 1947, т. 2, вып. 4 (20), стр. 59—127.
- Д ы н к и н Е. Б., О н и щ и к А. Л. Компактные группы Ли в целом.— Усп. мат. наук, 1953, т. 10, вып. 4 (66), стр. 3—74.
- Ж е л о б е н к о Д. П. К теории линейных представлений комплексных и вещественных групп Ли.— Труды Моск. мат. об-ва, 1963, т. 12, стр. 53—98.
- Ж е л о б е н к о Д. П. Классические группы. Спектральный анализ конечномерных представлений.— Усп. мат. наук, 1962, т. 17, вып. 1 (103), стр. 27—120.
- Ж е л о б е н к о Д. П. Лекции по теории групп Ли. Изд-во объединенного ин-та ядерных исследований; Дубна, 1965, 344 с.
- Ж и с л и н Г. М. Исследования спектра оператора Шредингера для системы многих частиц.— Труды Моск. мат. об-ва, 1960, т. 9, стр. 81—120.
- И л ь и н В. А. О сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа.— Усп. мат. наук, 1958, т. 13, вып. 1 (79), стр. 87—180.

- И о х в и д о в И. С. Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой.— Труды Третьего Всесоюз. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.), 1958, т. 3, стр. 254—261.
- И о х в и д о в И. С., К р е й н М. Г. Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. I.—II.— Труды Моск. мат. об-ва, 1956, т. 5, стр. 367—432; 1959, т. 8, стр. 413—496; 1966, т. 15, стр. 452—454.
- К а н т о р о в и ч Л. В. Об интегральных операторах.— Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 2 (68), стр. 3—29.
- К а н т о р о в и ч Л. В., А к и л о в Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, М., 1959, 684 с.
- К а н т о р о в и ч Л. В., В у л и х Б. З., П и н с к е р А. Г. Полуупорядоченные группы и линейные полуупорядоченные пространства.— Усп. мат. наук, 1951, т. 6, вып. 3 (43), стр. 31—98.
- К а н т о р о в и ч Л. В., В у л и х Б. З., П и н с к е р А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. ГИТТЛ, М., 1950, 548 с.
- К а р п е л е в и ч Ф. И. Геометрия геодезических и собственные функции оператора Бельтрами — Лапласа на симметрических пространствах.— Труды Моск. мат. об-ва, 1965, т. 14, стр. 48—185.
- К а р п е л е в и ч Ф. И. Простые подалгебры вещественных алгебр Ли.— Труды Моск. мат. об-ва, 1955, т. 4, стр. 3—112.
- К а ц Г. И. Кольцевые группы и принцип двойственности.— Труды Моск. мат. об-ва, 1963, т. 12, стр. 259—301.
- К а ц Г. И. Кольцевые группы и принцип двойственности. II.— Труды Моск. мат. об-ва, 1965, т. 13, стр. 84—113.
- К а ц Г. И. Обобщенные функции на локально компактной группе и разложения унитарных представлений.— Труды Моск. мат. об-ва, 1961, т. 10, стр. 3—40.
- К а ц Г. И., П а л ю т к и н В. Г. Конечные кольцевые группы.— Труды Моск. мат. об-ва, 1966, т. 15, стр. 224—261.
- К е л д ы ш М. В., Л и д с к и й В. Б. Вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов.— Труды Четвертого Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1963, т. 1, стр. 101—120.
- К и б е н к о А. В., К р а с н о с е л ь с к и й М. А., Л е в и н А. Ю., П е р о в А. И. Некоторые краевые задачи для нелинейных дифференциальных уравнений.— Труды Четвертого Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1964, т. 2, стр. 437—444.
- К и р и л л о в А. А. Унитарные представления нильпотентных групп Ли.— Усп. мат. наук, 1962, т. 17, вып. 4 (106), стр. 57—110.
- К о в а л ь ч и к И. М. Интеграл Винера.— Усп. мат. наук, 1963, т. 18, вып. 1 (109), стр. 97—134.
- К о в а н ь к о А. С., С о к о л о в И. Г. Теория функций действительного переменного и основы функционального анализа. Изд-во Львовск. ун-та, Львов, 1961, 402 с.
- К о л м о г о р о в А. Н., Т и х о м и р о в В. М. ε -энтропия и ε -емкость множеств в функциональных пространствах.— Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 2 (86), стр. 3—86.
- К о л м о г о р о в А. Н., Ф о м и н С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Вып. 1. Изд-во Моск. ун-та, М., 1954, 154 с.
- К о р е н б л ю м Б. И. Обобщение тауберовой теоремы Винера и гармонический анализ быстрорастущих функций.— Труды Моск. мат. об-ва, 1958, т. 7, стр. 121—148.
- К о с т ю ч е н к о А. Г., М и т я г и н Б. С. Положительно-определенные функционалы на ядерных пространствах.— Труды Моск. мат. об-ва, 1960, т. 9, стр. 283—316.
- К р а с н о с е л ь с к и й М. А. К теории периодических решений неавтономных дифференциальных уравнений.— Усп. мат., наук, 1966, т. 21, вып. 3 (129), стр. 53—74.
- К р а с н о с е л ь с к и й М. А. Некоторые задачи нелинейного анализа.— Усп. мат. наук, 1954, т. 9, вып. 3 (61), стр. 57—114.
- К р а с н о с е л ь с к и й М. А. О применении методов функционального ана-

- лиза к задачам о нелинейных колебаниях.— Труды Третьего Всесоюзн. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.), 1958, т. 3, стр. 261—268.
- Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. «Наука», М., 1966, 329 с.
- Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. ГИТТЛ, М., 1956, 392 с.
- Красносельский М. А. Функциональный анализ и топология в нелинейных проблемах дифференциальных и интегральных уравнений.— Труды Четвертого Всесоюзн. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1963, т. 1, стр. 120—133.
- Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. «Наука», М., 1966, 499 с.
- Красносельский М. А., Крейн С. Г. О дифференциальных уравнениях в банаховом пространстве.— Труды Третьего Всесоюзн. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.), 1958, т. 3, стр. 73—80.
- Красносельский М. А., Крейн С. Г. Об операторных уравнениях в функциональных пространствах.— Труды Четвертого Всесоюзн. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1964, т. 2, стр. 292—299.
- Красносельский М. А., Наймарк М. А., Шолов Г. Е. Функциональный анализ.— В кн.: Математика в СССР за 40 лет, Физматгиз, М., 1959, т. 1, стр. 675—780.
- Красносельский М. А., Перов А. И. О некоторых признаках существования периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— Труды Четвертого Всесоюзн. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961), 1964, т. 2, стр. 445—251.
- Красносельский М. А., Перов А. И., Поволоцкий А. И., Забрейко П. П. Векторные поля на плоскости. Физматгиз, М., 1963, 245 с.
- Красносельский М. А., Рутецкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. Физматгиз, М., 1958, 271 с.
- Красносельский М. А., Рутецкий Я. Б. Пространства Орлича и нелинейные интегральные уравнения.— Труды Моск. мат. об-ва, 1958, т. 7, стр. 63—120.
- Крейн М. Г. Идеи П. Л. Чебышева и А. А. Маркова в теории предельных величин интегралов и их дальнейшее развитие.— Усп. мат. наук, 1951, т. 6, вып. 4 (44), стр. 3—24.
- Крейн М. Г. Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Ротапринт ин-та математики АН УССР, К., 1964, 186 с.
- Крейн М. Г. Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) .— Укр. мат. журн., 1949, т. 1, вып. 2, стр. 3—66.
- Крейн М. Г. Про ермітові оператори з напрямними функціоналами.— Збірник праць ін-ту мат. АН УРСР, 1948, № 10, стор. 83—106.
- Крейн М. Г., Люстерник Л. А. Функциональный анализ.— В кн.: Математика в СССР за 30 лет. ОГИЗ, М.—Л., 1948, стр. 608—672.
- Крейн М. Г., Красносельский М. А. Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их применения к теории ортогональных полиномов и проблеме моментов.— Усп. мат. наук, 1947, т. 2, вып. 3 (19), стр. 60—106.
- Крейн М. Г., Рутман М. А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха.— Усп. мат. наук, 1948, т. 3, вып. 1 (23), стр. 3—95.
- Крейн С. Г. Интерполяционные теоремы в теории операторов и теоремы вложения.— Труды Четвертого Всесоюзн. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1964, т. 2, стр. 504—510.
- Крейн С. Г., Петунин Ю. И. Шкалы банаховых пространств.— Усп. мат. наук, 1966, т. 21, вып. 2 (128), стр. 89—168.
- Ладженская О. А. О разрешимости «в целом» краевых задач для линейных и квазилинейных параболических уравнений и уравнений Навье—Стокса.—

- Труды Четвертого Всесоюзн. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1963, т. 1, стр. 134—157.
- Ладыженская О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. ГИТТЛ, М., 1953, 279 с.
- Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. «Наука», М., 1967, 736 с.
- Ладыженская О. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. «Наука», М., 1964, 538 с.
- Левитан Б. М. Некоторые вопросы спектральной теории самосопряженных дифференциальных операторов. — Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 6 (72), стр. 117—144.
- Левитан Б. М. О дифференцировании разложения по собственным функциям уравнения Шредингера. — Труды Моск. мат. об-ва, 1958, т. 7, стр. 269—290.
- Левитан Б. М. Об асимптотическом поведении спектральной функции и разложении по собственным функциям уравнения $\Delta u + \{\lambda - q(x_1, x_2, x_3)\} u = 0$. — Труды Моск. мат. об-ва, 1955, т. 4, стр. 237—290; 1957, т. 6, стр. 481—485.
- Левитан Б. М. Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения. Физматгиз, М., 1962, 323 с.
- Левитан Б. М. Применение операторов обобщенного сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. — Усп. мат. наук, 1949, т. 4, вып. 1 (29), стр. 3—412.
- Левитан Б. М. Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка. ГИТТЛ, М.—Л., 1950, 159 с.
- Левитан Б. М. Теоремы Ли для операторов обобщенного сдвига. Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 4 (100), стр. 3—30.
- Левитан Б. М. Теоремы Ли для операторов обобщенного сдвига. — Труды Моск. мат. об-ва, 1962, т. 11, стр. 127—197.
- Левитан Б. М., Гасымов М. Г. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам. — Усп. мат. наук, 1964, т. 19, вып. 2 (116), стр. 3—63.
- Левитан Б. М., Марченко В. А., Наймарк М. А. Спектральная теория дифференциальных операторов. — Труды Третьего Всесоюзн. мат. съезда (Москва, июнь—июль 1956 г.), 1958, т. III, стр. 101—116.
- Лейбензон З. Л. Обратная задача спектрального анализа обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков. — Труды мат. Моск. об-ва, 1966, т. 15, стр. 70—144.
- Лившиц М. С. Операторы, колебания, волны Открытые системы. «Наука», М., 1966, 298 с.
- Лившиц М. С. Теория несамосопряженных операторов и ее применения. — Труды Третьего Всесоюзн. мат. съезда (Москва, июнь—июль 1956 г.), 1958, т. III, стр. 269—276.
- Лидский В. Б. Несамосопряженный оператор типа Штурма — Лиувилля с дискретным спектром. — Труды Моск. мат. об-ва, 1960, т. 9, стр. 45—79.
- Лидский В. Б. О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов. — Труды Моск. мат. об-ва, 1961, т. 11, стр. 3—35.
- Лидский В. Б. Условия полноты системы корневых подпространств у несамосопряженных операторов с дискретным спектром. — Труды Моск. мат. об-ва, 1959, т. 8, стр. 83—120.
- Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике. ГИТТЛ, М., 1957, 354 с.
- Любич Ю. И. Классическое и локальное преобразование Лапласа в абстрактной задаче Коши. — Усп. мат. наук, 1966, т. 21, вып. 3 (129), стр. 3—51.
- Люстерник Л. А. Некоторые вопросы нелинейного функционального анализа. — Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 6 (72), стр. 145—168.
- Люстерник Л. А. Топология функциональных пространств и вариационное исчисление в целом. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1947, т. 19, 100 с.
- Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. «Наука», М., 1965, 520 с.

- Маркус А. С. Собственные и сингулярные числа суммы и произведения линейных операторов.— Усп. мат. наук, 1964, т. 19, вып. 4 (118), стр. 93—123.
- Марченко В. А. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. I—II.— Труды Моск. мат. об-ва, 1952, т. 1, стр. 327—420; 1953, т. 2, стр. 3—83.
- Марченко В. А. Разложение по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка.— Мат. сб., 1960, т. 52, вып. 2, стр. 732—788.
- Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. Изд-во Моск. ун-та, М., 1965, 549 с.
- Минлос Р. А. Обобщенные случайные процессы и их продолжение до меры.— Труды Моск. мат. об-ва, 1959, т. 8, стр. 497—518.
- Митягин Б. С. Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах.— Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 4 (100), стр. 63—132.
- Митягин Б. С. Ядерность и другие свойства пространств типа S .— Труды Моск. мат. об-ва, 1960, т. 9, стр. 317—328.
- Митягин Б. С., Тихомиров В. М. Асимптотические характеристики компактов в линейных пространствах.— Труды Четвертого Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1964, т. 2, стр. 299—308.
- Митягин Б. С., Шварц А. С., Функторы в категориях банаховых пространств.— Усп. мат. наук, 1964, т. 19, вып. 2 (116), стр. 65—130.
- Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. ГИТТЛ, М., 1957, 476 с.
- Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. ГИТТЛ, М.—Л., 1952, 216 с.
- Молчанов А. М. Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка.— Труды Моск. мат. об-ва, 1953, т. 2, стр. 169—199.
- Наймарк М. А. Бесконечномерные представления групп и смежные вопросы.— В кн.: Мат. анализ. Теория вероятностей. Регулирование. Сер. Итоги науки. Изд. ин-та научн. информ., М., 1962, стр. 38—83.
- Наймарк М. А. Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на полуоси.— Труды Моск. мат. об-ва, 1954, т. 3, стр. 181—270.
- Наймарк М. А. Кольца операторов в гильбертовом пространстве.— Усп. мат. наук, 1949, т. 4, вып. 4 (32), стр. 83—147.
- Наймарк М. А. Кольца с инволюцией.— Усп. мат. наук, 1948, т. 3, вып. 5 (27), стр. 52—145.
- Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. ГИТТЛ, М., 1954, 351 с.
- Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца.— Усп. мат. наук, 1954, т. 9, вып. 4 (62), стр. 19—93.
- Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца.— Физматгиз, М., 1958, 376 с.
- Наймарк М. А. Нормированные кольца. ГИТТЛ, М., 1956, 487 с.
- Наймарк М. А. Разложение тензорного произведения неприводимых представлений собственной группы Лоренца на неприводимые представления. I—III. Труды Моск. мат. об-ва, 1959, т. 8, стр. 121—153; 1960, т. 9, стр. 237—282; 1961, т. 9, стр. 181—216.
- Наймарк М. А. Спектральный анализ несамосопряженных операторов.— Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 6 (72), стр. 183—202.
- Наймарк М. А., Кац Г. И. Унитарные представления локально компактных топологических групп.— Труды Четвертого Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1964, т. 2, стр. 308—317.
- Наймарк М. А., Фомин С. В. Непрерывные прямые суммы гильбертовых пространств и некоторые их применения.— Усп. мат. наук, 1955, т. 10, вып. 2 (64), стр. 111—142.
- Немыцкий В. В. Метод неподвижных точек в анализе.— Усп. мат. наук, 1936, вып. 1, стр. 141—174.

- Н и к о л ь с к и й С. М. О теоремах вложения, продолжения и приближения дифференцируемых функций многих переменных.— Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 5 (101), стр. 63—114.
- Н и к о л ь с к и й С. М. Об одном семействе функциональных пространств.— Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 6 (72), стр. 203—212.
- О н и щ и к А. Л. Отношения включения между транзитивными компактными группами преобразований.— Труды Моск. мат. об-ва, 1962, т. 11, стр. 199—242.
- П а л а м о д о в В. П. Преобразования Фурье быстро растущих бесконечно дифференцируемых функций.— Труды Моск. мат. об-ва, 1962, т. 11, стр. 309—350.
- П а н е я х Б. П. Некоторые неравенства для функций экспоненциального типа и априорные оценки для общих дифференциальных операторов.— Усп. мат. наук, 1966, т. 21, вып. 3 (129), стр. 75—114.
- П л е с н е р А. И. Спектральная теория линейных операторов, I.— Усп. мат. наук, 1941, вып. 9, стр. 3—125.
- П л е с н е р А. И. Спектральная теория линейных операторов. «Наука», М., 1965, 624 с.
- П л е с н е р А. И., Р о х л и н В. А. Спектральная теория линейных операторов, ч. II.— Усп. мат. наук, 1946, т. 1, вып. 1 (11), стр. 71—191.
- П о в з н е р А. Я. О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $\Delta u + cu$.— Мат. сб., 1953, т. 32, вып. 1, стр. 109—156.
- П о н т р я г и н Л. С. Непрерывные группы. ГИТТЛ, М., 1954, 515 с.
- П о н т р я г и н Л. С. Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1944, № 8, стр. 243—280.
- П о т а п о в В. П. Мультипликативная структура J -нерастягивающих матриц-функций.— Труды Моск. мат. об-ва, 1955, т. 4, стр. 125—236.
- П р о х о р о в Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей.— Теория вероятности и ее применение, 1956, т. 1, вып. 2, стр. 177—238.
- П я т е ц к и й - Ш а п и р о И. И. Арифметические группы в комплексных областях.— Усп. мат. наук, 1964, т. 19, вып. 6 (120), стр. 93—121.
- П я т е ц к и й - Ш а п и р о И. И. Геометрия и классификация ограниченных однородных областей.— Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 2 (122), стр. 3—51.
- П я т е ц к и й - Ш а п и р о И. И. Геометрия классических областей и теория автоморфных функций. Физматгиз, М., 1961, 191 с.
- Р а й к о в Д. А. Векторные пространства. Физматгиз, М., 1962, 211 с.
- Р а й к о в Д. А. Вполне непрерывные спектра локально выпуклых пространств.— Труды Моск. мат. об-ва, 1958, т. 7, стр. 413—438.
- Р а й к о в Д. А. Гармонический анализ на коммутативных группах с мерой Хаара и теория характеров.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1945, т. 14, 86 с.
- Р а й к о в Д. А. Теоремы о замкнутом графике и полнота топологических линейных пространств.— Труды Четвертого Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1964, т. II, стр. 317—323.
- Р а й к о в Д. А. Топология функциональных пространств.— Труды Третьего Всесоюз. мат. съезда (Москва, июнь—июль 1956 г.), 1958, т. 3, стр. 276—283.
- Р а п о п о р т И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Изд-во АН УССР, К., 1954, 290 с.
- Р а ш е в с к и й П. К. Ассоциативная сверхоболочка алгебры Ли, ее регулярное представление и идеалы.— Труды мат. об-ва, 1966, т. 15, стр. 3—54.
- Р о з а н о в Ю. А. Некоторые вопросы теории вероятностей.— В кн.: Мат. анализ. Теория вероятностей. Регулирование. Сер. Итоги науки. Изд. ин-та науч. информ., 1962, М., стр. 101—155.
- Р о х л и н В. А., Ф о м и н С. В. Спектральная теория динамических систем.— Труды Третьего Всесоюз. мат. съезда (Москва, июнь—июль 1956 г.), 1958, т. 3, стр. 284—292.
- С и г а л о в А. Г. Об основной математической задаче теории атомных спектров.— Усп. мат. наук, 1967, т. 22, вып. 2 (134), стр. 3—20.
- С и г а л о в А. Г. Прямые методы вариационного исчисления.— Труды Третьего Всесоюз. мат. съезда (Москва, июнь—июль, 1956 г.), 1958, т. III, стр. 293—299.

- Сирота А. И., Солодовников А. С. Некомпактные полупростые группы Ли.— Усп. мат. наук, 1963, т. 18, вып. 3 (111), стр. 87—144.
- Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 5. ГИТТЛ, М.— Л., 1947, 584 с.
- Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во Сиб. отд. АН СССР, Новосибирск, 1962, 955 с.
- Соболев С. Л., Вишик М. И. Некоторые функциональные методы в теории уравнений с частными производными.— Труды Третьего Всесоюз. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.), 1958, т. 3, стр. 152—162.
- Соболев С. Л., Никольский С. М. Теоремы вложения.— Труды Четвертого Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), I, 1963, стр. 227—242.
- Соболевский П. Е. Исследования уравнений в частных производных с помощью дробных степеней операторов.— Труды Четвертого Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1964, т. 2, стр. 519—525.
- Соболевский П. Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве.— Труды Моск. мат. об-ва, 1961, т. 10, стр. 297—350.
- Стернин Б. Ю. Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности.— Труды Моск. мат. об-ва, 1966, т. 15, стр. 346—382.
- Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений.— Усп. мат. наук, 1960, т. 15, вып. 3 (93), стр. 81—120.
- Фаге М. К. Интегральные представления операторно-аналитических функций одной независимой переменной.— Труды Моск. мат. об-ва, 1959, т. 8, стр. 3—48.
- Фаге М. К. Операторно-аналитические функции одной независимой переменной.— Труды Моск. мат. об-ва, 1958, т. 7, стр. 227—268.
- Фаддеев Л. Д. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1963, т. 69, 122 с.
- Фаддеев Л. Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния.— Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 4 (88), стр. 57—119.
- Федорюк М. В. Асимптотические методы в теории одномерных сингулярных дифференциальных операторов.— Труды мат. Моск. об-ва, 1966, т. 15, стр. 296—345.
- Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. «Наукова думка», К., 1966, 248 с.
- Функциональный анализ. Под ред. С. Г. Крейна. «Наука», М., 1964, 424 с.
- Цитланадзе Э. С. Теоремы существования точек минимакса в пространствах Банаха и их приложения.— Труды Моск. мат. об-ва, 1953, т. 2, стр. 235—274.
- Чеботарев Н. Г. Теория групп Ли. ГИТТЛ, М.— Л., 1940, 396 с.
- Шилов Г. Е. Введение в теорию линейных пространств. ГИТТЛ, М.— Л., 1952, 384 с.
- Шилов Г. Е. Интегрирование в бесконечномерных пространствах и интеграл Винера.— Усп. мат. наук, 1963, т. 18, вып. 2 (110), стр. 99—120.
- Шилов Г. Е. Математический анализ (Второй специальный курс). «Наука», М., 1965, 327 с.
- Шилов Г. Е. Обобщенные функции и их приложения в анализе.— Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 6 (72), стр. 217—226.
- Шилов Г. Е. Однородные кольца функций.— Усп. мат. наук, 1951, т. 6, вып. 1 (41), стр. 91—137.
- Шилов Г. Е. О корректных краевых задачах в полупространстве для линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.— Усп. мат. наук, 1964, т. 19, вып. 3 (117), стр. 3—52.
- Шилов Г. Е. О регулярных нормированных кольцах.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1947, т. 21, 118 с.
- Шилов Г. Е., Фандык Тинь. Интеграл, мера и производная на линейных пространствах. «Наука», М., 1967, 192 с.
- Эйдельман С. Д. Параболические системы.— Труды Четвертого Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1964, т. 2, стр. 525—530.

- Эйдельман С. Д. Параболические системы. «Наука», М., 1964, 443 с.
- Яглом А. М. Спектральные представления для различных классов случайных функций.— Труды Четвертого Всесоюзн. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.), 1963, т. 1, стр. 250—273.

К главе VII. Интегральные уравнения

- Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. «Наука», М., 1966, 203 с.
- Быков Я. В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. Изд-во Кирг. ун-та, Фрунзе, 1957, 327 с.
- Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. Гостехтеориздат, М., 1956, 344 с.
- Векуа И. Н. Интегральные уравнения с особым ядром типа Коши.— Труды Тбилисск. мат. ин-та, 1941, т. 10, стр. 45—72.
- Векуа И. Н. К теории сингулярных интегральных уравнений.— Сообщ. АН ГрССР, 1942, т. 3, № 9, стр. 869—876.
- Векуа И. Н. О сингулярных интегральных уравнениях, содержащих интегралы в смысле главного значения по Коши.— ДАН СССР, 1940, т. 26, № 4, стр. 335—338.
- Векуа И. П. Системы сингулярных интегральных уравнений. Гостехиздат, М., 1950, 252 с.
- Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963, 639 с.
- Гегелиа Т. Г. О регуляризации сингулярных интегральных операторов.— Труды Тбилисск. мат. ин-та, 1964, т. 29, стр. 229—237.
- Гегелиа Т. Г. О свойствах многомерных сингулярных интегралов в пространстве $L_p(S, \rho)$.— ДАН СССР, 1961, т. 139, № 2, стр. 279—282.
- Гохберг И. Ц. К теории многомерных сингулярных интегральных уравнений.— ДАН СССР, 1960, т. 133, № 6, стр. 1279—1282.
- Гохберг И. Ц. Об одном применении теории нормированных колец к сингулярным интегральным уравнениям.— Усп. мат. наук, 1952, т. 7, вып. 2 (48), стр. 149—156.
- Гусейнов А. И. Теоремы существования и единственности для нелинейных интегральных сингулярных уравнений.— Мат. сб., 1947, т. 20 (62), вып. 2, стр. 239—310.
- Данилюк И. И. К теории одномерных сингулярных уравнений.— В кн.: Проблемы механики сплошной среды. Изд-во АН СССР, М., 1961, стр. 135—144.
- Красносельский М. А. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. Физматгиз, М., 1966, 496 с.
- Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Главы нелинейного анализа. Физматгиз, М., 1962, 394 с.
- Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Гостехиздат, М., 1956, 392 с.
- Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов.— Усп. мат. наук, 1958, т. 13, вып. 5 (83), стр. 3—120.
- Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. Физматгиз, М., 1963, 472 с.
- Манджавидзе Г. Ф. Об одном сингулярном интегральном уравнении с разрывными коэффициентами и его применении в теории упругости.— Прикл. мат. и мех., 1951, т. 15, вып. 3, стр. 279—296.
- Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе, 1963, 183 с.
- Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. Физматгиз, М., 1962, 254 с.
- Михлин С. Г. Сингулярные интегральные уравнения.— Усп. мат. наук, 1948, т. 3, вып. 3 (25), стр. 29—112.

- Му с х е л и ш в и л и Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. Изд. 2-е. Физматгиз, М., 1962, 599 с.
- Му с х е л и ш в и л и Н. И. и К в е с е л а в а Д. А. Сингулярные интегральные уравнения с ядрами типа Коши на разомкнутых контурах.— Труды Тбилисск. мат. ин-та, 1942, т. 11, стр. 141—172.
- Н а з а р о в Н. Н. К теории нелинейных интегральных уравнений.— Труды Ср.-Аз. ун-та, 1937, т. 17, стр. 1—13.
- Н а з а р о в Н. Н. Точки ветвления решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений.— Труды Ин-та мат. и мех. АН УзССР, 1948, т. 4, стр. 59—65.
- Н е к р а с о в А. И. О волнах установившегося вида.— Изв. Ивановск. политехн. ин-та, 1922, № 6, стр. 155—171.
- Н е к р а с о в А. И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений.— Труды ЦАГИ, 1934, № 190, стр. 12—17.
- Н е м ы ц к и й В. В. Метод неподвижных точек в анализе.— Усп. мат. наук, 1936, вып. I, стр. 141—175.
- Н е м ы ц к и й В. В. Об одном общем классе нелинейных интегральных уравнений.— Мат. сб., 1934, т. 41, вып. 4, стр. 655—658.
- Р а п о п о р т И. М. О некоторых «парных» интегральных и интегро-дифференциальных уравнениях.— Сб. трудов Ин-та мат. АН УССР, 1949, № 12, стр. 102—118.
- Р а п о п о р т И. М. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений.— ДАН СССР, 1948, т. 59, № 6, стр. 1403—1406.
- С и м о н е н к о И. Б. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. I—II.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1965, т. 29, № 3, стр. 567—586; № 4, стр. 757—782.
- С и м о н е н к о И. Б. О некоторых интегро-дифференциальных уравнениях типа свертки.— Изв. вузов. Математика, 1959, № 2, стр. 213—226.
- У р ы с о н П. С. Об одном типе нелинейных интегральных уравнений.— Мат. сб., 1924, т. 31, вып. 2, стр. 236—255.
- Ф о к В. А. О некоторых интегральных уравнениях математической физики.— Мат. сб., 1944, т. 14 (56), вып. 1, стр. 3—50.
- Х а л и л о в З. И. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах. Изд-во АН АзССР, Баку, 1949, 266 с.
- Х а р а з о в Д. Ф. О распределении собственных значений интегральных уравнений с рациональными относительно параметра ядрами.— ДАН СССР, 1950, т. 71, № 6, стр. 1033—1035.
- Х в е д е л и д з е Б. В. Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения.— Труды Тбил. мат. ин-та, 1956, т. 23, 158 с.
- Ч е р с к и й Ю. И. Об уравнениях типа свертки.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1958, т. 22, № 3, стр. 361—378.
- Ч е р с к и й Ю. И. О некоторых особых интегральных уравнениях.— Уч. зап. Казанск. ун-та, 1953, т. 113, кн. 10, стр. 43—55.
- G u n t h e r N. Sur quelques applications nouvelles de la theorie des fonctions des domaines á la theorie des equations integrales. I—III.— Мат. сб., 1935, т. 42, вып. 3, стр. 279—384; 1937, т. 2 (44), вып. 2, стр. 197—274; вып. 3, стр. 387—464.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абасов А. М. 798
 Абдинова А. 798
 Абдулаев Р. Н. 250—252, 290, 355
 Абдыкалыков С. В. 795
 Абе 334
 Абель 53—56, 58—62, 278, 355, 367, 461, 801
 Абрамович Г. Н. 804
 Абуталиев Ф. Б. 607
 Авакумович В. 452
 Авербух В. И. 726
 Аветисян А. Е. 18, 101, 103
 Агмон С. 278, 513, 515, 542, 707, 717
 Агранович З. С. 697, 843
 Агранович М. С. 486, 543, 545, 567, 594, 595, 708, 712, 829, 843
 Адамар 10, 14, 24, 25, 461, 500, 549, 572, 575, 584, 720, 726
 Адамов Н. В. 452, 466, 467
 Адамян В. М. 697
 Адельсон-Вельский Г. М. 739
 Адонц М. Т. 798
 Адрианова Л. Я. 389, 467
 Азарин В. С. 27, 28
 Азбелев Н. В. 413, 464, 475, 476, 752, 814
 Айзенберг Л. А. 194—196, 198, 199, 800, 804
 Айзерман М. А. 392, 406, 410, 453, 467, 483, 814, 822
 Акилов Г. П. 746, 848
 Аким Э. Л. 743
 Акопян С. А. 101, 104
 Аксентьев Л. А. 259, 260, 804
 Акуленко Л. Д. 434
 Аландер 41
 Александр 637
 Александров А. Д. 486, 498, 535, 537, 538, 829
 Александров В. М. 795
 Александров И. А. 309, 310, 804
 Александров П. С. 459, 498, 637, 646, 748
 Александрян Р. А. 583, 601, 651, 672, 683, 843
 Алексеев А. Д. 236, 239, 780
 Алексеев А. С. 619, 620, 829
 Алексеев В. А. 464
 Алексеев В. М. 419, 436
 Аленицын А. Г. 619, 830
 Аленицин Ю. Е. 301, 305, 804
 Алимов А. 471
 Алимов Ю. И. 453, 468
 Аллахвердиев Д. Э. 674
 Альбер С. И. 637, 638, 840
 Альбрехт А. Г. 468
 Альмухамедов М. И. 380, 399, 407, 410, 452, 814
 Альпер С. Я. 144, 145, 224, 225, 804
 Альтман М. Ш. 662
 Альфорс Л. 45, 123, 125, 272, 305, 306, 329, 330, 343, 804
 Амбарцумян В. А. 694
 Америо 406
 Ампер 535, 537, 750
 Андрашко М. И. 34
 Андреев А. Ф. 398—400, 407, 466, 467, 483, 814, 816
 Андронов А. А. 395, 396, 400, 454, 459, 460, 480, 814, 825
 Андропова-Леонтович Е. А. 395, 454, 814, 815, 822
 Анзани 768
 Анитова Е. С. 467
 Аносов Д. В. 429, 434, 465, 466, 771
 Антоновский М. Я. 751
 Антосиевич Г. А. 388
 Аппель 114
 Аравин В. И. 363, 804

- Аракелян Н. У. 20, 36, 37, 101, 159 — 163
 Аргирова Т. 341
 Аронсон 565
 Аржаников Н. С. 363
 Аржанов Г. В. 253
 Аржанных И. С. 453, 470, 589
 Арнольд В. И. 421, 462, 465, 482, 662, 770—772, 814
 Аров Д. З. 697
 Ароншайн Н. 498, 676, 701, 707
 Арсенин В. Я. 6
 Артеменко А. П. 657
 Артемьев Н. А. 394, 412, 416—418, 466, 814
 Арутюнян Ф. Г. 101
 Архипов Б. М. 414, 478
 Арцел 661
 Аскеров Н. К. 683
 Асколи 661
 Атья М. Ф. 517, 544, 545, 708, 789
 Аткинсон Ф. В. 517, 707
 Атрашенюк П. В. 390, 393, 396, 414, 466, 814
 Ахиезер А. И. 6
 Ахиезер Н. И. 30, 68, 70, 73, 82—84, 89—92, 94, 95, 99, 101, 108—110, 150, 164, 176, 193, 224, 646, 650, 781, 800, 804, 840, 843
 Ахмедов К. Т. 759, 797
- Бабаев А. А. 224, 236, 253, 780, 798, 804
 Бабенко К. И. 19, 21, 22, 150, 224, 556, 584, 596, 604, 605, 662, 804
 Бабич В. М. 486, 497, 499, 575, 615, 616, 620, 830, 843
Баврин И. И. 197—200, 311, 800
 Багаутдинов Г. Н. 469
 Баггис Г. Ф. 395, 815
 Багирова Н. Х. 437
 Бадалян Г. В. 304
 Бадер В. 413
 Базанов Б. В. 690, 696
 Базилевич И. Е. 297, 298, 307, 308, 311, 804
 Байдосов В. А. 468
 Баймуханов Ж. 469
 Бакельман И. Я. 534, 535, 537, 750
 Бакиевич Н. И. 607
 Баклан В. В. 723, 726
 Бакланов М. В. 346, 347
 Балабанов В. А. 642
 Балк М. Б. 47
 Балуев А. Н. 746
 Банах С. 497, 645—647, 655, 656, 660, 751, 775, 842, 849, 853
 Банин А. М. 365
 Банцури Р. Д. 791, 792
- Барановский Ф. Т. 585, 830
 Баранцев Р. Г. 585
 Барбашин Е. А. 383, 384, 391—394, 400, 406, 410, 413, 449, 452, 453, 461, 464, 465, 468, 481—483, 636, 815, 821
 Баренблатт Г. И. 569, 570
 Бари Н. К. 223, 662, 804
 Барковский В. В. 683
 Басов В. П. 386, 387—390, 466, 467, 483, 815
 Басс Г. И. 532, 830
 Баутин Н. Н. 395, 396, 406, 408, 454, 815
 Бахтин И. А. 649, 747—751, 760
 Башмакова И. Г. 2
 Бебутов М. В. 395, 461
 Бедельбаев А. К. 469
 Белинский П. П. 44, 318, 328, 330—332, 338, 343, 354, 355, 804, 805
 Беллман Р. 414, 415, 441, 443, 446, 447, 465, 485, 639, 815
 Бельтрами 267, 272, 279, 848
 Бельюстина Л. Н. 395, 406, 409, 454, 814, 815
 Бендиксон 368, 394, 470
 Бергман 196, 205, 206, 209
 Березанский Ю. М. 6, 508, 543, 555, 583, 606, 650, 672, 682, 688, 690—693, 695—697, 704, 707, 709, 733, 744, 749, 830, 843
 Березин И. С. 584, 830
 Березин Ф. А. 678, 692, 693, 697, 725, 740, 741, 745, 843, 844, 846
 Берикашвили Н. А. 789
 Беркович Ф. Д. 794, 795
 Берлинг 343, 729, 734
 Берлинский А. Н. 407, 410, 470, 815
 Бермант А. Ф. 303, 304, 800
 Бернацкий М. 311
 Бернулли Д. 625, 644
 Бернулли И. 627
 Бернштейн В. 17, 18
 Бернштейн С. Н. 13, 49, 57, 67, 69, 73, 80—85, 88—90, 92, 108, 113, 136—138, 141—143, 150, 152, 158, 164, 193, 487, 490—493, 514, 532—535, 537, 560, 629, 630, 645, 654, 706, 800, 830, 840
 Берс Л. 268, 269, 275, 278, 279, 281, 330, 526, 529, 804
 Бесов О. В. 498, 658, 659
 Бессель 59, 83, 367, 387, 618
 Бессмертных Г. А. 453, 474, 815
 Бессонов П. А. 225
 Бетти 634
 Бетц 255
 Биберах 10, 11, 39—41, 297
 Бибииков Ю. Н. 467
 Билер 77, 78, 80

- Билута П. А. 332
 Биркгоф Г. 368, 387, 394, 395, 410, 431, 459, 461, 479, 484, 762, 798, 815, 822
 Бирман М. Ш. 486, 491, 528, 529, 553, 554, 662, 670, 685, 696, 697, 709, 830, 844
 Бирюк Г. И. 420, 815
 Бисярина Л. П. 468
 Битлян И. Ф. 203
 Бицадзе А. В. 241, 269, 515, 516, 522, 543, 545, 584, 604, 605, 607, 709, 780, 788, 789, 805, 830, 832, 834, 835, 854
 Бишоп Э. 127, 732
 Благовещенский А. С. 601
 Благовещенский Ю. В. 364
 Благовещенский Ю. Н. 558, 570
 Бланк Я. П. 110
 Блацак В. А. 697, 699
 Блехман И. И. 413
 Блинов И. Н. 417, 420, 467, 815
 Блинчевский В. С. 816
 Блисс 628
 Блок 45
 Блох А. Ш. 695
 Блох Э. Л. 367
 Бляшке 45, 220, 292, 304
 Боас Р. 67, 70, 93
 Бобик Е. И. 479
 Бобков В. В. 6
 Бобылев Д. К. 357
 Богданов В. И. 802
 Богданов Ю. С. 386, 389, 390, 411, 466, 477, 483, 816
 Боголюбов А. Н. 2, 6, 22
 Боголюбов Н. Н. 2, 6, 209, 210, 372—374, 377, 391, 395, 396, 412, 413, 420, 434, 435, 454—456, 461, 480—482, 630, 631, 633, 647, 661, 698, 748, 760, 763, 770, 800, 804, 816, 821, 825, 842, 844
 Боголюбов Н. Н. (мл.) 412
 Богословский Б. П. 477, 483
 Богоявленский А. А. 385, 816
 Болтянский В. Г. 453, 465, 482, 639, 751, 825, 840, 842
 Боль П. 368, 394, 414, 418, 420, 823
 Больц 628, 841
 Больцман 624, 762
 Бондаренко П. С. 419, 452
 Борг Г. 694
 Борель 17, 24, 55, 56, 58, 60—63, 98, 191, 202—204, 522, 801
 Борель А. 207
 Борель Э. 149
 Борисова С. Ю. 437
 Борисович Ю. Г. 437, 473, 474, 641, 642, 649, 715, 750, 751, 754, 760, 816, 840
 Боровиков В. А. 575, 593, 618, 830, 844
 Борок В. М. 596, 598—600, 711
 Борхарт 74
 Ботт Р. 708
 Бохнер С. 95, 193, 196, 580, 690, 721, 733
 Боярский Б. В. 237, 243, 244, 246, 247, 273, 279, 281, 284, 285, 290, 329, 789, 805, 831
 Брадистиллов Г. 413
 Браудер Ф. Е. 515, 542, 564, 682, 707, 719
 Брауэр 115, 167
 Бредфилд К. 366
 Брело 133
 Бреус К. А. 389, 586, 816
 Бриш Н. И. 429
 Бродский М. С. 675, 676, 844
 Бронштейн И. У. 474, 475
 Броуэр 394
 Брудный Ю. А. 654, 662
 Брушлинская Н. Н. 622, 831
 Брюллюэн 431
 Брюно А. Д. 405, 463, 483, 816
 Буземан 604
 Булдырев В. С. 486, 614, 619, 831
 Булыгин В. Я. 264
 Бураго Ю. Д. 522
 Бурд В. Ш. 473, 649, 715, 760, 816
 Буслаев В. С. 486, 615, 687, 697, 831
 Бутковский А. Г. 640, 840
 Бутузов В. Ф. 437, 438
 Бхану-Мурти Г. С. 741
 Бык М. А. 586
 Быков В. П. 614, 831
 Быков Я. В. 420, 474, 642, 760, 816, 854
 Былов Б. Ф. 389, 390, 405, 420, 464, 816
 Бэклунд 590
 Бюль 587, 588
 Важевский Т. 388, 414, 415, 420, 464, 473, 485
 Вазов В. 413
 Вайнберг Б. Р. 531, 546, 709, 712, 831, 844
 Вайнберг М. М. 465, 641, 642, 650, 754, 756, 760, 798, 840, 844, 854
 Вайнштейн А. 263
 Вайнштейн Л. А. 614, 831, 835
 Вайсборд Э. М. 403, 411, 463, 483, 816
 Вайтман 693
 Валеев К. Г. 418, 419, 445—447, 467, 816, 817
 Валиков К. В. 465
 Валирон Ж. 10, 11, 14, 15, 36, 39, 45, 202, 203

- Валле-Пуссен 479
 Ван-дер-Поль Б. 409, 430, 454, 612, 818, 819
 Васильев Н. Б. 844
 Васильева А. Б. 5, 409, 426, 427, 435—438, 448, 463, 817
 Ватсон 612—614, 835
 Вахутинский И. Я. 742
 Вашарин А. А. 558
 Введенская Н. Д. 557, 568, 577, 831
 Вдовина Э. В. 410
 Ведерников В. В. 361, 363, 805
 Вейвода О. 412
 Вейерштрасс К. 41, 91, 92, 94, 112—114, 117, 149, 158, 212, 275, 456, 628, 629, 731
 Вейль Г. 196, 496, 502, 541, 612, 680, 735, 737
 Вейнгартен 590
 Вейниг 255
 Векилов Ш. И. 252
 Векслер А. И. 751
 Векуа И. Н. 5, 230, 231, 241, 244—246, 248, 267, 268, 270, 272, 273, 275, 279, 280, 284, 290, 329, 357—359, 513, 516, 517, 524—526, 529, 531, 559, 593, 707, 778, 782—784, 786, 788, 805, 831, 854
 Векуа Н. П. 231, 234—236, 238, 243, 246, 249, 289, 437, 780, 785, 786, 805, 854
 Великая С. М. 6
 Великий А. П. 437
 Вельте 625
 Вельянинова З. Р. 6
 Вениаминов В. Н. 220, 226
 Вентцель Т. Д. 431, 520, 563, 568, 831, 832
 Верблюнский С. 441
 Вержбицкий Б. Д. 371, 465
 Верлань А. Ф. 6
 Вермер 733
 Вертгейм Б. А. 334
 Вершик А. М. 722, 723, 766
 Виденский В. С. 13, 14
 Видом 240
 Визитей В. Н. 556, 832
 Викторовский Е. Е. 453
 Виленкин Н. Я. 367, 691, 692, 705, 723, 741—743, 845
 Виман 14, 15, 19, 39, 41, 42, 102, 203
 Винберг Э. Б. 207, 208, 844
 Винер 82, 95—97, 99, 101—103, 105, 106, 128, 133, 522, 523, 618, 645, 722—724, 729—731, 789, 791, 848, 853
 Виноград Р. Э. 388—390, 398, 400, 405, 464, 816, 817
 Виноградов В. С. 244, 284, 483, 805
 Виноградов Н. Н. 406, 412, 477, 483, 817
 Винокуров В. Г. 662
 Винокуров В. Р. 468
 Винтер А. 715
 Вирабян Г. В. 683
 Витт А. А. 395, 400, 454
 Виттих 330, 801
 Витушкин А. Г. 123, 125, 128, 131, 132, 134, 135, 171, 661, 662
 Вишик М. И. 429, 433, 437, 501, 502, 505, 515, 527, 528, 541, 543, 546, 547, 551, 552, 557, 560, 561, 564, 567—570, 603, 654, 669, 670, 705—708, 717, 789, 817, 829, 832, 843, 844, 853
 Вишневский Л. А. 760
 Владимиров В. С. 209, 210, 253, 698, 800, 801, 804, 805, 844, 845
 Вогеларе Р. де 414
 Войлоков М. И. 406, 409—411
 Волевич Л. Р. 517, 593, 705, 708, 709, 712, 845
 Волк В. Я. 695
 Волк И. М. 422, 429
 Волков Д. М. 580
 Волков Е. А. 606, 832
 Волков Ю. А. 538
 Волкова В. А. 419
 Волковский Л. И. 5, 35, 43, 44, 318, 334, 353, 801, 805
 Волкодав В. Ф. 584, 605
 Волосов В. М. 425, 434—436, 448, 463, 817
 Вольперт А. И. 290, 516, 526, 542, 545, 577, 708, 789, 805, 832, 845
 Вольтерра 101, 104, 186, 229, 280, 524, 571, 582, 618, 675, 773
 Воробьев А. П. 405, 407, 451, 477, 483, 817
 Воробьев Л. М. 483
 Ворович И. И. 623, 651, 756, 832
 Воронова В. Ф. 410
 Воронцов Б. Д. 407, 468
 Воскресенский Е. П. 642
 Вострецов Б. А. 144, 215, 806
 Вострова Л. Е. 604, 832
 Вроч 384
 Вулих Б. З. 647, 650, 746, 747, 751, 752, 845, 848
 Ву Нгоан 37
 Вьясала Ю. 336, 342
 Габасов Р. 437, 468, 840
 Габиб-заде А. Ш. 797
 Гаврилов В. И. 333, 806
 Гаврилов Л. И. 75
 Гаврилов Н. И. 388, 394, 478, 817
 Гавурин М. К. 647, 657, 760
 Гагаев Б. М. 367, 798
 Гагуа М. Б. 224, 253, 806

- Гаек 723
 Газеман 228, 229, 238, 243
 Галахов М. А. 429
 Галеркин Б. Г. 437, 482, 505, 528, 547, 559, 560, 568, 570, 585, 623, 841
 Галин Л. А. 264, 363
 Галиуллин А. С. 391, 639, 817
 Галонен Л. М. 621
 Гальперин В. Г. 360, 813
 Гальперн С. А. 601
 Гальярдо 659
 Гамбургер 589
 Гамбье 448
 Гамильтон 378, 385, 642, 772, 820, 821
 Гамкредидзе Р. В. 465, 482, 639, 825, 842
 Гаммерштейн 797—799
 Ганин М. П. 246, 248, 806
 Ганкель 99
 Гантмахер Ф. Р. 387, 410, 453, 814, 817, 845
 Гапошкин В. Ф. 224
 Гарилов Р. М. 683
 Гарнье 448
 Гартман 464
 Гартогс 114, 117, 122
 Гастев Ю. А. 2, 6
 Гасымов М. Г. 695, 697, 850
 Гаусс К. 15, 111, 112, 291, 465, 628, 644
 Гафари 406, 408, 414
 Гаханов А. К. 387, 388, 390, 466
 Гахов Ф. Д. 2, 5, 212, 231—234, 236, 237, 239, 243—246, 255, 257, 258, 260, 261, 517, 778—780, 784, 791, 793, 797, 806, 854
 Гачко В. П. 693
 Гегелиа Т. Г. 6, 224, 236, 237, 780, 787, 788, 806, 854
 Гелиг А. Х. 467, 583
 Геллерштейн 42
 Гельдер 108, 221, 224, 231—233, 236, 240, 243, 245—247, 255, 260, 272—274, 279, 282, 288, 315, 319, 338, 339, 514, 527, 529, 533, 534, 547, 561, 562, 566, 567, 579, 652, 778—783, 792, 796
 Гельман А. Е. 389, 390, 412, 417, 420, 467, 817
 Гельман И. В. 759
 Гельмгольц Г. 357, 522, 530, 531, 608, 609, 614, 615, 830
 Гельфанд И. М. 20, 21, 416, 418, 462, 506, 507, 511, 516, 528, 575, 577, 590—592, 595, 596, 647, 648, 649, 654, 656, 657, 662, 672, 682, 685—687, 691, 694, 695, 703—705, 708, 711, 721—725, 727, 729, 733, 737—745, 771, 822, 832, 843—846.
 Гельфонд А. О. 2, 24, 47—49, 51—62, 70—72, 179, 180, 184, 185, 188, 189, 801
 Гельчинский Б. Я. 619, 620, 832, 837
 Герамидзе В. Е. 468
 Геращенко Е. И. 468, 815
 Герглотц 305, 575
 Геринг Ф. 336, 337, 342
 Геронимус Я. Л. 176, 224, 367, 801
 Герц 612
 Гершгорин С. А. 365
 Гехт Б. И. 253, 798, 806
 Гехтман М. М. 532, 699
 Гече Ф. И. 202, 203, 801
 Гиббс 762
 Гильберт Д. 210, 212, 228—230, 242—245, 249, 251—253, 263, 282, 491, 492, 497, 517, 526, 532—534, 628—630, 645, 661, 666, 673, 773, 774, 777, 780, 781, 783, 806, 807, 809, 813, 840
 Гимадиславов М. Г. 699
 Гиндикин С. Г. 204, 207, 208, 741, 743, 801, 846
 Гинзбург Ю. П. 676, 677, 846
 Гирсанов И. В. 558, 562, 722, 766
 Гихман И. И. 6, 715, 760, 846
 Глазман И. М. 554, 650, 671, 674, 683, 684, 690, 843, 844, 846
 Гласко В. Б. 433
 Глебов Н. И. 264
 Глебский Ю. В. 631
 Глисон Э. 730
 Глушко В. П. 654, 716
 Глушков В. М. 2, 6
 Гнеденко Б. В. 2, 6, 691
 Говоров Н. В. 11, 19, 28—30, 34, 237, 806
 Говорухина А. А. 793, 794
 Годунов С. К. 521, 568, 577, 578, 833
 Головань В. М. 363
 Головин В. Д. 97
 Головкин К. К. 498, 542, 622—624, 833, 846
 Голодец В. Я. 743, 745
 Голоквочюс П. Б. 417, 477, 479, 817
 Голомб 798
 Голосов Ю. И. 723
 Голубев В. В. 211—214, 221, 222, 358, 359, 806
 Голузин Г. М. 211, 222, 295—297, 299—301, 303, 306—310, 334, 359, 801, 806
 Гольдберг А. А. 5, 11, 17, 34—39, 42, 44, 45, 47, 201—203, 353, 354, 801, 806
 Гольденблатт И. И. 418
 Гольденштейн Л. С. 795
 Гольцман В. К. 225
 Гомори 405, 414

Гончар А. А. 5, 126—128, 135, 149, 732, 801
 Гончаров В. Л. 32, 33, 45, 46, 48, 51, 53—62, 801
 Горбачук В. И. 692
 Горбачук М. Л. 689, 692
 Горбунов А. Д. 464
 Гордадзе Э. Г. 225, 239, 240, 780
 Гордевский Д. З. 110
 Гординг Л. 541, 682, 706
 Гордон И. И. 636
 Горин Е. А. 593, 594, 600, 712, 731—733, 833, 846
 Горчаков В. Н. 686
 Горшин С. И. 391, 393, 469, 817
 Гофман 211
 Гохберг И. Ц. 237, 241, 517, 651, 674—676, 707, 708, 729, 783, 787, 789—795, 806, 844, 846, 847, 854
 Граве Д. А. 586, 646
 Градштейн И. С. 422, 424, 435, 463, 817, 818
 Граев М. И. 741—744, 844—847
 Граффи Д. 413
 Грацианская Л. Н. 419
 Гретш 299, 300, 303, 312, 313, 334, 336
 Григорьян А. Т. 2
 Грин 89, 117, 137, 222, 228, 245, 270, 433, 475, 507, 522, 541, 543, 544, 561, 567, 598, 615, 616, 619, 703, 830, 833, 836, 837, 839
 Гринберг Г. А. 807
 Гринблум М. М. 662
 Гришин А. Ф. 19
 Гробман Д. М. 389, 390, 398, 403—405, 483, 816, 818
 Гроза Л. А. 437
 Громмер И. 74—77
 Гросман Д. П. 636
 Гросберг И. Ю. 657
 Гросберг Ю. И. 747
 Грудо Э. И. 449, 452, 477, 483, 818
 Груз Д. М. 398, 405, 483, 818, 821
 Грунский 299
 Грушин В. В. 531, 546, 591—594, 704, 709, 712, 833, 846
 Гсу С. С. 413
 Губарь И. Г. 364
 Гук 293
 Гукер С. 366
 Гурарий В. И. 655
 Гурарий В. П. 95, 96, 730
 Гурвиц 49, 75—77, 80, 367, 384, 803
 Гуревич Б. Л. 591, 596, 597, 703
 Гуревич Л. А. 662
 Гуревич М. И. 363, 807
 Гурса 584
 Гусарова В. С. 465
 Гусева О. В. 514, 529, 541, 544, 566, 707, 833

Гусейнов А. И. 224, 252, 750, 756, 798, 854
 Гусейнов З. И. 453, 474
 Гусман С. Я. 355
 Гутлянский В. Я. 310, 804
 Гэмбилл 416
 Гюнтер Н. М. 466, 487, 491, 493—495, 522, 579, 590, 608, 609, 798, 833, 840, 855
 Давыдов Н. А. 224, 225, 807
 Даиров Г. 469
 Дайсон Ф. 210, 698
 Даламбер 358
 Далецкий Ю. Л. 6, 642, 714, 716, 719, 724—726, 847
 Данжуа 45, 374
 Даниель 722
 Данилюк И. И. 5, 240, 279, 281, 285, 286, 354, 780, 784, 807, 854
 Данфорд 699
 Дарбу 280
 Дарси 362
 Даффин 68, 87
 Девингталь Ю. В. 605, 833
 Девисон Б. Б. 216, 813
 Де-Джорджи 529
 Дезин А. А. 545, 546, 582, 603, 710, 719, 847
 Дейч М. Е. 807
 Делоне Б. Н. 2
 Демаховская Р. И. 807
 Демидова С. А. 588
 Демидович Б. П. 389—391, 411, 414, 415, 420, 461, 464, 818
 Демченко Б. 254
 Демьянов В. Ф. 642, 840
 Дени 133
 Денисюк И. Н. 367
 Денчев Р. Т. 683
 Дербенева К. Ф. 6
 Дергузов В. И. 678, 718
 Дерикот Т. З. 419
 Джанашия Г. А. 791, 792
 Джваршейшвили А. Г. 5, 219, 222, 225, 226, 807
 Джексон 136, 142
 Джрбашян М. М. 18, 21—23, 58, 99—104, 150, 153—155, 161, 166, 168, 172—174, 201, 202, 218, 477, 801, 807, 818, 847
 Джураев А. 286
 Джураев Т. Д. 607, 833
 Дзиобек 456
 Дзядык В. К. 142, 143
 Диденко В. П. 559, 709
 Дикий Л. А. 686, 687, 847
 Дикополов Г. В. 601, 602, 711, 833
 Динник А. Н. 367

- Дирак 507, 508, 592, 615, 695, 702
 Дирихле 128, 132, 133, 137, 187, 188, 190, 192, 193, 229, 243, 252, 284, 318, 343, 344, 356, 367, 489, 492, 494, 512, 515, 518, 519, 522, 523, 527, 529, 530, 532—534, 538, 545, 546, 550, 551, 559, 581, 583, 601, 629, 653, 658, 706, 802, 829, 830, 834, 835, 837, 840, 841
 Добровольский В. А. 6
 Довгай В. В. 419
 Долгинов А. З. 743
 Долженко Е. П. 129—131, 149, 216, 226
 Домбровский Г. А. 363
 Домшлак Ю. И. 717, 720
 Дондер де 588
 Донская Л. И. 387, 388, 466, 818
 Дородницын А. А. 409, 431, 432, 818
 Драгилев А. В. 409, 410, 462
 Драгилев М. М. 662
 Драчинский А. Э. 239, 240, 780
 Дринфельд Г. И. 486, 587, 588, 589
 Дубинский Ю. А. 534, 547, 559, 564, 568, 569, 833
 Дубовицкий А. Я. 642, 840
 Дубошин Г. Н. 380—382, 393, 461, 818
 Дубровский В. М. 798
 Дуглас И. 517, 629
 Дуглис А. 513, 515, 542, 707, 709
 Дундученко Л. Е. 220, 305, 306, 807
 Дурдыев Х. 471
 Дыбин В. Б. 793
 Дынин А. С. 517, 542, 543, 545, 662, 708, 829, 833, 847
 Дынкин Е. Б. 558, 724, 847
 Дыхман Е. И. 393, 469
 Дьяконов Е. Г. 521
 Дьяченко В. Е. 586
 Дюге Д. 38
 Дюляк 368, 394, 399

 Евграфов М. А. 39, 55—57, 59, 61, 62, 185, 432, 662, 717, 801, 827
 Евклид 645, 808
 Егоров В. Г. 468
 Егоров Д. Ф. 458, 460
 Егоров Ю. В. 545, 640, 709, 841
 Ельшин М. И. 461, 467
 Енгибарян Н. Б. 101
 Еникеев Ш. М. 391, 469
 Ентч 748
 Еремин С. А. 201
 Ермилин К. С. 628, 841
 Ерохин В. Д. 146, 147, 662
 Еругин А. Н. 402, 403, 405, 414, 452, 483, 818
 Еругин Н. П. 2, 5, 371, 379, 381, 383, 386—388, 392, 393, 400, 406, 412, 414—418, 421, 448—453, 465—467, 477, 480, 483, 621, 818, 819
 Ершов А. П. 6
 Ершов Б. А. 466
 Есаян А. Р. 748, 752
 Ефимов Н. В. 661
 Ефремов Е. П. 469

 Жаутыков О. А. 391, 434, 469, 819
 Жеврей 592, 601, 711
 Жегалов В. И. 607
 Железнов Е. И. 406, 408, 410, 468
 Железцов Н. А. 409, 413
 Желобенко Д. П. 740—742, 847
 Жижиашвили Л. В. 224
 Жижина А. И. 429
 Жиро 786—789
 Жислин Г. М. 554, 685, 847
 Житомирский Я. И. 600, 711
 Жихарь Н. А. 671
 Жордан 158, 159, 168, 278, 297
 Жуков А. С. 352
 Жуковский М. И. 807
 Жуковский Н. Е. 212, 358, 361, 362, 364, 415, 807
 Жюлиа Г. 45, 46

 Забрейко П. П. 6, 649, 653, 715, 716, 751, 754, 756, 757, 760, 761, 849
 Загорский Т. Я. 566, 567, 833
 Задирака К. В. 378, 434, 435, 458, 819
 Закарян А. З. 359
 Заксер В. 41
 Замарин Е. А. 363, 807
 Заплитная А. Т. 725
 Запорожец Г. И. 410
 Заремба 453, 461
 Зарипов Р. Х. 793
 Зархина Р. Б. 691
 Захаров В. К. 557
 Захаров В. П. 410
 Захарюта В. П. 657
 Захарян В. С. 101, 218
 Зверкин А. М. 439, 441, 445, 447, 819
 Зверович Э. И. 236, 238, 249, 251, 793, 807
 Зволинский Н. В. 617, 618, 833
 Зейферт 406
 Зельдович Б. Я. 570
 Земба С. 413, 415
 Зиятдинов Ф. З. 699
 Зигель 208
 Зигель К. Л. 421, 819
 Зигмунд 211, 223, 272, 787
 Зимин А. Б. 429, 436
 Зингер М. И. 517, 544, 545, 708, 789
 Зморевич В. А. 5, 220, 305, 310, 311, 807
 Золотарев Г. Н. 596, 711

Золотарев Е. И. 88, 89, 94
Золотарев Ю. Г. 469
Зоммерфельд 530
Зорич В. А. 342, 808
Зубарев Д. Н. 434
Зубов В. И. 384, 385, 393, 403, 406, 407,
410, 452, 466, 467, 819
Зундман 456

Ибрагимов И. И. 52—54, 57, 58, 60, 94,
184, 801
Ибрашев Х. И. 391, 469
Иванилов Ю. П. 363, 364
Иванов А. В. 406, 562
Иванов В. В. 144, 240, 785, 792
Иванов В. И. 614, 833
Иванов В. К. 203, 204, 550, 802
Иванов В. С. 465, 819
Иванов Е. А. 449
Иванова Н. А. 433
Иверсен Ф. 37
Ивочкина Н. М. 534
Игнатьева А. В. 144
Изобов Н. А. 389, 477, 483
Иенсен 22, 53, 76, 87, 306
Иессен 106
Ильин А. М. 559, 563, 564, 568, 833
Ильин В. А. 544, 562, 580, 686, 688, 709,
834, 847
Ильин В. П. 497—499, 654, 846
Ильинский Н. Б. 264, 364, 811
Иманалиев М. И. 437
Иманова С. 798
Имшенецкий В. Г. 490, 585, 587
Ион Ф. 575
Иосида К. 716
Иост 210
Иохвидов И. С. 649, 677, 678, 691, 692,
846, 848
Иошизава 384
Исаханов Р. С. 246, 248, 786
Исмагилов Р. С. 685, 691, 692, 742
Ито 558
Ишлинский А. Ю. 2, 6, 356

Кабанова В. М. 699
Кадец М. И. 655, 656
Каждан Д. А. 770
Казбан А. М. 264
Казимиров В. И. 631
Казьмин Ю. А. 58, 184
Какичев В. А. 253, 795
Каландия А. И. 785
Калашников А. С. 564, 576, 833
Калижанов У. К. 469
Каллин Е. 729
Кальдерон 272, 659, 787
Каменков Г. В. 380, 384, 391, 394, 819

Каменомостская С. Л. 551, 564
Каменский Г. А. 439, 819
Камерон 722, 723
Камынин Л. И. 521, 561, 562, 834
Канишев К. П. 469
Кантор 644
Канторович Л. В. 243, 358, 359, 633,
647, 648, 650, 657, 745, 746, 751, 761,
806, 841, 848
Капанадзе Р. В. 788
Капилевич М. Б. 559, 585, 607, 834, 843
Каплан А. А. 642
Капралов Н. С. 407
Карагодова Е. А. 792
Карамышев Ф. И. 607
Карапетян К. И. 584, 834
Карасева Т. М. 695
Карасик Г. Я. 468
Каратеодори К. 167, 168, 170, 200, 317,
331, 342, 346, 348, 351—353, 477
Карачаров К. А. 394, 819
Каримов А. У. 471
Карлеман Т. 45, 158, 159, 166, 178, 179,
186, 212, 229, 231, 233, 238, 251, 275,
548, 556, 645, 667, 774, 775, 776—
780, 784, 809, 814
Карманов В. Г. 606
Кароль И. Л. 606
Карпачевская Е. Л. 792
Карпелевич Ф. И. 741, 847, 848
Картан Э. 206, 207, 741, 743
Картрайт М. 31, 67—69, 393, 406, 414,
420, 467, 485
Карцивадзе И. Н. 237, 780
Касаткина Н. В. 476
Касперов В. Н. 452
Касымов К. А. 429
Касьянюк С. А. 220, 306, 807
Като Т. 718
Каток А. Б. 766, 767
Кауфман 351
Кац Г. И. 6, 508, 672, 686, 704, 744, 848,
851
Кац И. С. 683, 685, 688
Кац И. Я. 468
Кац М. 724
Кацнельсон В. Э. 98, 99, 108
Качуровский Р. И. 754
Каччиополи 529
Кванталиани К. И. 437
Квеселава Д. А. 233, 234, 236, 238, 243,
244, 783, 784, 808, 855
Кебе 298, 304, 305, 334, 341
Кеда Н. П. 6
Келдыш М. В. 39, 52, 53, 115, 116, 128,
133, 148, 149, 158—162, 166, 168,
169, 171, 172, 175, 193, 219, 356—358,
385, 523, 554—557, 579, 633, 674,
698, 730, 804, 808, 809, 819, 834, 841,
848

- Келлер 614
 Келлог 798
 Керимов М. К. 629, 841
 Кессельман Г. М. 699
 Кибель И. А. 359
 Кибенко А. В. 474, 649, 715, 819, 848
 Кигурадзе И. Т. 453, 477, 819
 Ким Е. И. 785, 786
 Киприянов И. А. 649
 Киргетов В. И. 385
 Кириллов А. А. 740, 742—744, 770, 847, 848
 Кириллова Ф. М. 449, 468
 Кирхгоф Г. 357, 364, 570, 571, 807
 Киселев А. А. 622
 Киселев О. М. 264
 Кисилевский Г. Э. 676
 Китбалян А. А. 101
 Клебш 628
 Климушев А. И. 435, 437, 448, 468
 Кнезер 628, 720
 Ковалевская С. В. 452, 573, 575, 585, 719, 747
 Коваленко А. Д. 6
 Коваленко Л. И. 606
 Коваленко К. Р. 418
 Ковальчик И. М. 848
 Ковальчук Л. В. 6
 Кованько А. С. 848
 Кодаир К. 681
 Кодации 291
 Козлов В. С. 363, 808
 Козлов В. Я. 662
 Козлов О. М. 718
 Козлова З. И. 6
 Козюль 207
 Колесов Ю. С. 472, 473, 649, 715, 720, 750, 751, 820
 Колмогоров А. Н. 146, 147, 176, 193, 217, 224, 225, 312, 395, 421, 459, 462, 464, 482, 637, 647, 648, 656, 661, 721, 723, 726, 739, 765, 766, 768, 769, 772, 802, 820, 848
 Колобов А. М. 413, 478
 Коловский М. З. 412
 Колосов Г. В. 212, 360, 808
 Комаренко А. Н. 683
 Комленко Ю. В. 475
 Компанец А. С. 570
 Кондратьев В. А. 544—546, 709
 Кондратюк А. А. 34
 Кондрашов В. И. 519, 661, 701
 Кононенко В. О. 434
 Конти Р. 409, 413
 Копачевский Н. Д. 683
 Копнин 413
 Коппельман У. 250, 290
 Копылов А. П. 343, 808
 Копырин М. А. 259, 264
 Кордзадзе Р. А. 249, 786
 Кордуняну К. 464
 Коренблюм Б. И. 6, 654, 657, 729, 848
 Корицкий Г. В. 311
 Коркин А. Н. 490, 585
 Коробейник Ю. Ф. 650, 651
 Коровкин П. П. 176
 Королев В. В. 411
 Королюк В. С. 6, 436
 Коротков В. Б. 498
 Косолапов Ю. Ф. 6
 Космодемьянский В. А. 841
 Костин А. В. 820
 Костомаров Д. П. 433, 452, 463
 Костычев Г. И. 264
 Костюченко А. Г. 532, 598, 672, 682, 686—688, 691, 698, 705, 711, 830, 848
 Котельников А. П. 357
 Котельников В. А. 66
 Котляр Л. И. 264
 Коттон Э. 394, 401
 Кочин Н. Е. 303, 358, 359, 371, 465, 808
 Кочина П. Я. (Полубаринова-Кочина П. Я.) 217, 220, 357, 358, 361, 811
 Кошелев А. И. 514, 529, 541, 707, 834
 Коши 114, 117, 119—121, 124, 146, 149, 167, 175, 193, 196, 199, 209, 215, 220—226, 228, 229, 231, 233—240, 247, 250, 253, 263, 265, 267—271, 277, 278, 281, 283, 288, 289, 292, 321, 360, 381, 422—426, 429, 432, 435, 441, 452, 453, 471, 477, 489, 499, 500, 505—508, 511, 512, 518—520, 522, 525, 546—548, 550, 560, 561, 563—565, 569—578, 581, 583—585, 588—590, 595—601, 607—609, 616, 620, 622, 652, 679, 681, 685, 694, 700, 703, 704, 710, 712—719, 723, 726, 747, 774, 777—781, 784, 786, 788, 796, 805—807, 810—814, 816, 819, 830, 832, 834, 836—838, 840, 846, 850, 854
 Кошляков Н. С. 367
 Кравченко Т. К. 449, 820
 Кравчук М. Ф. 74, 457, 586
 Крамер Г. 111, 112
 Крамерс 431
 Красильщикова Е. А. 363
 Красичков-Терновский И. Ф. 20, 34
 Краснов М. Л. 570, 585, 834
 Красновидова И. С. 258, 259
 Красносельский М. А. 6, 391, 411, 414, 452, 471—474, 482, 483, 505, 561, 622, 633, 641, 642, 649, 650, 653, 661, 662, 670, 688, 714—716, 719, 720, 747, 748, 750, 751, 754, 756, 760, 761, 789, 798, 820, 841, 848, 849, 854
 Красовский Н. Н. 381, 383, 384, 392—

- 394, 400, 406, 407, 413, 435, 439, 440, 443, 447, 448, 463—465, 468, 473, 481—483, 639, 640, 762, 815, 820, 821, 841
- Красовский Ю. П. 363, 709, 750, 756
- Крауклис П. В. 619, 834, 836
- Крейн М. Г. 31, 32, 39, 43, 75—79, 106, 108, 109, 164, 176, 193, 219, 237, 241, 391, 418, 452, 462, 478, 528, 646—648, 650, 655, 660—662, 669—671, 674—678, 681, 687, 689—692, 694—697, 699, 704, 713, 714, 729, 737, 741, 747—749, 751, 761, 789, 791, 793, 795, 798, 800, 808, 821, 843—845, 847, 849, 854
- Крейн С. Г. 6, 391, 452, 471, 474, 483, 498, 505, 543, 561, 622, 623, 647, 650, 654, 657, 659, 683, 707, 709, 714—720, 733, 744, 749, 760, 820, 821, 849, 853
- Крейнес М. А. 335
- Крживицкий А. 622, 834
- Кржижанский 576
- Кривицкий А. О. 699
- Кривов В. В. 344
- Крикунов Ю. М. 245, 248, 260, 604, 786, 806
- Кристоффель 263, 290, 365, 366
- Кропачев В. Ф. 252, 798
- Кротов В. Ф. 841
- Кружков С. Н. 563, 564, 836
- Крумлинг А. А. 412
- Крушкаль С. Л. 332, 343, 355, 808
- Крылов А. И. 622
- Крылов А. Я. 366
- Крылов Б. Л. 371, 465
- Крылов В. И. 2, 6, 219, 222, 243, 359, 449, 465, 808
- Крылов В. Ю. 724, 725, 806, 847
- Крылов Н. М. 372, 377, 391, 395, 412, 434, 454—456, 461, 633, 647, 661, 714, 748, 760, 763, 770, 821, 825
- Ку 406
- Кубанская А. П. 437
- Кубилус Й. П. 2
- Кубо Т. 334
- Куваев М. Р. 298
- Кудаев М. Б. 464
- Кудаков Р. К. 469
- Кудрявцев Л. Д. 498, 558, 654
- Кудряшов Л. К. 361
- Кудряшов С. Н. 258, 259, 808
- Кужель А. В. 675, 678
- Кузик Г. А. 326, 808
- Кузнецов В. М. 363
- Кузнецов Н. Н. 577, 686
- Кузьменко А. Г. 419
- Кузьмин П. А. 380
- Кузьмин Р. О. 487
- Кук К. 441, 446, 447
- Куклес И. С. 398, 399, 407, 461, 463, 464, 469, 470, 483, 818, 821
- Кунин П. Е. 394, 406
- Купрадзе В. Д. 230, 522, 531, 778, 782, 788, 834, 854
- Курант Р. 519, 629
- Куренский М. К. 589, 590
- Куржанский А. Б. 468, 821
- Курмашев Д. 469
- Куртис 138
- Курцвейль Я. 384, 393, 412, 453, 464, 485
- Куфарев Б. П. 349
- Куфарев П. П. 297, 298, 309, 310, 365, 808
- Кухарчук Н. М. 726
- Кучер Д. Л. 714
- Кушниренко А. Г. 769
- Кушков Н. Н. 407, 410, 466, 821
- Кэллендер Э. 342
- Лаваль 606, 840
- Лаврентьев И. М. 641, 821
- Лаврентьев М. А. 114, 115, 117, 123, 127, 133, 158, 159, 175, 193, 219, 220, 225, 267, 272, 295, 303, 307, 309, 312—335, 337, 338, 340, 342, 344, 347, 348, 353, 355—357, 364, 459, 523, 525, 604, 605, 630, 631, 785, 804, 808, 809, 832, 834, 835, 841
- Лаврентьев М. М. 325, 548, 550, 696, 809, 834
- Лагерр 41, 72, 73, 87, 367
- Лагранж Ж. 63, 67, 366, 382, 470, 496, 501, 503, 507, 527, 587, 589, 608, 609, 628, 813
- Ладохин В. И. 724, 725
- Ладыженская О. А. 486, 491, 501—505, 514, 519, 520, 527—530, 532, 534, 544, 547, 551, 560—563, 566—568, 574, 576, 577, 579—581, 600, 606, 607, 622—624, 631, 697, 706, 707, 709, 717, 832, 834, 835, 841, 844, 849, 850
- Ладыженский Л. А. 748, 750, 756
- Лазуткин В. Ф. 613, 615, 835
- Лакс П. 508, 577, 704, 705
- Ламбина Е. Н. 743
- Лангер Г. 674, 678, 699
- Ландис Е. М. 411, 464, 548, 549, 824, 825, 835
- Ландкоф Н. С. 133, 523
- Лапин Г. П. 65
- Лапко А. М. 352
- Лаплас 28, 49, 209, 320, 446, 490, 491, 494, 513, 514, 519, 522, 523, 529, 544, 545, 550, 566, 567, 579, 581, 593, 614, 618, 621, 669, 683, 686, 700,

- 706, 717, 723, 726, 843, 847, 848, 850
- Лаппо-Данилевский И. А. 369—372, 386, 387, 416, 417, 453, 465, 466, 480, 484, 818, 821, 826
- Лаптев Г. И. 683, 719
- Лаптинский В. Н. 477
- Лапук Б. Б. 364, 814
- Латипов Х. Р. 405, 407, 470, 483
- Латышева К. Я. 457, 458
- Лебег А. 195, 213, 225, 241, 335, 343, 462, 629, 630, 652, 657, 763, 766, 767, 780, 812
- Лебедев А. А. 394
- Лебедев Л. Л. 264
- Лебедев Н. А. 144, 298, 301, 303, 310, 803, 809
- Леви 194, 565, 572, 786, 791
- Леви Г. 519
- Леви П. 112, 726
- Левин А. А. 415, 743
- Левин А. Ю. 649, 848
- Левин Б. Я. 5, 17, 20, 24, 28, 30—32, 34, 41, 66, 68, 71, 73, 78, 83—87, 89, 97, 106, 107, 109, 110, 183—186, 650, 654, 655, 657, 692, 697, 730, 802
- Левин В. И. 306—308
- Левин М. Л. 614, 835
- Левинсон Н. 31, 406, 409, 414, 550, 551, 694, 818
- Левитан Б. М. 109, 555, 569, 680, 683, 684, 686, 687, 694, 695, 697, 732, 744, 826, 835, 850
- Левитин Е. С. 641
- Леви-Чивита Т. 456, 586
- Левнер 296—298, 301, 310
- Левнеру Ч. 336
- Ледовская И. Б. 760
- Лежандр 361, 367, 628, 643
- Лейбензон З. Л. 695, 730, 734, 850
- Лейбензон Л. С. 358—360, 809
- Лейбин А. С. 110
- Лейсфман Л. Я. 642
- Леман 210
- Леонтович Е. А. См. Андропова-Леонтович Е. А.
- Леонтович М. А. 454, 610—612, 835
- Леонтьев А. Ф. 34, 63—66, 184—190, 192, 193, 802
- Лерэ 622, 623, 755, 798
- Лерэ Ж. 264, 492, 508, 646, 704, 705
- Летичевский А. А. 6
- Летов А. М. 393, 482, 640, 821, 822, 841
- Лефшец С. А. 393, 399, 406, 408, 412—414, 464, 485, 822
- Лехто О. 45
- Ли С. 470, 586—588, 648, 739, 740, 742—744, 827, 843, 846—848, 850, 853
- Лианар 409
- Либерман Л. Х. 468
- Либман 292
- Лившиц М. С. 110, 648, 650, 674—677, 690—692, 844, 850
- Лидский В. Б. 416, 418, 462, 468, 554, 556, 674, 685, 687, 698, 699, 819, 822, 835, 848, 850
- Лидский Э. А. 640, 841
- Лизоркин П. И. 498, 558, 658
- Лин В. Я. 105
- Линдварт 73
- Линделеф 11, 13, 24, 38, 65, 166, 304, 320, 322, 326, 352, 549
- Линник Ю. В. 2, 15, 110, 112, 210, 802
- Лионс Ж. 659, 707, 718
- Липшиц 130, 138, 140—142, 231, 259, 373, 376, 384, 399, 403, 442, 455
- Лисковец О. А. 6
- Литвинчук Г. С. 236, 249, 786, 793, 807, 809
- Литтлвуд 307, 393, 414, 485
- Лиувилль 23, 188, 275, 277, 292, 337, 338, 340, 341, 350, 458, 477, 493, 680, 681, 683, 685, 687, 689, 694—696, 698, 699, 732, 733, 804, 809, 811, 826, 850
- Лифшиц Е. А. 473, 649, 751
- Лифшиц И. М. 687, 697
- Лихт М. К. 97
- Лихтенштейн Л. 272, 365, 525, 622, 623, 798
- Ли Чэ Гон 198
- Лобачевский Н. И. 347, 644
- Логунов А. И. 476
- Лозановский Г. Я. 751
- Лозинский С. М. 452, 464
- Лозовик В. Г. 809
- Лойцянский Л. Г. 363, 809
- Ломов С. А. 432
- Ломоносов М. И. 555, 687, 835
- Лонн 398
- Лопатинский Я. Б. 267, 452, 479, 513, 516, 541, 544, 566, 567, 602, 707, 709, 810, 835
- Лоран 268, 278, 302, 309, 371, 525
- Лоренц 740
- Лоренц Г. Г. 653
- Лоренц Г. Р. 465
- Лось Ф. С. 377
- Лотов А. Б. 809
- Лохин И. Ф. 18, 184
- Лошкарев Б. И. 671
- Лузин Н. Н. 214—218, 224, 458, 459
- Лукашкин Г. Л. 197, 802
- Лукашевич Н. А. 407, 408, 412, 451, 477, 483, 822
- Лукин В. Н. 347
- Лукомская А. М. 379

- Лункевич В. А. 399
 Лурье А. И. 392, 393, 413, 467, 814, 822
 Лурье К. А. 841
 Луфференко В. П. 347
 Луценко А. В. 588
 Луценко И. Е. 671
 Лушникова З. М. 468
 Лыкова О. Б. 6, 378, 413, 434, 822, 823
 Лэмб 617—619, 829, 830, 837
 Любарский Г. Я. 418, 745, 750, 821, 850
 Любич Ю. И. 544, 650, 676, 709, 716, 717, 850
 Любовин В. Л. 746
 Любченко И. С. 436
 Люстерник Л. А. 429, 433, 437, 518, 551, 552, 632, 634—637, 641, 642, 646, 648, 650, 753, 760, 761, 798, 817, 832, 835, 841—843, 849, 850
 Лягина Л. С. 410
 Лянце В. Э. 595, 651, 671, 695, 697, 699
 Ляпунов А. А. 6
 Ляпунов А. М. 131, 224, 225, 238—240, 243, 245, 249, 282, 368, 379, 395, 399—404, 408, 411, 412, 414, 415, 418, 423, 424, 442, 443, 445, 447, 452—454, 460—464, 466, 468, 469, 472, 478—481, 494, 522, 646, 714, 751, 752, 757, 758, 779, 783, 797, 815—822, 825, 826, 829
 Ляшко И. И. 6, 365, 810

 Магнарадзе Л. Г. 223, 236, 247, 786, 810
 Мадженес Е. 707
 Маергойз Л. С. 202, 204, 802
 Мазур С. 647, 727
 Мазья В. Г. 486, 499, 522, 529, 530, 554, 835
 Майер А. Г. 395, 396, 406, 408, 454, 822
 Майзель 468
 Майков Е. В. 724, 725
 Макаренко Г. И. 568, 835
 Макаров А. Н. 587
 Макаров Г. И. 619
 Макаров И. П. 464
 Макеева Г. С. 434
 Макинтайр 14
 Мак-Кассик Р. 732
 Маклорен 425
 Максвелл 610, 614, 624
 Макштейн Е. 629
 Малкин И. Г. 380, 384, 392, 393, 406, 413, 418, 420, 468, 469, 822
 Малкин К. Е. 399
 Маловар Л. 366

 Мальгранж Б. 592, 594, 595, 706, 712
 Мальченко В. И. 697
 Малюжинец Г. Д. 835
 Малютов М. В. 545, 558
 Мамедов Я. Д. 452, 474, 715, 718, 719, 750, 756, 798
 Мамия К. 465
 Мандельштам Л. И. 395, 453, 454, 460, 480
 Манджавидзе Г. Ф. 6, 230, 236, 238, 240, 785, 810, 854
 Мандль 686
 Манглер 255
 Маневич Д. В. 483
 Маневич И. З. 404
 Марачков В. П. 469
 Марков А. А. 80, 81, 688, 690, 849
 Марков А. А. мл. 395, 459—461, 647, 657, 748
 Марков В. А. 81, 88, 89, 113
 Марковский А. И. 711
 Маркосян С. А. 822
 Маркус А. С. 304, 556, 651, 674, 699, 832, 851
 Маркушевич А. И. 2, 48, 144, 166, 167, 170, 180—184, 226, 246, 328, 333, 335, 337, 662, 800, 808—810
 Мартин 722, 723
 Мартинелли 193, 196
 Мартиросян Р. М. 554, 699
 Мартынюк Д. И. 419
 Мархасев Г. С. 835
 Мархашов Л. М. 385
 Марцинкевич Ж. 653, 756
 Марчевский М. Н. 110
 Марченко В. А. 67, 109, 110, 615, 650, 685, 694, 695, 697, 699, 750, 843, 850, 851
 Марчук Г. И. 618, 837
 Масленникова В. Н. 562, 601, 835
 Маслов В. П. 432, 433, 437, 465, 615, 616, 688, 716, 822, 836, 851
 Маслов К. В. 615
 Массера Т. 384, 412, 443, 468
 Матвеев Н. М. 466, 467
 Матийчук М. И. 709
 Матросов В. М. 380
 Матуцина О. Т. 391, 393, 469
 Маутнер 739
 Махмудов А. П. 798
 Мацаев В. И. 31, 32, 655, 674—676, 695, 844
 Медведев Б. В. 800, 844
 Медведев Г. Н. 434
 Медведев Н. В. 400
 Мейман Н. Н. 75, 79, 80, 85, 86, 92—94, 563, 803
 Меламед В. Б. 756, 759, 760
 Мелентьев Б. В. 605
 Мелентьев П. В. 364, 366, 806, 810

Мелешенко Н. Т. 363, 810
Меллин 367
Мельник И. М. 224, 236, 261
Мельников М. С. 127, 131, 132
Менделеев Д. И. 80
Меньшов Д. Е. 315, 340, 341
Мергелян С. Н. 2, 5, 115, 117, 122, 126—128, 130, 138, 144, 150—153, 193, 801—803
Мерзлякова Г. Д. 251, 355
Месис А. В. 250
Метельский А. С. 449
Меунаргия С. В. 363
Мечников И. И. 482
Мизес 617, 625
Микеладзе М. Ш. 230
Микеладзе Ш. Е. 230
Миклюков В. М. 339, 347, 349, 351, 352
Милин И. М. 301, 302, 307, 809
Миллионщиков В. М. 389, 437, 463—465, 715, 822
Миллионщиков М. Д. 358, 360, 813
Мильтман В. Д. 655, 823
Мильтман Д. П. 647, 658, 660—662, 747
Мильтштейн Г. Н. 468
Милютин А. А. 642, 840
Минкевич М. И. 461, 477
Минковский 645
Минлос Р. А. 721, 722, 725, 845, 847, 851
Миновский 414
Минти 564
Минц Р. М. 403—405, 454, 483, 822
Мирошниченко Я. С. 311
Митропольский Ю. А. 2, 6, 376—378, 396, 413, 434, 456, 481, 816, 822, 823
Миттаг-Леффлер 56, 100, 101, 104, 202
Митюк И. П. 301, 304, 305, 333, 334, 341, 810
Митягин Б. С. 653, 655, 659, 660, 662, 691, 719, 722, 730, 734, 848, 851
Михайлов В. П. 699, 847
Михайлов Г. К. 357, 363, 811
Михайлов Л. Г. 246, 247, 289, 794, 799, 810, 854
Михалевич В. С. 6
Михальский Н. Т. 590
Михальчук В. Г. 281, 354, 810
Михлин С. Г. 491, 501, 514, 517, 528, 557, 558, 581, 633, 641, 650, 706, 707, 778, 780—783, 787—789, 813, 836, 842, 851, 854
Мищенко Е. Ф. 409, 413, 430, 432, 463, 465, 482, 639, 823, 825, 842
Миядера И. 716
Можар В. И. 586
Мозер 378

Моисеев Н. Д. 380, 394, 461
Моисеев Н. Н. 363, 364, 385, 434, 810, 823
Молотков И. А. 831, 834, 836
Молотков Л. А. 619, 836
Молчанов А. М. 554, 685, 851
Молчанов В. Ф. 741
Монастырский П. И. 6
Монахов В. Н. 263, 295, 810
Монж 535, 537, 750
Монтель 320, 461
Моравец К. 606, 709
Морару Н. И. 795
Моргунов Б. И. 434
Мордухай-Болтовской Д. Д. 367
Морер 312
Морри Ч. 496, 534, 629
Мори 329, 330
Морозов Н. Ф. 491
Морс М. 634, 635, 637
Мосеенков Б. И. 419
Мосолов П. П. 710
Мукминов Б. Р. 674
Мунтяну 414
Муратов М. И. 359, 806
Мусхелишвили Н. И. 2, 212, 223, 224, 227—231, 233—235, 237, 239, 243, 289, 357, 358, 360, 517, 776, 779, 781—785, 810, 811, 855
Мухамадиев Э. 649, 756
Мухаметзянов И. 452
Мухтаров С. Н. 748, 752, 798
Мысовских И. П. 6
Мышкис А. Д. 439, 440, 462, 478, 481, 527, 548, 582, 683, 823
Мюнтц 153, 465
Мясников П. В. 363

Навье 423, 581, 621, 623, 716, 719, 834, 838, 839, 849
Наджафов Г. 798
Назаров Е. А. 405
Назаров Н. Н. 753, 759, 797, 855
Найман П. Б. 685, 690
Наймарк М. А. 647, 648, 650, 668—671, 678, 683, 684, 690, 698, 699, 727, 738—742, 844—846, 849—851
Нарчаев А. 559
Нарышкина Е. А. 617, 836
Насибов С. 797
Насыров Р. М. 264
Наталевич В. К. 252, 253, 798, 811
Наумов А. Л. 586
Нафталевич А. Г. 47
Неванлинна Р. 22, 23, 34, 35, 37, 39, 40, 211, 217, 218, 459, 803, 811
Нейгауз М. Г. 418, 462, 695
Нейман 228, 356, 489, 530, 609, 739, 740, 747, 762, 834

- Нейман Дж. 764, 765, 768
 Нейман фон 520, 645, 667—669, 671
 Неймарк Ю. И. 396, 442, 815, 823
 Некрасов А. И. 358, 360, 361, 752, 753, 759, 797, 811, 855
 Нельсон-Скорняков Ф. Б. 364, 811
 Немыцкий В. В. 5, 389, 390, 393, 395—397, 406, 408, 410, 411, 413, 414, 458—465, 474, 481, 483, 642, 646, 650, 753, 754, 756, 798, 816, 823, 824, 851, 855
 Нерлунда 51, 61
 Нерсисян А. Б. 477, 818, 824, 847
 Нестеренко Е. М. 6
 Нетер Ф. 212, 249, 517, 774, 775, 777, 778, 781—786, 788, 791, 809
 Нижник Л. П. 554, 683, 685, 697, 712, Никель 625
 Николадзе Г. Н. 628, 843
 Николаева Г. А. 359
 Николаева Н. Н. 399, 470
 Николенко В. Н. 584
 Николенко Л. Д. 376, 432, 457, 827, 853
 Никольский Н. К. 730
 Никольский С. М. 83, 94, 105, 142, 164, 193, 498, 499, 650, 658, 659, 852, 853
 Никулина М. М. 410
 Ниренберг Л. Н. 279, 513, 515, 517, 529, 542, 707, 709, 717
 Нистрем 365
 Ницкая Э. Р. 436
 Ничипорович А. А. 364
 Новиков Е. А. 726
 Новиков П. С. 550
 Новиков С. П. 465, 708
 Норкин С. Б. 439, 446, 819
 Носиро 211
 Нуайон 431
 Нужин М. Т. 254—256, 258, 259, 264, 364, 811, 812
 Нужин С. Г. 365
 Нумеров С. Н. 363, 804
 Нуров Т. Н. 399, 470, 821
 Ньюмен Д. 149
 Ньютон И. 14, 51—53, 55, 61, 66, 70, 179, 359, 378, 456, 599, 772, 827
 Нэш 529, 561, 563

 Обрешков Н. 73, 87
 Овсепян С. Г. 683
 Овсянников Л. В. 316, 606
 Овчаренко И. Е. 692
 Овчинников И. С. 342, 349—352
 Огурцов К. И. 618, 619, 836, 837
 Одквист 622, 623
 Ожиганова И. А. 639, 842
 Озейн 621, 623, 627, 837
 Олевский М. М. 585

 Олейник О. А. 429, 459, 527, 551, 557, 559, 562—564, 569, 570, 576, 577, 624—626, 709, 710, 833, 836
 Олек Б. 414
 Олимпиев И. В. 615, 616, 830
 Ольхин В. Я. 803
 Онищик А. Л. 847, 852
 Опяль 198, 199
 Орел Г. С. 419
 Орлич 653, 787, 849
 Орлов М. Х. 586, 797, 799
 Орлов С. А. 683
 Орочко Ю. Б. 688
 Осгуд 715
 Оселедец В. И. 766—768, 770
 Осипов Р. И. 101
 Осипов Ю. С. 444, 639, 842
 Осколков А. П. 491, 534, 547
 Островский 217
 Островский И. В. 5, 14, 15, 33, 37—43, 110, 112, 801
 Остроградский М. В. 270, 628, 629
 Отроков Н. Ф. 395, 396, 410, 454, 824

 Пааташвили В. А. 237, 239—241, 780
 Павлов Б. С. 486, 554, 685, 699
 Павловский Н. Н. 358, 361, 363, 811
 Павлюк И. А. 419
 Пак С. А. 475
 Паламодов В. П. 591—595, 602, 703, 704, 711, 712, 836, 852
 Палей 11, 82, 95—97, 99, 101—103, 105, 106, 307
 Палюткин В. Г. 744, 848
 Панайоти Б. Н. 437, 719
 Панеях Б. П. 105, 531, 593, 603, 705, 710, 712, 837, 845, 852
 Панич О. П. 623, 837
 Панов А. М. 468
 Панченков А. Н. 811
 Панчишин В. И. 366, 813
 Папалекси Н. Д. 454
 Паплаускас А. Б. 2, 6
 Папуш П. Н. 404, 464, 483
 Парадоксова И. А. 251
 Парасюк О. С. 2, 6, 210, 242, 650, 698, 793, 811
 Парсеваль 98, 567, 591, 680, 690, 694, 699, 736
 Пеано 630, 714
 Пенлеве 123, 368, 448—452, 456, 484, 485, 817, 829
 Перов А. И. 414, 453, 472—474, 649, 715, 754, 756, 820, 824, 848, 849
 Перрон О. 394, 395, 401, 460, 523, 748
 Персидский К. П. 380, 383, 385, 388—391, 393, 469, 481, 482, 824
 Персидский С. К. 469

- Песин И. Н. 318, 328—330, 811
 Петер Р. 735
 Петрашень Г. И. 618, 619, 836, 837
 Петре 659, 708
 Петренко В. П. 11, 37
 Петрина Д. Я. 697
 Петров Б. Н. 452
 Петровский И. Г. 394, 401, 411, 460, 464, 486, 509—512, 515, 517, 519, 520, 524, 543, 544, 565—567, 570, 573—576, 595, 599—601, 632, 811, 824, 825, 837, 842, 846
 Петропавловская Р. В. 452
 Петросян Л. А. 640
 Петунин Ю. И. 649, 658, 659, 849
 Пик 304
 Пикар 35, 45, 229, 381
 Пилюттик А. Г. 394, 819
 Пинни Э. 439, 825
 Пинскер А. Г. 647, 746, 751, 848
 Питт 731
 Питтель Б. Г. 418, 467
 Планк 367, 433
 Пламеневский Б. А. 491
 Планшерель 95, 96, 99, 104, 733, 737, 740, 743, 845
 Плейель А. 683
 Племель 212, 221, 229, 231, 233—235, 253, 289, 777, 804
 Плеснер А. И. 214, 216, 647, 671, 852
 Плешкан И. И. 826
 Плисс В. А. 392, 393, 396, 406, 411, 415, 466, 467, 483, 825
 Плишкин Ю. М. 468
 Плотников А. А. 438
 Плотников В. И. 532, 534, 631
 Плотникова Г. В. 413
 Повзнер А. Я. 531, 532, 554, 555, 621, 647, 682—684, 691, 694, 696, 697, 733, 837, 852
 Поволоцкий А. И. 642, 760, 849
 Погожельский В. 237
 Погореленко В. А. 719, 720
 Погорелов А. В. 110, 294, 535, 537, 811
 Погребысская Е. И. 6
 Погребынский И. Б. 2, 6, 586
 Подъяпольский Г. С. 618, 837
 Пожарицкий Г. К. 385, 825
 Показеев В. И. 251
 Покорный В. В. 759
 Покорный Ю. В. 649
 Поля Г. 17, 18, 41, 42, 56, 70, 73, 87, 203, 304
 Поливанов М. К. 800, 844
 Полищук Е. М. 726
 Положий Г. Н. 268, 269, 281, 365, 366, 524, 811, 838
 Полубаринова-Кочина П. Я. См. Кочина П. Я.
 Польский Н. И. 842
 Поляк Б. Т. 641
 Поляцкий В. Т. 675
 Помпей Д. 270
 Понтрягин Л. С. 78, 79, 395, 409, 413, 430, 437, 442, 453, 454, 460, 463—465, 482, 637, 639, 640—642, 648, 661, 678, 733, 737, 744, 761, 814, 823, 825, 842, 852
 Попов В. М. 445
 Попов Г. Я. 792
 Попов М. М. 614, 831
 Постников В. Н. 392, 393
 Потапов В. П. 107, 676, 852
 Потлов В. В. 410
 Потягайло Д. Б. 44, 45, 353
 Похилевич В. А. 311
 Прандтль Л. 624, 786
 Привалов И. И. 211, 212, 214—216, 221—224, 226, 231, 232, 239—241, 247, 295, 804, 810, 811
 Прозоровская О. И. 717
 Прокопенко Л. Н. 717
 Прокопьев В. П. 444
 Проскуряков А. П. 413
 Прохоров Ю. В. 721, 722, 724, 852
 Пуанкаре А. 206, 368—370, 372, 374, 379, 381, 394, 395, 399, 401—403, 405, 412, 413, 417, 454, 459—461, 463—465, 479, 484, 498, 499, 517, 522, 762, 771, 773, 774, 777
 Пуассон 111, 112, 175, 218, 226, 261, 306, 462, 470, 490, 522, 571, 608, 628, 810
 Пугачев В. С. 432
 Пул 309
 Пулькин С. П. 430, 604, 838
 Пустыльник Е. И. 688, 716, 719, 761, 849
 Путята Т. В. 6
 Пухов Г. Е. 6
 Пученкин Г. Н. 413
 Пфафф 470
 Пфейффер Г. В. 490, 586, 587, 589
 Пфлюгер А. 24, 28, 30, 329, 330
 Пыхтеев Г. Н. 264, 363, 785
 Пюизе 599
 Пятацкий-Шапиро И. И. 207, 208, 743, 744, 803, 845, 846, 852
 Рабинович И. М. 823
 Рабинович С. И. 734
 Рабинович Ю. Л. 432
 Рагимханов Г. К. 476
 Радо Т. 629
 Радон 575, 798
 Разин Г. О. 419
 Размадзе А. М. 628, 638, 843
 Разумихин Б. С. 383, 393, 394, 435, 442, 443, 825

- Райков Д. А. 111, 112, 647, 648, 655,
 727, 733, 737—739, 846, 852
 Раковщик Л. С. 794
 Рамануджан 367
 Рамм А. Г. 697
 Рапопорт И. М. 387, 388, 432, 457, 550,
 684, 790, 791, 794, 795, 825, 852,
 855
 Раскин В. Г. 720
 Расулов М. Л. 582
 Раус 80, 803
 Раух Л. Л. 411
 Рахимов Х. Р. 399
 Рахманов Б. Н. 311
 Рахматуллина Л. Ф. 476
 Рашевский П. К. 740, 852
 Редько В. Н. 6
 Рейзинь Л. Э. 403, 404, 463, 479, 483,
 825
 Рейнольдс 363, 622—624, 831
 Рейссиг Р. 409
 Реллих 498, 685
 Ремез Е. Я. 2, 586
 Ренгель 303, 304
 Реньи 59
 Репин Ю. М. 443, 468, 825
 Ретов М. Р. 469
 Рехлицкий З. И. 752
 Решетняк Ю. Г. 318, 337—340, 811, 812
 Ривкинд В. 562
 Риман Б. 23, 206, 207, 212, 227—230,
 232, 239—245, 249, 251—253,
 263, 265, 267, 270, 278, 279, 292,
 300, 320, 321, 326, 327, 346, 354,
 355, 367, 369, 371, 453, 465, 479,
 516, 524, 526, 546, 584, 607, 629, 644,
 652, 685, 790, 805, 806, 810, 812,
 813
 Рисс 27, 272, 305, 503
 Рисс М. 215, 217, 220, 224, 661, 662
 Рисс Ф. 108, 109, 215, 645, 653
 Ритц 505, 528, 633
 Риччи 206
 Рогожин В. С. 238, 242, 246, 248, 257,
 259, 264, 795, 812
 Родин Ю. Л. 250—252, 281, 290, 354,
 355, 812
 Родионов А. М. 438
 Родыгин Л. В. 409, 413, 437
 Рождественский Б. Л. 577, 578
 Рожков В. И. 438
 Розанов Ю. А. 723, 852
 Розе Н. В. 359
 Розенберг Р. М. 413
 Розенвассер Е. Н. 412
 Розенталь 114, 117, 122
 Розенфельд Б. А. 2, 6
 Розов Н. Х. 430
 Розоноэр Л. И. 640, 842
 Ройтберг Я. А. 508, 543, 704, 707, 709
 Ролль 824
 Романенко Г. Н. 6
 Романов В. Г. 696
 Романовский В. И. 590
 Ромм Б. Д. 742
 Ронкин Л. И. 67, 109, 202—204, 803
 Роте 520, 521, 560
 Рофе-Бекетов Ф. С. 681, 685, 695, 697,
 699
 Рох 354, 355, 810
 Рохлин В. А. 462, 671, 739, 767, 769,
 852
 Рубаник В. П. 434, 448, 479, 760,
 825
 Рубинау 614
 Рубинов А. М. 641, 840
 Рудаков В. П. 391, 394, 825
 Рудин 45, 729
 Рудник Д. Е. 205
 Рудченко П. А. 363
 Румянцев В. В. 379, 383, 385, 393, 823
 Рунге 114, 117, 121, 148, 170, 178
 Руплис Б. П. 364
 Русакова Н. Я. 620, 830
 Русанов Б. В. 621
 Руссьян Ц. К. 587, 588, 589
 Рутицкий Я. Б. 649, 653, 659, 756, 760,
 761, 849
 Рутман М. А. 647, 662, 714, 747—749,
 751, 752, 754, 798, 849
 Руше 275, 324
 Рыбин П. П. 759
 Рыбников К. А. 2, 842
 Рытов С. М. 614, 835, 838
 Рэлей 409, 620, 830
 Рябенский В. С. 520, 521, 833, 838
 Рябов Ю. А. 411, 412, 438, 447, 448,
 825
 Рябушинский Д. 254
 Сабиров Т. 452, 472, 649, 826
 Савин Г. Н. 6, 360
 Садовников Б. Н. 412
 Садовничий В. А. 687
 Садовский Б. Н. 452, 474
 Сазонов В. В. 721, 722
 Сакалюк К. Д. 796
 Салаев В. В. 224, 804
 Салахитдинов М. С. 607, 710, 830
 Салехов Г. С. 601, 602
 Салехов Д. В. 649, 653
 Салимов Р. Б. 264
 Салтыков Н. Н. 589
 Самаров А. Б. 453, 476
 Самарский А. А. 6, 521, 531, 562, 577,
 839
 Самко С. Г. 796
 Самойлович Г. С. 363, 807
 Самойленко А. М. 378, 823

- Самуэль О. И. 471
 Сансоне Дж. 406, 409, 413, 414, 485, 826
 Сапаев В. 798
 Сапожникова В. Д. 522
 Саргсян И. С. 477, 686, 826
 Сарымсаков Т. А. 751
 Саусвел Р. 366
 Сахарников Н. А. 399, 407, 466, 826
 Сахнович Л. А. 674 — 676, 685, 695, 697
 Сацкая Н. С. 435
 Свекло В. А. 617, 838
 Свешников А. Г. 531, 838
 Свидзинский А. В. 6, 726
 Севелл 138
 Сегал 719
 Сеге Г. 175, 209, 220, 303, 304
 Седов Л. И. 357, 358, 361, 362, 808, 809, 811, 812
 Сейден Ж. 418
 Секерж-Зенькович Я. И. 363
 Сельберг 45
 Семенов Е. М. 649, 653
 Семенов М. П. 659, 826
 Семухина Н. В. 298
 Сенков А. М. 361, 811, 812
 Сербин А. И. 252
 Серебренникова И. И. 366
 Серебрийский Я. М. 365
 Серебрякова В. С. 410
 Серебрякова Н. Н. 413
 Серов М. И. 699
 Серр 638
 Сибаяма Г. 413
 Сибирский К. С. 399, 464, 474, 475, 826
 Сигалов А. Г. 532, 534, 631, 685, 697, 842, 852
 Сидляр М. М. 419
 Сикорский Ю. Ш. 419
 Симоненко И. Б. 238, 240, 780, 784, 785, 787, 789, 794, 795, 855
 Симонов А. С. 547
 Симонов Л. А. 360, 365, 813
 Синай Я. Г. 465, 766, 769, 771
 Синанян С. О. 101, 167, 170, 171
 Сираджинов С. Х. 367
 Сиразетдинов Т. К. 640, 842
 Сирвинт Ю. Ф. 647
 Сирота А. И. 853
 Сирченко З. Ф. 377
 Ситяк 198, 199
 Скалкина М. А. 468
 Скатецкий В. Г. 477
 Скачек Б. Я. 685, 686
 Скачков Б. Н. 393, 404, 466, 467, 826
 Скворецкий Я. М. 415
 Скворцов Г. Е. 529, 709, 830
 Скоробогатко В. Я. 479
 Скороход А. В. 6, 723, 724, 846
 Скрипник В. П. 437
 Слезкин Н. А. 362
 Слободецкий Л. Н. 498, 499, 512, 514, 515, 541, 542, 558, 565, 567, 659, 701, 707, 838, 846
 Слугин С. Н. 746
 Слудский 456
 Смагина В. И. 793
 Смирнов В. И. 2, 5, 98, 144, 175, 176, 217—220, 222, 226, 243, 261, 358, 362, 379, 465, 491, 604, 616—618, 621, 650, 773, 803, 826, 838, 840, 853
 Смирнов М. М. 486, 491, 584, 604, 606, 621, 838
 Смирнов Н. Н. 519
 Смирнов Н. С. 619, 798
 Смирнов С. В. 744
 Смирнова Г. Н. 569
 Смирнова Н. С. 837
 Смит О. К. 406, 409
 Смогоржевский А. С. 586
 Смолицкий Х. Л. 486, 491, 522, 523, 544, 580, 688, 838
 Смолянов О. Г. 722
 Соболев В. И. 6, 636, 642, 650, 746, 751, 753, 760, 842, 850
 Соболев С. Л. 271, 318, 329, 335, 337, 338, 343, 359, 362, 493—500, 506, 507, 509, 519, 523, 557, 570—572, 576, 579, 580, 582, 583, 590, 601, 604, 616, 617, 621, 648, 650, 653, 657—659, 672, 678, 700—702, 707, 708, 756, 838, 840, 843, 853
 Соболевский П. Е. 391, 437, 473, 474, 505, 561, 564, 622, 649, 715, 716, 718—720, 750, 756, 761, 820, 821, 826, 838, 849, 853
 Соколов И. Г. 848
 Соколов Ю. Д. 2, 456, 457, 586, 826, 827
 Соколовский В. В. 264, 362, 812
 Солнцев Ю. К. 400, 453, 464
 Соловьев А. Д. 62, 63
 Соловьев И. В. 253
 Сологуб В. С. 2, 5, 6, 456
 Солодовников А. С. 853
 Соломещ И. А. 558
 Соломяк З. С. 662
 Соломяк М. З. 486, 491, 505, 514, 541, 543, 561, 657, 716, 838
 Соломяк Т. Б. 534, 839
 Солонников В. А. 498, 512, 514, 515, 517, 542, 553, 561, 563, 566, 567, 623, 708, 709, 835, 839, 850
 Соляник-Красса К. В. 812
 Сонис М. Г. 734
 Сорокина Н. Г. 710
 Сохоцкий Ю. В. 212, 220, 221, 228, 231, 237, 251—253, 774, 777, 810

- Сочнева В. Е. 601
 Спенсер 308, 309
 Спринджук В. Г. 449
 Сретенский Л. Н. 359, 362, 550, 812
 Срубщик Л. С. 756
 Ставский М. Ш. 203, 803
 Станкевич И. В. 697
 Стапан А. Э. 759
 Старжинский В. М. 418
 Старун И. И. 419
 Сташевская В. В. 99, 695
 Стебаков С. А. 406
 Стеклов В. А. 368, 463, 467, 468, 490, 491, 522, 570, 578, 579, 679, 839
 Стенин Н. 806
 Степанов В. В. 106, 395, 397, 458, 460—462, 481, 824
 Степанов Г. Ю. 362, 366, 812
 Степин А. М. 766, 767
 Стернин Б. Ю. 708, 853
 Стефан 564, 836
 Стеценко В. Я. 649, 747, 748, 750, 751
 Стечкин Б. С. 359, 362, 812
 Стечкин С. Б. 83, 223, 661, 804
 Стилтьес Т. 109, 222, 310, 442, 494, 688, 812, 840
 Стоилов 313
 Стокс 423, 445, 446, 581, 621, 623, 716, 719, 834, 838, 839, 849
 Стоун М. 645, 731
 Страшкевич А. М. 812
 Стрелиц Ш. И. 10, 11, 15, 47, 201, 203, 803
 Стрыгин В. В. 5, 471—473, 649, 756, 760, 820, 827
 Ступялис В. 607
 Субботин В. Ф. 649
 Субботин М. Ф. 17, 18
 Субханкулов М. А. 33
 Суворов Г. Д. 5, 318, 326, 332, 333, 342, 344, 346—350, 808, 812
 Судаков В. Н. 722, 847
 Суетин П. К. 144
 Суетин Ю. К. 59
 Супруненко Д. А. 449
 Сухаревский И. В. 621, 837
 Сухомлинов Г. А. 647
 Суяршаев А. М. 398, 821
 Сычев А. В. 341, 344, 812
- Табаровский А. М. 385
 Табуева В. А. 400, 406, 407, 409, 410, 468, 827
 Таирова В. Г. 44
 Такенака 58
 Талалян А. А. 101
 Талицких Н. А. 481
 Тамаркин Я. Д. 368, 579, 715, 798, 827
- Тамразов П. М. 301, 304, 305, 812
 Танабе Х. 718
 Тарапов И. Е. 110
 Тарнопольский В. Г. 690
 Тартаковский В. А. 467
 Тейлор 12, 13, 63, 102, 201, 202, 261, 267, 268, 278, 302, 525; 801
 Тейхмюллер О. 37, 44, 330, 336, 355
 Темляков А. А. 5, 193—199, 201, 253, 311, 802—804, 812
 Темпельман А. А. 770
 Тен-Ен-Чера 286
 Теодореску Н. 274
 Тептин А. Л. 475
 Тер-Крикоров А. М. 363, 364, 759
 Терещенко Н. И. 419
 Терсенов С. А. 281, 288, 559, 584, 812
 Тиман А. Ф. 69, 70, 142, 662
 Титчмарш Э. Ч. 19, 33, 225, 680, 686
 Тихомиров В. М. 662, 802, 848, 851, 853
 Тихонов А. Н. 391, 395, 409, 413, 422, 423, 430, 435, 460, 463, 464, 469, 481, 482, 521, 531, 550, 560, 577, 600, 643, 646, 711, 714, 753, 798, 817, 827, 839
 Ткачев В. Ф. 410, 411
 Ткачев Вл. Ф. 411
 Ткаченко В. А. 699
 Тозони О. В. 366
 Толбаев Б. 33
 Толстой Ю. Г. 366
 Тонков Е. Л. 475, 476
 Тоннели Л. 496, 629, 630, 715
 Тонян В. А. 154
 Трахтенброт Б. А. 6
 Треногин В. А. 719, 759
 Трескунов А. Л. 562
 Трикоми 406, 556, 603—606, 786, 827, 838—840
 Троицкий В. А. 842
 Трохимчук Ю. Ю. 340, 341, 812
 Трошин Г. Д. 65
 Тузов А. П. 392, 393, 406, 466, 827
 Тулегенов Б. 469
 Тумаркин Г. Ц. 150, 175—177, 217, 219, 220, 222, 225, 306, 803, 810, 812
 Тумашев Г. Г. 254, 255, 262, 264, 812
 Тунг-чин-чу 414
 Тупчиев В. А. 428
 Тшицинский 236
 Тэклинд С. 711
 Тянь М. 33
- Угодчиков А. Г. 366, 813
 Уднов Ж. 683
 Узаков Г. П. 469
 Уеда И. 413

- Уиттекер Дж. 47, 58, 193, 387
 Улебежданов Д. У. 469
 Ульянов П. Л. 222, 225, 813
 Уолш 113, 115, 122, 137, 138, 141, 143, 802
 Уральцева Н. Н. 491, 530, 532, 534, 547, 562, 563, 567, 568, 631, 835, 841
 Урысон П. С. 213, 749, 750, 753, 797, 855
 Усманов Н. К. 526, 813
 Успенский И. Н. 619, 837
 Успенский С. В. 654, 658, 659
 Уфимцев П. Я. 839
 Ушакова Е. Г. 588
 Уэтт 686
- Фабер 144—147, 150
 Фаге М. К. 662, 695, 853
 Фаддеев Л. Д. 555, 556, 687, 696, 697, 725, 839, 853
 Файншмидт В. Л. 840
 Фан Дык Тинь 722, 723, 853
 Фаррель 115, 167, 170
 Фату П. 214, 215, 223, 226
 Федоров А. А. 614, 831
 Федоров В. С. 213, 214, 813
 Федоров Г. Ф. 372
 Федорюк М. В. 432, 600, 683, 685, 827, 853
 Федосов Б. В. 686
 Фейер Л. 108, 109
 Фейнман Р. П. 698, 725
 Феллер В. 716
 Феллер М. Н. 726
 Фельд Я. Н. 795
 Фельдбаум А. А. 842
 Фельдман И. А. 792—794
 Фельдман 723
 Фет А. И. 637, 747, 842
 Фешенко С. Ф. 376, 394, 432, 434, 457, 827, 853
 Фикера 558, 559
 Филатов А. Н. 434, 471, 827
 Филиппов А. А. 564
 Филиппов А. Ф. 406, 409, 453, 464, 520, 606, 620, 838, 839
 Филиппов И. Г. 363
 Филлипс Р. 715, 716, 828
 Фильчаков П. Ф. 5, 366, 812, 813
 Фирсакова О. С. 64—66
 Фихтенгольдц Г. М. 222, 647, 657
 Фишман К. М. 662
 Флитман Л. М. 618, 839
 Флоке 445, 446
 Фолчук В. И. 378, 448, 827
 Фок В. А. 432, 610—612, 614, 615, 618, 789, 835, 839, 855
 Фоменко Н. В. 294
 Фомин В. М. 718
- Фомин С. В. 6, 724, 739, 744, 766, 770, 771, 846—848, 851, 852
 Фрагмен 38, 549
 Фрадлин Б. Н. 6
 Франк 617
 Франк М. Л. 487
 Франкль Ф. И. 556, 572, 584, 604—606, 709, 839, 840
 Фредгольм 228, 232, 235, 238, 245, 246, 248, 249, 282, 365, 501, 645, 664, 773, 775, 777, 778, 782, 784, 786, 788, 798, 809
 Фрейдкин С. А. 237, 780, 813
 Фрейдлин М. И. 558
 Френель 611
 Фреше М. 645
 Фрибер Дж. 712
 Фридлиндер В. Р. 601
 Фридман А. 561
 Фридман Г. А. 13
 Фридман М. И. 617
 Фридман М. М. 840
 Фридрихс К. О. 411, 414, 496, 498, 500, 501, 519, 558, 572, 623, 653, 669, 709
 Фробениус 748
 Фройденталь Г. 647
 Фролов С. В. 636, 842
 Фроммер 368, 397—399, 402, 469, 470, 483, 814, 821, 826
 Фукс 361, 369, 372, 484
 Фукс Б. А. 195, 204—206, 803, 813
 Фукс В. 36, 38, 42
 Фукухара 403, 416, 485
 Фуллер Ф. Б. 414
 Фунтаков В. Н. 699
 Фурье 49, 99, 104, 107, 109, 113, 150, 165—167, 209, 210, 242, 360, 441, 491, 511—513, 519, 520, 555, 564, 567, 578—580, 585, 591, 597, 598, 602, 618, 644, 655, 656, 670, 679, 680, 685, 686, 694, 703, 710, 711, 719, 730, 734, 736, 737, 740, 741, 791—795, 835, 846, 852
- Хаар А. 629, 852
 Хаас 405
 Хавин В. П. 218, 222, 225
 Хавинсон С. Я. 219, 220, 222, 306, 810, 812, 813
 Хаджиев Дж. 742
 Хажалия Г. Я. 305, 334, 364
 Хаимов Н. Б. 398, 827
 Хаимов П. Л. 470
 Хайкин М. И. 264, 793
 Хайкин С. Э. 400, 454
 Хайкович И. М. 840
 Хаймульдин О. А. 469
 Хайруллин И. Х. 584, 795

Хайруллина С. П. 584
 Хайрутдинова И. В. 470
 Халанай А. 414, 441, 445, 446, 448, 463, 464
 Халиков Х. С. 392, 828
 Халилов З. И. 241, 562, 606, 651, 720, 789, 798, 840, 855
 Халмош П. Р. 766
 Хан 645, 660
 Хано 207
 Хапаев М. М. 432
 Хапланов М. Г. 184, 651
 Харазов Д. Ф. 798, 855
 Харасахал В. Х. 389, 391, 419, 469
 Харатишвили Г. Л. 476, 828, 842
 Харди 216, 367
 Хартман Ф. 399
 Хариш-Чандра 740, 743
 Хасабов Э. Г. 244, 246, 249, 786, 806, 809
 Хасанова М. 407, 470
 Хаскинд М. Д. 363
 Хасьминский Р. З. 558
 Хачатрян И. О. 101, 218
 Хаяси Т. 413
 Хведелидзе Б. В. 5, 6, 224, 230, 232, 237—240, 246, 780, 783—785, 813, 855
 Хволес А. Р. 799
 Хедлунд 771
 Хейман У. 36, 37, 305, 307, 803
 Хейнс М. 45
 Хелли 645
 Хермандер Л. 542, 545, 592, 594, 603, 706, 708, 711
 Хилле Э. 716, 828
 Хильми Г. Ф. 461
 Хинчин А. Я. 111, 112, 395, 460
 Хмилевский И. Л. 385
 Ходжаев А. 471
 Хольмгрен 547
 Хоперсков А. Е. 363
 Хопф Э. 576, 618, 622, 748, 762, 771, 789
 Хорн 368, 484
 Хорошилов В. В. 387, 388, 466, 828
 Хотоцумату С. 205
 Хоу Тянь Сян 600
 Хохлов Р. В. 367
 Хохряков А. Я. 413, 475, 478, 823
 Христианович С. А. 359, 360, 362, 813
 Христов Е. Х. 697
 Хромов А. П. 699
 Хуан-ци-юй 414
 Хускивадзе Г. А. 222, 225, 239—241, 780
 Цалюк З. Б. 413, 475, 476, 752, 814
 Цейлон 575

Цекановский Э. Р. 671
 Цитланадзе Э. С. 636, 641, 642, 753, 760, 842, 853
 Цкирия К. Е. 642
 Цыганкова Э. Г. 6
 Цыпкин Я. З. 448
 Чаплыгин С. А. 212, 324, 358, 362, 480, 605, 606, 746, 752, 813, 814
 Чарный В. И. 531
 Чарный И. А. 364, 813
 Чаус Н. Н. 691, 711
 Чатладзе Т. Л. 726
 Чебан В. Г. 795
 Чеботарев Н. Г. 48, 49, 74, 75, 77—80, 442, 588, 646, 793, 803, 853
 Чеботару И. С. 792—795
 Чебышев П. Л. 88—91, 94, 112, 113, 644, 688, 690, 849
 Чезари Л. 388, 416, 629, 828
 Чепман 723
 Черевичный П. Т. 410
 Чересиз В. М. 410
 Черкас Л. А. 406, 408, 410, 411, 452, 483, 828
 Чернавский А. В. 340, 341
 Черский Ю. И. 6, 241, 242, 789, 791—793, 795, 813, 855
 Черч П. 45
 Четаев Д. Н. 264
 Четаев Н. Г. 380, 382—384, 443, 481, 828
 Чечик В. А. 410, 453, 474, 828
 Чжан-Чжи-фэн 406, 409, 414
 Чибрикова Л. И. 237, 238, 250—252, 604, 780, 813
 Чикин Л. А. 236, 237, 780, 813
 Чирка Е. М. 732
 Чистяков А. Л. 697
 Чистяков Ю. В. 365
 Чичкин Е. С. 475
 Чогошвили Г. С. 2, 230, 636
 Чугаев Р. Р. 364
 Чугунов В. Д. 264
 Чумаков Ф. В. 796
 Чуфистова А. М. 365
 Шабат Б. В. 269, 278, 319, 322, 323, 325, 330, 336—338, 341, 342, 524, 607, 809, 813, 814, 834, 840
 Шагинян А. Л. 46, 148, 150, 156, 166, 168, 169, 172—174, 803
 Шази 456
 Шаманский В. Е. 366, 814
 Шапиро З. Я. 319, 513, 516, 541, 544, 566, 575, 591, 707, 709, 814, 840, 845, 846
 Шариева Д. Р. 469

Шарипов Ш. Р. 407, 470
 Шарпантье 461
 Шарпи 589
 Шаталов Ю. С. 475
 Шаташвили А. Д. 723
 Шаудер Ю. 264, 459, 475, 492, 514, 527,
 537, 544, 567, 572, 576, 623, 645—
 647, 714, 754—756, 798
 Шашина М. К. 437
 Шварц 251, 254, 256—258, 263, 275, 278,
 284, 306, 322, 326, 354, 365, 366,
 559
 Шварц А. С. 638, 660, 761, 851
 Шварц Л. 506, 590, 592, 595, 654, 657,
 702, 703
 Швингер И. 698
 Шевченко В. И. 269, 687, 788, 814
 Шевченко Р. Ф. 687
 Шелепов В. Ю. 780
 Шелкунов В. А. 798
 Шемякин Е. И. 840
 Шепелев В. М. 303, 334
 Шеремета М. Н. 13
 Шеретов В. Г. 355
 Шерман Д. И. 245, 246, 783
 Шерстнев А. Н. 726
 Шестаков А. А. 403, 405, 463, 483, 828
 Шестаков В. М. 364, 814
 Шефтель З. Г. 709
 Шеффер 68, 87, 93, 308, 309, 468
 Шехтер М. 515, 707
 Шилов Б. Ф. 364
 Шилов Г. Е. 20, 21, 410, 507, 511, 590—
 592, 595—598, 600—603, 647, 654,
 656, 657, 659, 703, 704, 711, 722, 726—
 729, 731, 732, 734, 738, 832, 833, 844,
 846, 849, 853
 Шилова Г. И. 631, 842
 Шильников Л. П. 404, 483
 Шиманов С. Н. 5, 393, 406, 412, 418, 439,
 441, 443—446, 448, 468, 483, 823,
 828
 Ширков Д. В. 844
 Широков И. И. 399, 470
 Широкоград Б. В. 411
 Шифнер Л. М. 465
 Шиффер 308, 310
 Шишкин А. А. 433
 Шишмарев И. А. 544, 562, 688, 709, 834
 Шкиль Н. И. 376, 419, 432, 457, 827,
 853
 Шлезингер 372
 Шматков А. А. 205, 206, 803, 804
 Шмидт Э. 645, 646, 673, 752, 757, 758,
 773, 797
 Шмульян В. Л. 647, 655, 658, 660,
 747
 Шмульян Ю. Л. 671, 675
 Шнирельман Л. Г. 634—636, 646, 647,
 661, 761, 798, 842, 843

Шноль Э. Э. 688, 697
 Шоинбеков К. Д. 469
 Шолохович Ф. А. 468
 Шоттки 89
 Шредингер 433, 554, 679, 682, 683, 685,
 687, 688, 695—697, 712, 716, 725,
 831, 835, 839, 843, 847, 850
 Шрейдер Ю. А. 730, 731
 Штейнгауз 645
 Штейнер 304
 Штеккель 71
 Штелик В. Г. 389
 Штерн А. И. 742
 Штокало И. З. 2, 6, 308, 363, 375, 376,
 384, 417—419, 456, 480, 829
 Штраус А. В. 651, 670, 677, 689
 Штраус 719
 Штурм 80, 458, 477, 680, 681, 683, 685,
 687, 689, 694—696, 698, 699, 732,
 733, 826, 847, 850
 Шубарт 450, 451
 Шур 200, 739
 Шура-Бура М. Р. 6

Щелкачев В. Н. 364, 814
 Щербаков Б. А. 474, 829

Эбаноидзе Т. А. 799
 Эванс 495
 Эдрей А. 38, 40—42
 Эзейло 411, 414
 Эйдельман С. Д. 512, 563, 565—567, 596,
 600, 686, 709, 840, 853, 854
 Эйдуз Д. М. 486, 491, 520, 522, 528, 531,
 532, 544, 688, 697, 840
 Эйлер Л. 280, 385, 441, 492, 500, 518, 535,
 627—629, 632
 Эйри 612
 Эльсгольц Л. Э. 5, 439, 441, 448, 463,
 636, 819, 823, 829, 842
 Энгельсон Я. Л. 642
 Энтина С. Б. 697
 Эпштейн 209
 Эрдеш 59
 Эренпрайс 592, 594, 595, 712
 Эрмит 77, 78, 80, 722
 Эрселл Ф. 616
 Эскин Г. И. 543, 564, 691, 692, 708, 710,
 789, 832, 844
 Эскин Л. Д. 743
 Эскина М. С. 697
 Эфрос Д. А. 363

Юдович В. И. 622, 623, 651, 657, 720,
 756, 832, 840
 Юнг 653
 Юров Г. П. 237

Юрченко С. И. 792
Юханонов Н. Н. 793, 794
Юшкевич А. П. 2, 6
Ющенко Е. Л. 6

Яблонский А. И. 408, 449—452, 477,
483, 820, 829
Яврян В. А. 687
Яглом А. М. 721, 724, 745, 845, 846, 854
Якимов М. Л. 363
Якоби 251, 587, 589, 628, 629, 642, 689,
843

Яковлев Г. Н. 498
Якубов С. Я. 718, 719
Якубович В. А. 393, 405, 406, 415,
418, 452, 462, 467, 678, 718, 821,
829

Яненко Н. Н. 521
Янович Л. Я. 6
Яновский С. В. 793
Янчевский С. А. 465
Яремчук Ф. П. 363
Ятаев М. Я. 469

О Г Л А В Л Е Н И Е

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
-----------------------	---

Основные направления математики в СССР

Г Л А В А П Е Р В А Я. ТЕОРИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЦЕЛЫХ И МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ (А. А. Гольдберг, Б. Я. Левин, И. В. Островский)	9
---	---

1. Характеристики роста и общие теоремы о росте целых и мероморфных функций	9
2. Связь между распределением корней целой функции и ее ростом	24
3. Распределение значений мероморфных функций	34

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ (Б. Я. Левин, И. В. Островский)	48
--	----

1. Интерполирование и связанные с ним вопросы	49
2. Алгебраические вопросы	72
3. Неравенства и экстремальные свойства	80
4. Целые функции и гармонический анализ	95

ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО (А. А. Гончар, С. Н. Мергелян)	112
--	-----

1. Равномерные приближения многочленами и рациональными функциями	112
2. Наилучшие приближения многочленами и рациональными функциями	136
3. Весовые равномерные приближения многочленами	150
4. Равномерные приближения целыми функциями	158
5. Приближения многочленами и рациональными функциями в интегральных метриках	164
6. Полнота систем аналитических функций	178

ФУНКЦИИ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ (А. А. Темляков)	193
--	-----

1. Интегральные представления	193
2. Классы регулярных функций	199
3. Целые функции	200
4. Отображения	204
5. Некоторые применения	209

ГЛАВА ВТОРАЯ. ГРАНИЧНЫЕ ПРОБЛЕМЫ, ОБОБЩЕНИЯ, ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ (А. Г. Джваршеишвили, Б. В. Хведелидзе)	211
1. Изучение аналитических функций вблизи множества их особых точек	212
2. Существование граничных значений и теоремы единственности	214
3. Классы аналитических функций в единичном круге	216
4. Классы аналитических функций в области	218
5. Граничные свойства интегралов типа Коши. Особые интегралы	220
6. Граничные свойства производной аналитических функций	225
7. Основные граничные задачи теории аналитических функций	227
8. Задача сопряжения	232
9. Задача Римана — Гильберта	242
10. Граничные задачи типа Римана — Гильберта и сопряжения	245
11. Граничные задачи на римановых поверхностях	250
12. Нелинейные граничные задачи	252
13. Граничные задачи для функций многих комплексных переменных	253
ОБРАТНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ (КРАЕВЫЕ) ЗАДАЧИ (Ф. Д. Гахов)	253
ОБОБЩЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ (И. Н. Векуа, И. И. Данилюк)	265
1. Введение	265
2. Основные принципы теории обобщенных аналитических функций	270
3. Теория краевых задач	282
4. Некоторые приложения	290
ВНУТРЕННИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОЛИСТНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ОДНОСВЯЗНЫХ И МНОГΟΣВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ (В. А. Зморевич)	295
ТЕОРИЯ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ПРИМЫКАЮЩИЕ К НЕЙ ВОПРОСЫ	311
1. Работа М. А. Лаврентьева 1935 г. Основные направления дальнейшего развития теории (Г. Д. Суворов)	313
2. Квазиконформные отображения и геометрическая теория дифференциальных уравнений М. А. Лаврентьева (Г. Д. Суворов)	319
3. Плоские квазиконформные отображения (Г. Д. Суворов)	327
4. Пространственные квазиконформные отображения (Г. Д. Суворов)	334
5. Метрические свойства плоских и пространственных отображений с ограниченным интегралом Дирихле (Г. Д. Суворов)	344
6. Римановы поверхности (Л. И. Волковский)	353
НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО (П. Ф. Фильчаков)	355

ГЛАВА ТРЕТЬЯ. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Аналитическая теория линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (Н. П. Еругин)	369
2. Асимптотические методы (Н. П. Еругин)	372
3. Теория устойчивости движения (Н. П. Еругин)	379
4. Работы казанской школы (Н. П. Еругин)	382
5. Разработка теории линейных систем в развитие общей классификации та- ких систем, введенной А. М. Ляпуновым (Н. П. Еругин)	386
6. Теория устойчивости в большом (Н. П. Еругин)	392

7. Устойчивость движения на конечном промежутке времени при вариациях правых частей дифференциальных уравнений (Н. П. Еругин)	393
8. Качественная теория дифференциальных уравнений (исследования до 1941 г.) (Н. П. Еругин)	394
9. Поведение интегральных кривых в окрестности особой точки (Н. П. Еругин)	396
10. Аналитическое представление и качественная картина расположения интегральных кривых в окрестности точки равновесия (Н. П. Еругин)	400
11. Качественная картина в целом (Н. П. Еругин)	405
12. Ограниченные решения (Н. П. Еругин)	414
13. Линейные и нелинейные системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами (Н. П. Еругин)	415
14. Линейные системы с квазипериодическими коэффициентами (Н. П. Еругин)	418
15. Уравнения с малым параметром при старшей производной (А. Б. Васильева)	421
16. Уравнения с запаздывающим аргументом (С. Н. Шиманов)	438
17. Аналитическая теория нелинейных уравнений (Н. П. Еругин)	448
18. Основные направления развития теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Научные коллективы и центры (Н. П. Еругин, <u>В. В. Немыцкий</u> , В. С. Сологуб, В. В. Стрыгин)	453
19. Итоги и перспективы (Н. П. Еругин)	479

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ (В. И. Смирнов)

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ	486
1. Введение	486
2. Теория дифференциальных уравнений с частными производными в России в начале XX века. Работы В. А. Стеклова и С. Н. Бернштейна	490
3. Работы Н. М. Гюнтера и С. Л. Соболева. Привлечение идей и методов функционального анализа	493
4. Обобщенные решения задач для уравнений с частными производными	499
5. Обобщенные функции	506
6. Системы уравнений. Работы И. Г. Петровского	509
7. Граничные задачи. Проблема индекса	512
8. Метод сеток	518
УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА	522
1. Классические уравнения эллиптического типа	522
2. Эллиптические уравнения на плоскости	523
3. Линейные и нелинейные уравнения второго порядка	527
4. Общие граничные задачи для уравнений высших порядков и систем	539
5. Задача Коши и вопросы качественной теории	547
6. Уравнения, содержащие малый параметр	550
7. Некоторые вопросы спектральной теории эллиптических дифференциальных операторов	553
8. Вырождающиеся эллиптические уравнения	556
УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА	560
1. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа	560
2. Параболические системы	565
3. Вырождающиеся параболические уравнения	568
УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА	570
1. Задача Коши для уравнений и систем	570
2. Задача Коши для квазилинейных уравнений и систем первого порядка	575

3. Смешанная задача для гиперболических уравнений и некоторые другие задачи	578
4. Вырождающиеся гиперболические уравнения	584
УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УРАВНЕНИЙ И УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА	585
1. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка и смежные вопросы	585
2. Общая теория линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Обобщенные функции	590
3. Уравнения смешанного типа	603
НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ	608
1. Работы Н. М. Гюнтера по гидродинамике идеальной жидкости	608
2. Математическая теория дифракции. Коротковолновая асимптотика	609
3. Теория нестационарных волн	616
4. Движение вязкой несжимаемой жидкости	621

ГЛАВА ПЯТАЯ. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ (Л. Э. Эльсгольц), В. С. Сологуб)

1. Классические методы и идеи	628
2. Прямые методы в вариационных задачах	632
3. Качественные методы	634
4. Оптимальные задачи	638
5. Более общие постановки вариационных задач	640
6. Другие направления исследований	642

ГЛАВА ШЕСТАЯ. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

ОБЩИЙ ОБЗОР (М. А. Красносельский, С. Г. Крейн, В. И. Соболев)	644
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА (С. Г. Крейн)	651
1. Линейные нормированные и банаховы пространства	651
2. Банаховы пространства суммируемых функций	653
3. Изоморфизм банаховых пространств	655
4. Линейные функционалы. Сопряженное пространство	656
5. Вложение пространств	658
6. Дальнейшая ступень развития теории функциональных пространств	659
7. Множества в функциональных пространствах	660
ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ (Ю. М. Бerezанский)	663
1. Предварительные понятия и определения	663
2. Теория расширений операторов	668
3. Разложение по обобщенным собственным векторам	671
4. Несамосопряженные операторы	673
5. Операторы в пространстве с индефинитной метрикой	677
СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ, РАЗНОСТНЫХ И ДРУГИХ ОПЕРАТОРОВ (Ю. М. Бerezанский)	678
1. Построение разложений по собственным функциям для дифференциальных операторов	679
2. Вопросы локализации спектра и асимптотики для самосопряженных дифференциальных операторов	683
	881

3. Классическая степенная проблема моментов, разностные уравнения, положительно определенные функции и ядра	688
4. Обратная задача спектрального анализа	693
5. Задача рассеяния	696
6. Несамосопряженные дифференциальные операторы	698
ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА К ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ (Ю. М. Березанский)	
1. Пространства С. Л. Соболева, обобщенные функции	700
2. Общие вопросы теории краевых задач	705
3. Эллиптические уравнения	706
4. Некоторые другие типы уравнений	709
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ	
1. Линейные уравнения с ограниченными операторами (С. Г. Крейн)	713
2. Нелинейные уравнения с ограниченными операторами (С. Г. Крейн)	714
3. Линейные уравнения с постоянными неограниченными операторами (С. Г. Крейн)	715
4. Линейные уравнения с переменными неограниченными операторами (С. Г. Крейн)	717
5. Линейные уравнения высших порядков (С. Г. Крейн)	718
6. Нелинейные уравнения с неограниченными операторами (С. Г. Крейн)	719
7. Континуальные интегралы и уравнения в функциональных производных (Ю. Л. Далецкий)	720
КОММУТАТИВНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ КОЛЬЦА (БАНАХОВЫ АЛГЕБРЫ) (Б. И. Коренблум)	
1. Общая теория коммутативных нормированных колец	727
2. Изучение конкретных алгебр	729
3. Алгебры с равномерной сходимостью	731
4. Кольца с локально компактным базисом	732
5. Некоторые другие вопросы	733
ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ГРУПП (Г. И. Кац)	
1. Введение	734
2. Гармонический анализ на коммутативных локально компактных группах	737
3. Общая теория представлений локально компактных групп	738
4. Представления классических групп	740
5. Специальные функции и теория представлений	743
6. Некоторые другие вопросы	743
ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ПРОСТРАНСТВА С КОНУСОМ (М. А. Красносельский, В. И. Соболев)	
1. Пространства Л. В. Канторовича	745
2. Конусы М. Г. Крейна	747
3. Линейные положительные операторы	748
4. Нелинейные положительные операторы	749
5. Дополнительные замечания	751
УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ (М. А. Красносельский)	
1. Начало развития нелинейного функционального анализа	752
2. Методы неподвижной точки	754
3. Исследование свойств конкретных операторов	756
4. Теория ветвлений решений	757
5. Дополнительные замечания	760

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ (С. В. Фомин)	762
1. Основные понятия. Проблема классификации	762
2. Спектральные методы	764
3. Аппроксимация динамических систем	766
4. Энтропия	768
5. Обобщенные динамические системы	770
6. Гладкие системы	770

ГЛАВА СЕДЬМАЯ. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Одномерные сингулярные интегральные уравнения (Г. Ф. Манджавидзе, Б. В. Хведелидзе)	774
2. Многомерные сингулярные интегральные уравнения (Т. Г. Гегелиа)	786
3. Интегральные уравнения с ядрами, зависящими от разности аргументов (Б. И. Черский)	789
4. Некоторые другие классы интегральных уравнений (Г. Ф. Манджавидзе, Б. В. Хведелидзе)	797

БИБЛИОГРАФИЯ	800
------------------------	-----

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ	856
-----------------------------	-----

Печатается по постановлению ученого совета Института истории АН УССР и главной редакции
Редакторы *Е. Л. Орлик, Т. С. Мельник*. Художественный редактор *К. Г. Лычаковский*. Оформление художника *Б. В. Валуенко*. Технические редакторы *Е. Н. Розенцвейг, Б. М. Кричевская*.
Корректоры *В. П. Камбурова, Л. Г. Морозова*.

БФ 07027. Зак. № 9-593. Изд. № 197. Тираж 20 000. Бумага № 1,70×100/16. Печ. физ. листов 55,25.
Условн. печ. листов 71,8. Учетно-изд. листов 71,4. Подписано к печати 22/I-1970 г. Цена 4 руб. 75 коп.

Издательство «Наукова думка», Киев, Репина, 3.

Отпечатано с матриц Украинского полиграфического комбината г. Киева в Киевской книжной типографии № 5 Комитета по печати при Совете Министров УССР.
Киев, Репина, 4. Зак. 150.

